2.4 Cenni su operatori di Fredholm

Elenchiamo, senza dimostrazioni, le definizioni e i risulati principali che riguardano gli operatori di Fredholm. Le dimostrazioni si possono trovare ad esempio in [KG83], Capitolo III.§2.3. Si vedano anche [Kat80], Capitolo IV.§5 per risultati più fini sulla stabilità degli operatori di Fredholm, e [Dou98], Capitolo 5, per la teoria Hilbertiana.

Siano X, Y spazi di Banach reali. Un'applicazione lineare e continua $T \in L(X, Y)$ si dice *semi-Fredholm* se la sua immagine è chiusa, ed almeno uno degli spazi vettoriali $\ker T$ e $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{ran} T$ ha dimensione finita. In questo caso è ben definito *l'indice di Fredholm* di T,

$$\operatorname{ind} T = \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Se $\operatorname{ind} T \in \mathbb{Z}$, T si dice *Fredholm.*

2.1 Esercizio. *Dimostrare che se $T \in L(X, Y)$ ha nucleo e conucleo di dimensione finita allora è Fredholm (in altre termini, la chiusura dell'immagine segue da queste ipotesi).*

Se X e Y hanno dimensione finita, ogni $T \in L(X, Y)$ è Fredholm di indice $\dim X - \dim Y$. E' semplice esibire molti esempi di operatori di Fredholm nello spazio di Hilbert

$$\ell^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid |x|_2 < \infty\}, \quad |x|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle_2}, \ \ \langle x, y\rangle_2 = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)y(n).$$

Sia $k \in \mathbb{N}$. L'operatore $L \in L(\ell^2, \ell^2)$, $(Lx)(n) = x(n+k)$ ha nucleo di dimensione k ed è surgettivo, quindi è Fredholm di indice k. L'operatore $R \in L(\ell^2)$, $Rx(n) = x(n-k)$ per $n \geq k$ e $Rx(n) = 0$ per $n < k$, è iniettivo ed ha immagine chiusa di codimensione k, quindi è Fredholm di indice $-k$. In effetti, $LR = I$.

L'operatore $L \in L(\ell^2, \ell^2)$, $(Lx)(n) = x(2n)$ ha nucleo infinito dimensionale ed è surgettivo, quindi è semi-Fredholm di indice $+\infty$. L'operatore $R \in L(\ell^2)$, $(Rx)(n) = x(n/2)$ per n pari e $(Rx)(n) = 0$ per n dispari, è iniettivo ed ha immagine chiusa di codimensione infinita, quindi è semi-Fredholm di indice $-\infty$. Anche qui, $LR = I$.

Sia $\tilde{\Phi}(X, Y)$ il sottoinsieme di $L(X, Y)$ costituito dagli operatori semi-Fredholm, e sia $\Phi(X, Y)$ il sottoinsieme dei Fredholm. I seguenti teoremi sono risultati di stabilità degli operatori di semi-Fredholm per perturbazioni piccole e per perturbazioni compatte.

2.2 Teorema. *Gli insiemi $\tilde{\Phi}(X, Y)$ e $\Phi(X, Y)$ sono aperti in $L(X, Y)$, e la funzione indice* $\operatorname{ind} : \tilde{\Phi}(X, Y) \to \overline{\mathbb{Z}}$ *è localmente costante (quindi è costante su ogni componente connessa).*

Ricordiamo che un operatore $K \in L(X, Y)$ si dice compatto se K manda insiemi limitati in insiemi pre-compatti. L'insieme degli operatori compatti è un sottospazio chiuso di $L(X, Y)$, e si indica con $L_c(X, Y)$.

2.3 Teorema. *Se $T \in \tilde{\Phi}(X, Y)$ e $K \in L_c(X, Y)$, allora $T + K \in \tilde{\Phi}(X, Y)$ e* $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.

Composizione di operatori di Fredholm è Fredholm, e l'indice si comporta addittivamente:

2.4 Teorema. *Siano $T \in \Phi(X, Y)$ e $S \in \Phi(Y, Z)$. Allora $ST \in \Phi(X, Z)$ e* $\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$.

È possibile (e molto utile in pratica) ridurre la verifica di proprietà di Fredholm a stime, come mostrano gli esercizi seguenti.

2.5 Esercizio. *Sia $T \in L(X, Y)$. Mostrare che T è iniettiva ed ha immagine chiusa se e solamente se esiste $c > 0$ tale che*

$$|x|_X \leq c|Tx|_Y \quad \forall x \in X.$$

2.6 Esercizio. *Sia $T \in L(X, Y)$. Mostrare che T è semi-Fredholm con indice minore di $+\infty$ se e solamente se esistono $c > 0$ e $K \in L_c(X, Z)$ (con Z spazio di Banach) tali che*

$$|x|_X \leq c(|Tx|_Y + |Kx|_z) \quad \forall x \in X.$$

2.5 Soluzioni periodiche di un'equazione del primo ordine

Sia f un diffeomorfismo crescente della retta reale: $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f' > 0$, e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Data una funzione 2π-periodica $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, cerchiamo le soluzioni 2π-periodiche dell'equazione

$$u'(x) + f(u(x)) = g(x). \tag{12}$$

Mostriamo innanzitutto che questo problema ha al più una soluzione. Infatti, se u e v sono soluzioni 2π-periodiche di (12), si ha

$$u'(x) - v'(x) + f(u(x)) - f(v(x)) = 0.$$

Sia $\bar{x}$ un punto di massimo per $u - v$. Allora $(u - v)'(\bar{x}) = 0$, quindi $f(u(\bar{x})) = f(v(\bar{x}))$. Per l'iniettività di f, $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$ e dunque $u - v \leq 0$. Scambiando il ruolo di u e v (oppure considerando un punto di minimo), otteniamo che $u = v$.

Per studiare l'esistenza di soluzioni diamo a questo problema un'impostazione funzionale. Indichiamo con $C^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni 2π-periodiche di classe C^k:

$$C^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ u \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid u(x + 2\pi) = u(x) \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

In altri termini, $C^k_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni C^k sul cerchio $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La norma C^k lo rende uno spazio di Banach. Consideriamo la mappa

$$F : C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad F(u) = u' + f \circ u.$$

L'argomento appena esibito mostra che F è iniettiva (in quell'argomento era infatti sufficiente assumere che le soluzioni fossero differenziabili). Se riusciremo a dimostrare che F è anche surgettiva, avremo mostrato che per ogni $g \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, R)$ l'equazione (12) possiede una ed una sola soluzione $u \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dato che l'equazione stessa mostra che se g è C^k allora la u è C^{k+1}, avremo anche dimostrato che per ogni $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'equazione (12) possiede una ed una sola soluzione $u \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La mappa F risulta differenziabile infinite volte, e

$$F(u)h = h' + f'(u)h.$$

Si tratta dunque di studiare l'operatore

$$S_\varphi : C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad S_\varphi v = v' - \varphi v,$$

nel caso $\varphi = -f' \circ u$. Studiamo questo operatore nel caso generale di una $\varphi \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'equazione

$$v' - \varphi v = 0$$

ha soluzione generale $v(x) = ce^{\Phi(x)}$, con $c \in \mathbb{R}$ e $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\, dt$. Tale soluzione è 2π-periodica se e solamente se $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0$. Quindi S_φ è iniettiva se e solamente se la media di φ su $[0, 2\pi]$ è non nulla.

Studiamo l'immagine di S_φ. Se $w \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, cerchiamo soluzioni 2π-periodiche di

$$v' - \varphi v = w.$$

Le soluzioni generali di questa equazione si ottengono moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante $e^{-\Phi}$, ottenendo

$$e^{-\Phi}(v' - \varphi v) = e^{-\Phi} w,$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\Phi(x)} v(x)\right) = e^{-\Phi(x)} w(x).$$

Quindi
$$e^{-\Phi(x)}v(x) = \int_0^x e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt + c,$$
ossia
$$v(x) = e^{\Phi(x)} \left(\int_0^x e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt + c \right).$$
Dato che v risolve un'equazione del primo ordine con coefficienti 2π-periodici, v è 2π-periodica se e solamente se $v(0) = v(2\pi)$, cioè se e solamente se
$$e^{\Phi(2\pi)} \left(\int_0^{2\pi} e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt + c \right) = c,$$
ossia
$$(1 - e^{\Phi(2\pi)})c = e^{\Phi(2\pi)} \int_0^{2\pi} e^{-\Phi(t)} w(t)\, dt.$$
Dato che esiste qualche $w \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ per cui il secondo membro è non nullo, questa equazione in c ha soluzione per ogni w se e solamente se $e^{\Phi(2\pi)} \neq 1$, ossia $\Phi(2\pi) \neq 0$. Abbiamo quindi dimostrato che S_φ è surgettiva se e solamente se la media di φ su $[0, 2\pi]$ è non nulla.

Si osservi che una volta caratterizzata l'iniettività degli operatori S_φ avremmo anche potuto ragionare come segue: (i) dimostrare che uno di essi, ad esempio S_c con c costante, è Fredholm di indice 0 (essenzialmente con i conti sopra, ma con qualche semplificazione), (ii) verificare che la differenza $S_\varphi - S_\psi$ è l'operatore di moltiplicazione per la funzione $\psi - \varphi$, e che tale operatore risulta compatto da $C^1_{2\pi}$ a $C^0_{2\pi}$, (iii) conlcudere che S_φ è sempre Fredholm di indice 0, e quindi che è iniettivo se e solo se surgettivo. Appellarsi alla teoria di Fredholm è superfluo per operatori semplici come questo, ma risulta importante per operatori più complicati, per i quali la determinazione del conucleo può essere delicata.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

2.7 Lemma. *Sia $\varphi \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Allora l'operatore lineare e continuo*
$$S_\varphi : C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad S_\varphi v = v' - \varphi v,$$
è un isomorfismo se e solamente se $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt \neq 0$.

2.8 Esercizio. *Supponiamo che $\varphi \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ abbia media nulla su $[0, 2\pi]$. Determinare l'immagine di S_φ.*

Torniamo allo studio del differenziale $DF(u) = S_{-f' \circ u}$. Dato che per ipotesi $f' > 0$, la funzione $f' \circ u$ ha integrale positivo, e $DF(u)$ è un isomorfismo per ogni $u \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il teorema della funzione inversa implica che F è localmente invertibile.

Quindi l'immagine di F è aperta: per dimostrare che F è surgettiva ci basterà dimostrare che l'immagine di F è anche chiusa. Insieme all'iniettività di F, questo implicherà che F è un diffeomorfismo di $C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ su $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sia $(g_n) \subset F(C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, $g_n = F(u_n)$, una successione che converge a g in $C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Quindi
$$u_n' + f \circ u_n \to g \quad \text{uniformemente.} \tag{13}$$
Sia x_n un punto di massimo per u_n. Allora $u_n'(x_n) = 0$, da cui $|f(u_n(x_n)) - g(x_n)| \to 0$. In particolare $(f(u_n(x_n)))$ è limitata. Dato che f è un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$, anche $(u_n(x_n))$ è limitata, e dunque la successione (u_n) è superiormente equilimitata. Un analogo ragionamento con i punti di minimo permette di concludere che (u_n) è equilimitata. Dalla (13) segue che anche la successione (u_n') è equilimitata. Perciò (u_n) è equilimitata ed equicontinua, e il teorema di Ascoli-Arzelà implica che a meno di sottosuccessioni (u_n) converge uniformemente ad una funzione $u \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Da (13) segue che (u_n') converge uniformemente a $g - f \circ u$. Quindi u è di classe C^1 e $u' = g - f \circ u$. Abbiamo quindi trovato $u \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $F(u) = g$, e quindi l'immagine di F è chiusa, come volevamo dimostrare. Riassumiamo i risultati di questa sezione nella seguente:

2.9 Proposizione. *Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f' > 0$, e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Per ogni $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'equazione*

$$u'(x) + f(u(x)) = g(x)$$

possiede una ed una sola soluzione $u \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.6 Il problema di Plateau: introduzione

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata (in altre parole è stabilito un verso per la normale alla superficie in ogni punto). Ricordiamo la definizione di *curvatura media* di S in un punto p. Il vettore di curvatura di una curva C in $\mathbb{R}^3$ è la derivata del suo vettore tangente unitario. Siano $p \in S$ e $v \in T_pS$, lo spazio tangente di S in p, con $|v| = 1$. Consideriamo una curva $C \subset S$ passante per p e tangente a v: la proiezione della suo vettore di curvatura in p sulla retta normale alla superficie non dipende dalla scelta della curva C, ed insieme al verso della normale definisce la quantità $k_p(v) \in \mathbb{R}$, che si dice curvatura di S in p lungo v. Questa funzione di v si estende ad una forma quadratica su T_pS, e gli autovalori di tale forma sono detti curvature principali di S in p, indicate con $k_1(p)$ e $k_2(p)$. In altri termini, $k_1(p)$ e $k_2(p)$ sono il minimo e il massimo della curvatura di S nel punto p. La media di questi due numeri è detta curvatura media di S in p, indicata con $H(p) = 1/2(k_1(p) + k_2(p))$. Invertendo l'orientazione, la curvatura media cambia segno. Se la superficie non è orientabile, la curvatura media è definita soltanto a meno del segno. Osserviamo che la curvatura media è non è una quantità intrinseca della superficie, ma dipende da come questa è immersa in $\mathbb{R}^3$: ad esempio un piano e il cilindro $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}$ sono localmente isometrici, ma il primo ha curvatura media nulla, mentre la curvatura media del secondo è $1/(2r)$. Il prodotto delle curvature principali, cioè la curvatura Gaussiana $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ è invece una quantità ben definita anche per superfici non orientabili, e non dipende dall'immersione della superficie in $\mathbb{R}^3$ (questo è il contenuto del *Teorema Egregium* di Gauss).

Le superfici che hanno in ogni punto curvatura media nulla si dicono *superfici minime*. Se una superficie compatta S con bordo Γ minimizza l'area tra tutte le superfici aventi bordo Γ, allora è una superficie minima (si veda l'esercizio 2.11 più avanti). Il viceversa non è vero: le superfici minime sono in generale soltanto punti critici del funzionale area (in un senso opportuno, visto che questo funzionale non è differenziabile).

Il *problema di Plateau* consiste nel trovare una superficie minima che abbia per bordo una curva chiusa assegnata $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ (più in generale, si possono cercare le superfici minime aventi per bordo un insieme finito di curve chiuse). Studieremo questo problema nel caso particolare in cui Γ sia il grafico di una mappa $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato del piano avente per bordo una curva regolare, e cercheremo superfici minime che siano grafici di mappe $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Quindi

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = g(x, y),\ (x, y) \in \partial\Omega\right\},$$

e

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = u(x, y),\ (x, y) \in \overline{\Omega}\right\}.$$

2.10 Esercizio. *Mostrare che la curvatura media della curva* graf u *nel punto $(x, y, u(x, y))$ è data dall'espressione*

$$H(x, y, u(x, y)) = \frac{1}{2}\partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) + \frac{1}{2}\partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right).$$

I simboli u_x, u_y, u_{xx}, ecc. indicano le derivate parziali.

Sviluppando le derivate, si trova l'espressione

$$H(x, y, u(x, y)) = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{2(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}.$$

Indicando con C^* uno spazio di funzioni di regolarità ancora da stabilire, possiamo dare al problema di Plateau l'impostazione funzionale seguente. Date le mappe

$$F : C^*(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \to C^{*-2}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \quad F(u) = (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy},$$

e

$$G : C^*(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \to C^{*-2}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times C^*(\partial\Omega, \mathbb{R}), \quad G(u) = (F(u), u|_{\partial\Omega}),$$

si tratta di stabilire se data $g \in C^*(\partial\Omega, \mathbb{R})$, la coppia $(0, g)$ appartenga o meno all'immagine di G.

Differenziando formalmente la mappa F (il conto è necessariamente solo formale, dato che non abbiamo ancora stabilito quali dovranno essere gli spazi funzionali), troviamo

$$DF(u)h = (1 + u_y^2)h_{xx} - 2u_x u_y h_{xy} + (1 + u_x^2)h_{yy} + 2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})h_x + 2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})h_y.$$

Ad esempio, per $u = 0$ troviamo $DF(0)h = \Delta h$, dove $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ è il Laplaciano. L'invertibilità del differenziale di G in 0 è equivalente all'esistenza e unicità della soluzione h del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson:

$$\begin{cases} \Delta h = v & \text{in } \Omega \\ h = f & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

per ogni $v \in C^{*-2}(\overline{\Omega})$ e $f \in C^*(\partial\Omega)$. Più in generale, l'invertibilità di $DG(u)$ è equivalente all'esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Dirichlet di tipo ellittico, con coefficienti non costanti. Vedremo nella prossima sezione quali sono gli spazi funzionali dove si possa dare risposta positiva a questi problemi.

2.11 Esercizio. *Sia $g \in C^1(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Dimostrare che se $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ concide con g su $\partial\Omega$ e minimizza il funzionale area*

$$A(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla v(x, y)|^2}\, dx\, dy$$

tra tutte le mappe $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ che coincidono con g su $\partial\Omega$, allora la curvatura media di graf *u è nulla.*

2.7 Cenni sulle equazioni ellittiche lineari

In questa sezione richiameremo alcune proprietà delle equazioni differenziali lineari ellittiche del secondo ordine. Si vedano ad esempio [GT83] e [LU68].

Consideriamo un operatore differenziale della forma

$$L = a^{ij}(x)\partial_{ij} + b^i(x)\partial_i + c(x), \quad a^{ij} = a^{ji},$$

dove a^{ij}, b^i e c sono funzioni reali sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (gli indici ripetuti si intendono da sommare). Si dice che L è un operatore *ellittico* se esiste $\lambda > 0$ tale che la matrice simmetrica $A(x) = (a^{ij}(x))$ e maggiore od uguale a λI per ogni $x \in \Omega$, ossia

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega. \tag{14}$$

Per il momento non supporremo alcuna regolarità sui coefficienti a^{ij}, b^i, c.

Principio del massimo. Gli operatori ellittici privi del termine di ordine zero hanno un'importante proprietà, detta principio del massimo.

2.12 Teorema. (Principio del massimo debole) *Supponiamo che l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia limitato, che L sia un operatore ellittico con $c = 0$ e $|b^i| \leq \beta$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ verifica $Lu \geq 0$, allora u assume massimo sul bordo di Ω:*

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che u assume massimo su $\overline{\Omega}$ perchè u è continua e Ω è limitato. Dimostriamo che sotto l'ipotesi più forte $Lu > 0$ in Ω, u non ha massimi locali interni. Infatti, se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo locale, allora $Du(x_0) = 0$ e $D^2u(x_0) \leq 0$. Allora

$$Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) = \operatorname{tr} A(x_0)D^2u(x_0) \leq 0,$$

contraddicendo $Lu > 0$.

Scrivendo $x = (x_1, \dots, x_n)$, stimiamo $Le^{\gamma x_1}$:

$$Le^{\gamma x_1} = (a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma)e^{\gamma x_1} \geq (\alpha\gamma^2 - \beta\gamma)e^{\gamma x_1}.$$

Quindi possiamo trovare γ sufficientemente grande tale che $Le^{\gamma x_1} > 0$. Allora $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ per ogni $\epsilon > 0$, e per il caso precedente

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Passando al limite per $\epsilon \to 0$, sfruttando il fatto che Ω è limitato, si ottiene la tesi. □

Stime di Schauder. Dati $A \in \mathbb{R}^n$, $u : A \to \mathbb{R}$, e $\alpha \in [0,1]$, definiamo la semi-norma α-Hölderiana di u su A come

$$|u|_{\alpha,A} = \sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è *localmente α-Hölderiana* se ogni $x \in \Omega$ possiede un intorno $U \subset \Omega$ tale che $|u|_{\alpha,U} < +\infty$. Lo spazio delle funzioni su Ω localmente α-Hölderiane si indica con $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Se $k \in \mathbb{N}$, lo spazio delle funzioni di classe C^k su Ω la cui derivata k-esima è localmente α-Hölderiana si indica con $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Si dice che $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è *uniformemente α-Hölderiana* se $|u|_{\alpha,\Omega} < +\infty$ (in particolare, u è uniformemente continua, e quindi si estende ad una funzione continua $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$). Lo spazio delle funzioni su Ω uniformemente α-Hölderiane si indica con $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, quello delle funzioni di classe C^k su Ω la cui derivata k-esima è uniformemente α-Hölderiana si indica con $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se Ω è limitato, gli spazi $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1]$, sono spazi di Banach con la norma

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + |D^k u|_{\alpha,\Omega}.$$

2.13 TEOREMA. (Stime di Schauder interne) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e supponiamo che L sia ellittico di costante $\lambda > 0$ con coefficienti in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ un aperto e sia $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Allora esiste una costante C tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ risulta*

$$d\,\|Du\|_{C^0(\overline{\Omega'})} + d^2\|D^2u\|_{C^0(\overline{\Omega'})} + d^{2+\alpha}|D^2u|_{\alpha,\Omega'} \leq C(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}).$$

La costante C dipende solamente da n, α, λ, dal diametro di Ω, e dalla norma $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ dei coefficienti a^{ij}, b^i, c.

Per la dimostrazione si veda [GT83], Corollario 6.3.

Sia $k \in \mathbb{N}$. L'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice di classe $C^{k,\alpha}$ se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste una palla B di centro x_0 e una bigezione φ da B su un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che:

(i) φ e φ^{-1} sono di classe $C^{k,\alpha}$;

(ii) $\varphi(B \cap \overline{\Omega}) = A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$;

(iii) $\varphi(B \cap \partial\Omega) = A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$.

Sia Ω un aperto di classe $C^{k,\alpha}$, con $k \geq 1$. Una funzione $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ si dice di classe $C^{k,\alpha}$ se per ogni mappa φ come sopra, la funzione $g \circ \varphi^{-1}$ è di classe $C^{k,\alpha}$ sull'aperto (in $\mathbb{R}^{n-1}$) $A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Lo spazio vettoriale delle funzioni di classe $C^{k,\alpha}$ su $\partial\Omega$ si indica con $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Quando Ω è limitato, ogni funzione $g \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ si estende ad una funzione $\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Viceversa, la restrizione di ogni $\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ appartiene a $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Lo spazio $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|g\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{\tilde{g} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ \tilde{g}|_{\partial\Omega} = g}} \|\tilde{g}\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

2.14 Osservazione. *Nel caso in cui Ω sia un aperto limitato di classe $C^{k,\alpha}$ semplicemente connesso nel piano, il suo bordo può essere parametrizzato da una curva chiusa di classe $C^{k,\alpha}$. In questo caso, fissata questa parametrizzazione ω - ad esempio scegliendo quella per lunghezza d'arco - si trova una norma equivalente su $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ prendendo la norma $C^{k,\alpha}$ di $g \circ \omega$.*

2.15 Teorema. (Stime di Schauder fino al bordo) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$ e supponiamo che L sia ellittico di costante $\lambda > 0$ con coefficienti in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$. Allora esiste una costante C tale che per ogni $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ risulta*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|u|_{\partial\Omega}\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}).$$

La costante C dipende solamente da n, α, λ, dall'aperto Ω, e dalla norma $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ dei coefficienti a^{ij}, b^i, c.

Per la dimostrazione si veda [GT83], Teorema 6.6.

Regolarità delle soluzioni. Le stime di Schauder sono alla base dei seguenti risultati di regolarità.

2.16 Teorema. (Regolarità all'interno) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e supponiamo che L sia ellittico con coefficienti in $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0,1)$. Se $u \in C^2(\Omega)$ e $Lu \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, allora $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$.*

Per la dimostrazione si veda [GT83], Teorema 6.17.

2.17 Teorema. (Regolarità fino al bordo) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe $C^{k+2,\alpha}$ e supponiamo che L sia ellittico con coefficienti in $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0,1)$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $Lu \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, e $u|_{\partial\Omega} \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$, allora $u \in C^{k+2,\alpha}\overline{\Omega})$.*

Per la dimostrazione si veda [GT83], Teorema 6.19.

Risolubilità del problema di Dirichlet.

2.18 Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato di classe $C^{2,\alpha}$ e supponiamo che L sia ellittico con coefficienti in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$. Allora l'operatore lineare continuo*

$$C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega), \quad u \mapsto (Lu, u|_{\partial\Omega}), \tag{15}$$

è Fredholm di indice 0. Se il coeffciente c del termine di ordine 0 in L è nullo, allora l'operatore (15) è un isomorfismo.

Si vedano i Teoremi 6.14 e 6.15 in [GT83]. Accenniamo di seguito ad una possibile linea dimostrativa. La stima di Schauder fino al bordo (Teorema 2.15) insieme al risultato dell'Esercizio 2.17 (tenendo conto del fatto che l'immersione $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ è compatta) implica che l'operatore (15) ha immagine chiusa e nucleo di dimensione finita. In particolare, (15) è semi-Fredholm. È facile collegare l'operatore L al Laplaciano Δ mediante un cammino di operatori ellittici. La teoria classica del Laplaciano mostra che nel caso $L = \Delta$ l'operatore (15) è un isomorfismo. In effetti sotto ipotesi di regolarità più deboli per Ω (ad esempio la proprietà della sfera esterna), il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, f limitata, e $g \in C^0(\partial\Omega)$, possiede un unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ([GT83], Teorema 4.3). Il teorema di regolarità fino al bordo 2.17 mostra che se $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, allora $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, il che prova l'invertibilità di (15). Dato che l'indice di Fredholm è localmente costante, l'operatore (15) risulta sempre Fredholm di indice 0. Quando $c \leq 0$ il principio del massimo prova l'inietività, che per la proprietà di Fredholm è equivalente alla surgettività.

Stime Hölderiane per il gradiente in dimensione due. Concludiamo questa panoramica sulle equazioni ellittiche lineari enunciando una stima sulle derivate prime che vale senza ipotesi di regolarità, ma solo di limitatezza, sui coefficienti. Questo risultato vale in dimensione due, e la dimostrazione si basa sulla teoria delle mappe quasi conformi (si veda [GT83], Capitolo 12).

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, e sia L l'operatore differenziale lineare del secondo ordine

$$L = a(x,y)\partial_{xx} + 2b(x,y)\partial_{xy} + c(x,y)\partial_{yy}.$$

Non supponiamo alcuna ipotesi di regolarità sulle funzioni $a, b, c : \Omega \to \mathbb{R}$, assumiamo solamente ipotesi di ellitticità e di limitatezza:

$$\lambda(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leq \Lambda(|\xi|^2 + |\eta|^2), \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Enunciamo direttamente le stime fino al bordo (per le stime interne si veda [GT83], Teorema 12.4).

2.19 Teorema. *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato di classe C^2, e che l'operatore L verifichi (16). Allora esiste un numero $\beta = \beta(\Lambda/\lambda, \Omega) \in (0,1]$ tale che per ogni $u \in C^2(\overline{\Omega})$ risulta*

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C(\Lambda/\lambda, \Omega, \sup_{\Omega} |Lu|, \|u|_{\partial\Omega}\|_{C^2(\partial\Omega)}).$$

La dimostrazione si può trovare in [GT83], alla fine della sezione 12.2.

Riferimenti bibliografici

[Dou98] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Springer, Berlin, 1998.

[GT83] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, New York, 1983.

[Kat80] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin, 1980.

[KG83] A. A. Kirillov and A. D. Gvišiani, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale*, Edizioni Mir, Mosca, 1983.

[LU68] O. A. Ladyženskaja and N. N. Ural'ceva, *Équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1968.