3.3 Linearizzazione di funzioni olomorfe: il teorema di Siegel

Il problema. Sia B_r la palla di raggio r centrata in 0 in $\mathbb{C}$, e sia $f : B_r \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = \alpha \neq 0$. Vorremmo studiare il problema seguente: è vero che f è olomorficamente coniugata in 0 alla sua parte lineare? In altre parole, ci stiamo chiedendo se esiste una funzione olomorfa $h : B_s \to \mathbb{C}$ tale che $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ e

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = \alpha z, \quad \forall z \in B_s. \tag{39}$$

A meno di scambiare $h(z)$ con $h(\lambda z)$, possiamo supporre che $h'(0) = 1$. Poniamo

$$f(z) = \alpha z + \hat{f}(z), \;\; \hat{f}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad h(z) = z + \hat{h}(z), \;\; \hat{h}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n.$$

I coefficienti a_n sono assegnati, e si tratta di trovare i coefficienti b_n e dimostrare che la serie b ha raggio di convergenza positivo. L'equazione (39) è equivalente a $f \circ h(z) = h(\alpha z)$, cioè a

$$\alpha \hat{h}(z) + \hat{f}(z + \hat{h}(z)) = \hat{h}(\alpha z), \tag{40}$$

ossia a

$$\alpha \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(z + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_n \alpha^n z^n,$$

o anche

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \left(1 + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^{m-1} \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha^n - \alpha) b_n z^n.$$

Se indichiamo con $\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ la serie di sinistra, è facile vedere che la dipendenza di c_n dai coefficienti b_j coinvolge solamente i coefficienti fino all'$(n-1)$-esimo (anzi fino ad un indice ancora più basso, ma questo ci basta): $c_n = c_n(b_2, \dots, b_{n-1})$. Questa osservazione permette di risolvere l'equazione sopra induttivamente:

$$b_2 = \frac{a_2}{\alpha^2 - \alpha}, \quad b_n = \frac{c_n(b_2, \dots, b_{n-1})}{\alpha^n - \alpha}.$$

L'equazione è dunque risolubile formalmente per ogni scelta dei coefficienti a_n se e solamente se i denominatori non si annullano mai, ossia se e solamente se α non è una radice n-esima di 1, per nessun $n \in \mathbb{N}$. In particolare, se $|\alpha| \neq 1$. In questo caso la soluzione formale h ha raggio di convergenza positivo:

3.1 Esercizio. *Supponiamo che $f(0) = 0$ e $f'(0) = \alpha \neq 0$ abbia modulo diverso da 1. Dimostrare che esiste unica una funzione olomorfa $h : B_s \to \mathbb{C}$, per qualche $s > 0$, tale che $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, e $h^{-1} \circ f \circ h(z) = \alpha z$.*

Quando α ha modulo unitario ma non è una radice di 1, la convergenza della serie b diventa problematica, poichè i denominatori $\alpha^n - \alpha$, pur essendo sempre diversi da zero, si avvicinano a zero frequentemente. Infatti:

3.2 Esercizio. *Supponiamo che il numero complesso α di modulo unitario non sia radice di 1. Dimostrare che l'insieme $\{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è denso nel cerchio unitario.*

Questa difficoltà prende il nome di problema dei piccoli denominatori. Nonostante la soluzione formale qui sia più o meno esplicita, ed il problema sia la sua convergenza, risulta utile impostare questo problema come una questione di funzione implicita.

Sia $A(r)$ l'insieme delle funzioni olomorfe e limitate su B_r. La norma dell'estremo superiore rende $A(r)$ uno spazio di Banach. Indichiamo con $A_2(r)$ il sottospazio di $A(r)$ composto da quelle funzioni che si annullano in 0 assieme alla loro derivata prima, e scelto $s < r$ consideriamo la mappa

$$F : A_2(r) \times \left\{ \hat{h} \in A_2(s) \mid \|\hat{h}\|_\infty < r - s \right\} \to A_2(s), \quad F(\hat{f}, \hat{h}) = \alpha \circ \hat{h} - \hat{h} \circ \alpha + \hat{f} \circ (\mathrm{id} + \hat{h}),$$

dove con α indichiamo anche la funzione lineare $z \mapsto \alpha z$. Si ha $F(0,0) = 0$, e (40) mostra che il nostro problema si traduce in: data $\hat{f} \in A_2(r)$ trovare $\hat{h} \in \left\{ \hat{h} \in A_2(s) \mid \|\hat{h}\|_\infty < r - s \right\}$ tale che $F(\hat{f}, \hat{h}) = 0$. Si tratta dunque della tipica formulazione da teorema della funzione implicita. Il differenziale rispetto alle seconda variabile di F in $(0,0)$ è l'operatore lineare

$$D_2F(0,0) : A_2(s) \to A_2(s), \quad D_2F(0,0)u = \alpha \circ u - u \circ \alpha.$$

Data $v = \sum_{n=2}^\infty v_n z^n \in A_2(s)$, la soluzione formale u di

$$\alpha \circ u - u \circ \alpha = v$$

è data da

$$u(z) = \sum_{n=2}^\infty \frac{v_n}{\alpha - \alpha^n} z^n.$$

Di nuovo, i piccoli denominatori rendono problematica la convergenza: se u ha raggio di convergenza s, la v avrà in generale raggio di convergenza minore. Per ben che vada (cioè imponendo ulteriori condizioni sul numero di modulo unitario α), potremmo sperare di avere un inversa destra continua da $A_2(s)$ in un $A_2(s')$ con $s' < s$. Come prima, il teorema della funzione implicita classico non è applicabile a causa di un'inversa destra illimitata. Il problema risulterebbe semplificato se potessimo lavorare contemporaneamente con spazi di funzioni olomorfe di raggio di convergenza arbitrario.

3.3 Esercizio. *Si consideri la mappa*

$$F : C^\infty([-1,1]) \to C^\infty([-1,1]), \quad F(u)(x) = u(x) - xu(x)u'(x).$$

Si verifichi che il differenziale di F in 0 è l'identità (differenziale formale, o per chi conosce la definizione di differenziale di una mappa tra spazi di Frechet, differenziale vero). Si mostri però che la mappa F non è localmente aperta in 0: le funzioni $v_n(x) = 1/n + x^n/n!$ tendono uniformemente a 0 con tutte le derivate in $[-1,1]$, ma v_n non appartiene all'immagine di F.

3.4 Esercizio. *Provare a dare un'impostazione funzionale al problema seguente: dato un diffeomorfismo $\varphi : B_{r_0}(0) \to \varphi(B_{r_0}(0)) \subset \mathbb{R}^n$ di una palla di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(0) = 0$ e $D\varphi(0) = I$, cercare un campo $X : B_{r_1}(0) \to \mathbb{R}^n$, $r_1 \leq r_0$, il cui flusso a tempo 1 coincida con φ in un intorno di 0. In altre parole, si vuole che la soluzione del problema di Cauchy*

$$\partial_t \psi(t,x) = X(\psi(t,x)), \quad \psi(0,x) = x, \quad \forall x \in B_{r_1}(0),$$

verifichi $\psi(1,x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in B_{r_2}(0)$, se $r_2 \leq r_1$ è sufficientemente piccolo. Quali sono le difficoltà?

3.5 Esercizio. *(i) Dimostrare che il problema sopra ha soluzione se si ammette che il campo X dipenda dal tempo. In altre parole, si cerca $X : [0,1] \times B_{r_1}(0) \to \mathbb{R}^n$ tale che la soluzione del problema di Cauchy non autonomo*

$$\partial_t \psi(t,x) = X(t, \psi(t,x)), \quad \psi(0,x) = x, \quad \forall x \in B_{r_1}(0),$$

verifichi $\psi(1,x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in B_{r_2}(0)$, se $r_2 \leq r_1$ è sufficientemente piccolo. (ii) Al posto di $D\varphi(0) = I$ assumiamo $D\varphi(0) = A \in GL(n,\mathbb{R})$. Per quali $A \in GL(n,\mathbb{R})$ è ancora possibile risolvere questo problema?

3.6 Esercizio. *Sia $\varphi : S^1 \to S^1$ un diffeomorfismo, vicino in qualche senso all'identità. Ci si chiede se possiamo ottenere φ come flusso a tempo 1 di un campo sul cerchio, $X : S^1 \to TS^1$. (i) Dare un'impostazione funzionale a questo problema, ed individuare le difficoltà. (i) Supponiamo che un diffeomorfismo $\varphi : S^1 \to S^1$ non abbia punti fissi e sia il flusso a tempo 1 di un campo $X : S^1 \to TS^1$. Dimostrare che φ è coniugato ad una rotazione: esiste un diffeomorfismo $h : S^1 \to S^1$ tale che $\varphi = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, dove $R_\alpha : S^1 \to S^1$ è la rotazione $e^{i\theta} \mapsto e^{i(\theta+\alpha)}$. (iii) Dimostrare che esistono diffeomorfismi $\varphi : S^1 \to S^1$ arbitrariamente vicini all'identità nella topologia C^k, $k \in \mathbb{N}$, che non sono topologicamente coniugati ad una rotazione.*

Euristica sui problemi di coniugio. Premettiamo qualche considerazione generale sui problemi di coniugio. In questo tipo di problemi, si vuole mettere una data mappa f in una certa forma normale $\overline{f}$, mediante un coniugio h: si vuole cioè trovare h che risolva l'equazione

$$h^{-1} \circ f \circ h = \overline{f}.$$

Se $\mathcal{F}$ indica lo spazio delle f e $\mathcal{H}$ lo spazio delle h, lo spazio $\mathcal{H}$ ha una struttura di gruppo, e questo gruppo agisce su $\mathcal{F}$ mediante

$$F : \mathcal{F} \times \mathcal{H} \to \mathcal{F}, \quad (f, h) \mapsto h^{-1} \circ f \circ h.$$

Più precisamente, si tratta di un'azione destra, cioè valgono le identità

$$F(f, \mathrm{id}) = f, \quad F(f, h_1 \circ h_2) = F(F(f, h_1), h_2).$$

Nel linguaggio delle azioni di gruppo, risolvere l'equazione

$$F(f, h) = \overline{f},$$

significa dimostrare che $\overline{f}$ sta nell'orbita di f. Vorremmo trovare h come limite di una successione (h_n), tale che $f_n := F(f, h_n)$ tenda a $\overline{f}$. Supponendo di avere una soluzione approssimata h_n, è naturale scegliere h_{n+1} della forma $h_{n+1} = h_n \circ u$, con u vicino all'identità scelto in modo da rendere piccola la quantità $|F(f, h_n \circ u) - \overline{f}|$ (qua $|\cdot|$ indica una qualche norma). Dalla proprietà di azione destra risulta $F(f, h_n \circ u) = F(f_n, u)$, e sviluppando in $(\overline{f}, \mathrm{id})$ otteniamo

$$\begin{aligned} F(f_n, u) &= F(\overline{f}, \mathrm{id}) + D_1 F(\overline{f}, \mathrm{id})(f_n - \overline{f}) + D_2 F(\overline{f}, \mathrm{id})(u - \mathrm{id}) + O(|f_n - \overline{f}|^2) + O(|u - \mathrm{id}|^2) \\ &= f_n + D_2 F(\overline{f}, \mathrm{id})(u - \mathrm{id}) + O(|f_n - \overline{f}|^2) + O(|u - \mathrm{id}|^2), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $D_1 F(\overline{f}, \mathrm{id}) = I$, visto che $F(f, \mathrm{id}) = f$ per ogni f. Quindi, volendo $|F(f_n, u) - \overline{f}|$ piccolo, si cerca u che soddisfi

$$D_2 F(\overline{f}, \mathrm{id})(u - \mathrm{id}) = \overline{f} - f_n. \tag{41}$$

Supponiamo di saper risolvere l'equazione (41), con un controllo lineare delle norme: $|u - \mathrm{id}| \leq c|f_n - \overline{f}|$. Allora la convergenza di f_n a $\overline{f}$ è quadratica. Infatti se $|f_n - \overline{f}| = \epsilon_n$, si ha $|u - \mathrm{id}| = O(\epsilon_n)$, e quindi

$$|f_{n+1} - \overline{f}| = |F(f_n, u) - \overline{f}| = O(\epsilon_n^2) + O(|u - \mathrm{id}|^2) = O(\epsilon_n^2).$$

Se si riesce anche a dimostrare la convergenza della successione $h_n = u_1 \circ \cdots \circ u_{n-1}$, si ottiene il coniugio cercato.

Si noti che per applicare questo metodo, basta saper trovare un'inversa destra dell'operatore $D_2 F(\overline{f}, \mathrm{id})$, e non di $D_2 F$ in tutto un intorno di $(\overline{f}, \mathrm{id})$. Come abbiamo visto in precedenza, potrà accadere che l'inversa destra di $D_2 F(\overline{f}, \mathrm{id})$ comporti una perdita di regolarità (cioè sia una applicazione lineare e continua a valori in uno spazio di funzioni più grande e con una norma più debole del dominio di $D_2 F(\overline{f}, \mathrm{id})$). Questa perdita di regolarità può però essere compensata dalla convergenza quadratica dello schema iterativo.

3.7 Esercizio. *Applicare le considerazioni appena esposte al problema di determinare l'inversa di un operatore lineare e continuo su uno spazio di Banach E della forma $I - A$, con $\|A\| < 1$. Qui l'azione è quella di $GL(E)$ su $L(E, E)$, data da $F(A, T) = AT$, e si vuole risolvere $F(I-A, T) = I$. Che formula si ottiene per $(I - A)^{-1}$?*

3.8 Esercizio. *Sia X un campo vettoriale su una varietà M_2. Data una mappa differenziabile $f : M_1 \to M_2$, si definisca $f^*(X)$ come quel campo su M_1 le cui linee di flusso vengono mandate da f in linee di flusso per X. Determinare l'espressione analitica di $f^*(X)$. Dimostrare che il gruppo dei diffeomorfismi di una varietà M agisce sullo spazio vettoriale dei campi su M mediante un'azione sinistra.*

Condizioni diofantine. Torniamo al problema di coniugare una funzione olomorfa $f : B_r(0) \to \mathbb{C}$, tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = \alpha$ con $|\alpha| = 1$, alla sua parte lineare $z \mapsto \alpha z$ (localmente in 0).

Dato che α ha modulo 1, è della forma $\alpha = e^{2\pi i\tau}$, con $\tau \in \mathbb{R}$. Abbiamo già visto che τ non deve essere un numero razionale. Supporremo una proprietà ancora più forte: τ deve essere un *numero diofantino*, cioè

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{b}{q^{2+\beta}}, \quad \forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{Z}^+, \tag{42}$$

per qualche $b > 0$ e $\beta > 0$. Ricordiamo che se τ è un numero irrazionale, il suo sviluppo in frazione continua fornisce una successione di numeri razionali p_n/q_n, p_n e q_n primi tra loro, tale che $q_n \to +\infty$ e

$$\left|\tau - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La condizione (42) dice che l'esponente 2 nella disuguaglianza sopra non può essere migliorato. Tutti gli irrazionali algebrici soddisfano la (42), per ogni $\beta > 0$. Fissato $\beta > 0$, l'insieme dei numeri τ che soddisfano (42) per qualche b ha complementare di misura nulla. Si veda ad esempio [HW79].

Fissiamo $n \in \mathbb{Z}^+$, e sia $m \in \mathbb{Z}$ l'unico intero per cui $|\tau - m/n| < 1/(2n)$. Se $|\tau - m/n| \geq 1/(4n)$, allora $|\tau - (2m+1)/(2n)| \leq 1/(4n)$ oppure $|\tau - (2m-1)/(2n)| \leq 1/(4n)$, da cui $|2\pi n\tau - (2m+1)\pi| \leq \pi/2$ oppure $|2\pi n\tau - (2m-1)\pi| \leq \pi/2$, e quindi

$$|\alpha^n - 1| \geq |\mathrm{Re}\,(\alpha^n - 1)| = |\cos 2\pi n\tau - 1| \geq 1.$$

Se invece $|\tau - m/n| < 1/(4n)$, tenendo conto del fatto che $|\sin x| \geq (2/\pi)|x|$ per $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, otteniamo da (42)

$$|\alpha^n - 1| \geq |\mathrm{Im}\,\alpha^n| = |\sin 2\pi n\tau| = \left|\sin 2\pi n\Big(\tau - \frac{m}{n}\Big)\right| \geq \frac{2}{\pi} 2\pi n \left|\tau - \frac{m}{n}\right| \geq 4n\frac{b}{n^{2+\beta}} = \frac{4b}{n^{1+\beta}}.$$

Concludiamo che se τ soddisfa (42), allora $\alpha = e^{2\pi i\tau}$ soddisfa

$$|\alpha^n - 1| \geq \frac{\delta}{n^{1+\beta}}, \tag{43}$$

per qualche $\delta > 0$.

Lemmi preliminari. Sia $F(f, h) = h^{-1} \circ f \circ h$, e ricordiamo che la forma normale richiesta adesso è α, vista come funzione lineare $z \mapsto \alpha z$. Un facile calcolo formale mostra che

$$D_2F(\alpha, \mathrm{id})w = \alpha \circ w - w \circ \alpha.$$

Ricordiamo che $A_2(r)$ indica lo spazio delle funzioni olomorfe e limitate su $B_r(0)$, che si annullano in 0 insieme alla loro derivata prima. Si tratta di uno spazio di Banach con la norma $\|w\|_{\infty,r}$, l'estremo superiore di w su B_r. Qui e nel seguito, B_r indica la palla aperta di $\mathbb{C}$ di raggio r e centro 0.

3.9 Lemma. *Supponiamo che α soddisfi la condizione (43). Per ogni $\hat{v} \in A_2(r)$, $\hat{v}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n z^n$, la soluzione di*

$$\alpha \circ \hat{u} - \hat{u} \circ \alpha = \hat{v}, \quad \hat{u}(0) = \hat{u}'(0) = 0, \tag{44}$$

è data da

$$\hat{u}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{v_n}{\alpha - \alpha^n} z^n. \tag{45}$$

La funzione $\hat{u}$ appartiene a $A_2((1-\theta)r)$ per ogni $\theta \in (0,1)$, ed esiste $c_0 = c_0(\beta, \delta)$ tale che

$$\|\hat{u}\|_{\infty,(1-\theta)r} \leq \frac{c_0}{\theta^{\beta+2}} \|\hat{v}\|_{\infty,r}, \quad \forall \theta \in (0,1).$$

La dimostrazione farà uso del seguente:

3.10 Esercizio. *Dato $\gamma \geq 0$, mostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^\gamma x^n$ ha raggio di convergenza 1, e che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\gamma x^n \leq \frac{c(\gamma)}{(1-x)^{\gamma+1}}, \quad \forall x \in [0,1).$$

Dimostrazione del Lemma 3.9. Abbiamo già verificato nella sezione 3.2 che la soluzione formale di (44) è data dalla formula (45). Ci dobbiamo occupare della convergenza di questa serie e della stima. Se γ_s parametrizza la circonferenza di raggio $s < r$, dalla formula di Cauchy ricaviamo

$$|v_n| = \frac{|D^n \hat{v}(0)|}{n!} = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{\hat{v}(z)}{z^{n+1}} \, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^{n+1}} \|\hat{v}\|_{\infty,r} |\partial B_s| = \frac{1}{s^n} \|\hat{v}\|_{\infty,r},$$

e passando al limite per $s \to r$, si trova $|v_n| \leq r^{-n} \|\hat{v}\|_{\infty,r}$. Quindi se $|z| \leq (1-\theta)r$, per (43),

$$|\hat{u}(z)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^{-n}\|\hat{v}\|_{\infty,r}}{|\alpha - \alpha^n|} (1-\theta)^n r^n = \|\hat{v}\|_{\infty,r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\theta)^n}{|1-\alpha^{n-1}|} \leq \|\hat{v}\|_{\infty,r} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1-\theta)^n}{\delta} n^{1+\beta}.$$

Per l'esercizio 3.10 concludiamo che

$$|\hat{u}(z)| \leq \frac{c(\beta+1)}{\delta} \frac{1}{\theta^{\beta+2}} \|\hat{v}\|_{\infty,r},$$

come si voleva dimostrare. □

In base alle considerazioni generali sui problemi di coniugio, il primo passo dello schema iterativo consiste nello scegliere $u(z) = z + \hat{u}(z)$ che soddisfi (41), che in questo caso è

$$D_2 F(\alpha, \mathrm{id}) \hat{u} = -\hat{f},$$

ossia

$$\alpha \circ \hat{u} - \hat{u} \circ \alpha = -\hat{f}. \tag{46}$$

I passi successivi sono analoghi, sostituendo $\hat{f}$ con $\hat{f}_n$, quindi basterà analizzare le stime nel caso del primo passo.

Derivando la (46) e moltiplicando il risultato per z, otteniamo

$$\alpha z \hat{u}'(z) - \alpha z \hat{u}'(\alpha z) = -z \hat{f}'(z),$$

che posto $\hat{w}(z) = z\hat{u}'(z)$ e $\hat{v}(z) = -z\hat{f}'(z)$, può essere riscritta come

$$\alpha \circ \hat{w} - \hat{w} \circ \alpha = \hat{v}.$$

Perciò dal Lemma 3.9 ricaviamo

$$\|z\hat{u}'\|_{\infty,(1-\theta)r} \leq \frac{c_0}{\theta^{\beta+2}} \|z\hat{f}'\|_{\infty,r} \leq \frac{c_0}{\theta^{\beta+2}} r \|\hat{f}'\|_{\infty,r}. \tag{47}$$

Il fatto che questa ultima disuguaglianza valga per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo implica che

$$\|\hat{u}'\|_{\infty,(1-\theta)r} \leq \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}} \|\hat{f}'\|_{\infty,r}.$$

Infatti, se cosí non fosse esisterebbe $z_0 \in B_{(1-\theta)r}$, $z_0 \neq 0$, tale che

$$|\hat{u}'(z_0)| > \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}} \|\hat{f}'\|_{\infty,r},$$

e posto $s = |z_0|/(1-\theta) \in (0,r)$ si avrebbe

$$\|z\hat{u}'\|_{\infty,(1-\theta)s} \geq |z_0|\,|\hat{u}'(z_0)| = s(1-\theta)|\hat{u}'(z_0)| > \frac{c_0}{\theta^{\beta+2}} s\|\hat{f}'\|_{\infty,s},$$

contraddicendo la (47) con $r = s$.

Ponendo

$$\epsilon := \|\hat{f}'\|_{\infty,r}, \tag{48}$$

concludiamo che

$$\|\hat{u}'\|_{\infty,(1-\theta)r} \leq \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}} \epsilon, \tag{49}$$

e dato che $\hat{u}(0) = 0$,

$$\|\hat{u}\|_{\infty,(1-\theta)r} \leq \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}} \epsilon r. \tag{50}$$

Al fine di vedere dove è definita $u^{-1} \circ f \circ u$, dimostriamo il seguente:

3.11 Lemma. *Supponiamo $c_0\epsilon < (1-\theta)\theta^{\beta+3}$ e $0 < \theta < 1/4$. Allora u manda $B_{r(1-4\theta)}$ in $B_{r(1-3\theta)}$. Inoltre $u(B_{r(1-\theta)})$ contiene $B_{r(1-2\theta)}$.*

Dimostrazione. Da (50), se $z \in B_{r(1-4\theta)}$,

$$|u(z)| \leq |z| + |\hat{u}(z)| \leq r\left(1 - 4\theta + \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}}\epsilon\right) < r(1-3\theta),$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usata l'ipotesi $c_0\epsilon < (1-\theta)\theta^{\beta+3}$. Si è quindi provata la prima asserzione.

Fissato $\zeta \in B_{r(1-2\theta)}$, vogliamo dimostrare che esiste $z \in B_{r(1-\theta)}$ tale che $z + \hat{u}(z) = \zeta$, cioè un punto fisso della mappa $z \mapsto \zeta - \hat{u}(z)$. Scelto $\sigma \in [0,1)$ tale che $|\zeta| = \sigma r(1-2\theta)$, da (50) si ha per $z \in B_{r(1-\theta)}$,

$$|\zeta - \hat{u}(z)| \leq |\zeta| + |\hat{u}(z)| \leq \sigma r(1-2\theta) + \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}}\epsilon r \leq r(\sigma - 2\sigma\theta + \theta),$$

dove si è usato anche $c_0\epsilon < (1-\theta)\theta^{\beta+3}$. Dato che $\sigma < 1$ e $\theta < 1/2$, la quantità $r(\sigma - 2\sigma\theta + \theta)$ è minore di $r(1-\theta)$. Quindi la mappa $z \mapsto \zeta - \hat{u}(z)$ manda la palla chiusa di raggio $r(\sigma - 2\sigma\theta + \theta)$ in sè, e per il Teorema di Brower ha ivi un punto fisso. □

3.12 Lemma. *Se $c_0\epsilon < (1-\theta)\theta^{\beta+3}$ e $0 < \epsilon < \theta < 1/5$, allora la mappa $g = u^{-1} \circ f \circ u$ è definita su $B_{r(1-5\theta)}$. Inoltre, scritta nella forma*

$$g(z) = \alpha z + \hat{g}(z),$$

si ha

$$\|\hat{g}'\|_{\infty,r(1-5\theta)} \leq \frac{c_1}{\theta^{\beta+3}}\epsilon^2, \tag{51}$$

dove $c_1 = 25c_0/16$.

Dimostrazione. Per il Lemma 3.11, u manda $B_{(1-4\theta)r}$ in $B_{(1-3\theta)r}$, che per (48) f manda in $\overline{B_{(1-3\theta)r+\epsilon r}} \subset B_{(1-2\theta)r}$ (dato che $\epsilon < \theta$), dove u^{-1} è definito e prende valori in $B_{r(1-\theta)}$. Quindi $g : B_{r(1-4\theta)} \to B_{r(1-\theta)}$ è ben definita.

La relazione $u \circ g = f \circ u$ è equivalente a

$$\hat{g} + \hat{u} \circ g = \alpha \circ \hat{u} + \hat{f} \circ u.$$

Dato che la $\hat{u}$ risolve (46), l'identità sopra è equivalente a

$$\hat{g} = \hat{u} \circ \alpha - \hat{u} \circ (\alpha + \hat{g}) + \hat{f} \circ u - \hat{f}. \tag{52}$$

Per (49) e per le ipotesi su ϵ e θ,

$$\|\hat{u}'\|_{\infty,r(1-\theta)} \leq \frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}}\epsilon < \theta < \frac{1}{5}.$$

Quindi, per il teorema del valor medio,

$$\|\hat{u} \circ \alpha - \hat{u} \circ (\alpha + \hat{g})\|_{\infty,r(1-4\theta)} \leq \frac{1}{5}\|\hat{g}\|_{\infty,r(1-4\theta)},$$

che insieme a (52), (48), e (50) ci dà

$$\frac{4}{5}\|\hat{g}\|_{\infty,r(1-4\theta)} \leq \|\hat{f} \circ u - \hat{f}\|_{\infty,r(1-4\theta)} \leq \|\hat{f}'\|_{\infty,r}\|\hat{u}\|_{\infty,r(1-4\theta)} \leq \epsilon\frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+2}}\epsilon r.$$

La formula di Cauchy implica infine

$$\|\hat{g}'\|_{\infty,(1-5\theta)r} \leq \frac{1}{r\theta}\|\hat{g}\|_{\infty,r(1-4\theta)},$$

e dunque

$$\|\hat{g}'\|_{\infty,(1-5\theta)r} \leq \frac{5}{4}\frac{c_0}{(1-\theta)\theta^{\beta+3}}\epsilon^2.$$

Dato che $\theta < 1/5$, vale la (51) con $c_1 = 25c_0/16$. □

L'algoritmo di iterazione. Sia $\epsilon_0 > 0$ un numero piccolo, la cui grandezza sarà stabilita nel corso della dimostrazione. Dato che $\hat{f}'(0) = 0$, possiamo scegliere r cosí piccolo che

$$\|\hat{f}'\|_{\infty,r} < \epsilon_0. \tag{53}$$

Scegliamo $r_n = (r/2)(1 + 2^{-n})$, e definiamo θ_n tramite

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 - 5\theta_n.$$

Quindi

$$\theta_n = \frac{1}{10(2^n + 1)}, \tag{54}$$

e $\theta_n \leq 1/20 < 1/5$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La successione definita iterativamente da

$$\epsilon_{n+1} = \frac{c_1}{\theta_n^{\beta+3}}\epsilon_n^2,$$

tende a 0 rapidamente, purchè ϵ_0 sia sufficientemente piccolo. Infatti per (54), questa successione è maggiorata dalla successione definita iterativamente da $\epsilon_0' = \epsilon_0$ e

$$\epsilon_{n+1}' = c_2^{n+1}{\epsilon_n'}^2,$$

se c_2 è sufficientemente grande, e posto $\delta_n = c_2^{n+2}\epsilon'_n$ si ha $\delta_{n+1} = \delta_n^2$, quindi $\delta_n = (\delta_0)^{2^n}$ e

$$\epsilon_n \leq \epsilon'_n = \frac{1}{c_2^{n+2}}(c_2^2\epsilon_0)^{2^n}. \tag{55}$$

Definiamo iterativamente

$$u_n = \mathrm{id} + \hat{u_n} : B_{r_{n+1}} \to B_{r_n},$$
$$f_{n+1} = \alpha + \hat{f}_{n+1} = u_n^{-1} \circ f_n \circ u_n : B_{r_{n+1}} \to \mathbb{C},$$

tramite $f_0 = f$ e

$$\alpha \circ \hat{u}_n - \hat{u}_n \circ \alpha = -\hat{f}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostreremo per induzione su n che se ϵ_0 è sufficientemente piccolo, u_{n-1} e f_n sono ben definite e vale

$$\|\hat{f}_n\|_{\infty,r_n} \leq \epsilon_n. \tag{56}$$

Per $n = 0$, questa è l'ipotesi (53). Supponiamo che u_{n-1} e f_n siano ben definite e che valga (56). Per (55), se ϵ_0 è sufficientemente piccolo si ha

$$c_0\epsilon_n < (1-\theta_n)\theta_n^{\beta+3},$$

quindi è possibile applicare i Lemmi 3.11 e 3.12: u_n è ben definita da $B_{r_n(1-5\theta_n)} = B_{r_{n+1}}$ in B_{r_n}, $f_{n+1} = u_n^{-1} \circ f_n \circ u_n$ è ben definita su $B_{r_{n+1}}$, e vale

$$\|\hat{f}'_{n+1}\|_{\infty,r_{n+1}} \leq \frac{c_1}{\theta_n^{\beta+3}}\epsilon_n^2 = \epsilon_{n+1}.$$

Il passo induttivo è pertanto dimostrato.

Se poniamo

$$v_n = u_0 \circ u_1 \circ \cdots \circ u_{n-1} : B_{r_n} \to B_{r_0} = B_r,$$

si ha

$$f_n = v_n^{-1} \circ f \circ v_n. \tag{57}$$

Mostriamo che la successione (v_n) converge uniformemente in $B_{r/2}$. Infatti derivando in un punto $z \in B_{r_n}$, troviamo

$$v'_n(z) = \prod_{j=0}^{n-1} u'_j(z_j) = \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \hat{u}'_j(z_j)),$$

dove $z_j = u_{j+1} \circ \cdots \circ u_{n-1}(z) \in B_{r_{j+1}}$. Per le stime (49) e (50), esiste una costante c_3 tale che

$$\|\hat{u}_j\|_{C^1(B_{r_{j+1}})} \leq c_3^j\epsilon_j.$$

Dato che per (56),

$$\log\prod_{j=0}^{n-1}(1 + |\hat{u}'_j(z_j)|) = \sum_{j=0}^{n-1}\log(1 + |\hat{u}'_j(z_j)|) \leq \sum_{j=0}^{n-1}|\hat{u}'_j(z_j)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} c_3^j\epsilon_j,$$

e dato che l'ultima serie converge se ϵ_0 è sufficientemente piccolo (per (55)), esiste una costante c_4 tale che

$$\|v'_n\|_{\infty,r_n} \leq c_4.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\|v_{n+1} - v_n\|_{\infty,r/2} &= \|v_n \circ u_n - v_n\|_{\infty,r/2} \leq \|v_n \circ u_n - v_n\|_{\infty,r_{n+1}} \\ &\leq \|v'_n\|_{r_n,\infty}\|u_n - \mathrm{id}\|_{\infty,r_{n+1}} \leq c_4\|\hat{u}_n\|_{\infty,r_{n+1}} \leq c_4c_3^n\epsilon_n.\end{aligned}$$

Questa stima, insieme alla convergenza rapida di (ϵ_n) a 0 (se ϵ_0 è sufficientemente piccolo, per (55)), implica che (v_n) converge uniformemente su $B_{r/2}$ ad una funzione olomorfa h. Per (56), la successione (f_n) converge uniformemente all'applicazione lineare $z \mapsto \alpha z$ in $B_{r/2}$, quindi per (57),

$$\alpha z = h^{-1} \circ f \circ h(z), \quad \forall z \in B_{r/2},$$

e h è il coniugio cercato. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

3.13 Teorema. (Siegel) *Sia f una funzione olomorfa in un intorno di* 0, *tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = \alpha = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Se τ è un numero diofantino, cioè vale (42), allora f è olomorficamente coniugata alla sua parte lineare $z \mapsto \alpha z$ in un intorno di 0.*

La dimostrazione che abbiamo presentato è dovuta a Moser [Mos66]. La dimostrazione originale di Siegel [Sie42] è più diretta ma fa uso di stime più delicate. Si veda anche [Mar00] per una dimostrazione dovuta a Yoccoz, che ha aperto la strada al problema di indebolire la condizione diofantina, fino a caratterizzare completamente quegli esponenti τ per cui si ha sempre il coniugio olomorfo, [Yoc95].

Riferimenti bibliografici

[HW79] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, New York, 1979.

[Mar00] S. Marmi, *An introduction to small divisors problems*, Corso di dottorato, Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa - Istituti editoriali e poligrafici internazionali, Pisa, 2000.

[Mos66] J. Moser, *A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations - II*, Ann. Scuola Normale Sup. **20** (1966), 499–535.

[Sie42] G. L. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. **43** (1942), 607–612.

[Yoc95] J. C. Yoccoz, *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques*, Astérisque **231** (1995), 3–88.