Proposte seminari

Teoremi di coniugio per diffeomorfismi del cerchio. Il problema di stabilire se un diffeomorfismo del cerchio è coniugato ad una rotazione [Arn61] è per molti versi simile al problema di linearizzare una funzione olomorfa, studiato nella sezione 3.6. Usando la *derivata Schwarziana* è però possibile evitare l'uso di teoremi di inversione alla Nash-Moser, riconducendosi al teorema di inversione classico. Si presenti la dimostrazione di Michel Herman del teorema di Arnold, contenuta nella prima parte di [Her85].

Calcolo differenziale in spazi di Frechet. Uno spazio di Frechet è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, completo, e metrizzabile. La non metrizzabilità del duale fa sí che il calcolo differenziale su spazi di Frechet sia sostanzialmente diverso dal calcolo in spazi di Banach. Si presentino le sezioni I.1, I.2, e I.3 di [Ham82] (si consiglia di guardare anche la sezione I.4 ed i controesempi in I.5.5).

Il teorema della funzione implicita in spazi di Frechet. Gli argomenti alla Nash-Moser visti nel capitolo 3 permettono di dimostrare un teorema di funzione implicita per mappe di una certa classe tra spazi di Frechet. La formulazione più elegante, e più categoriale, è dovuta a Richard Hamilton. Si presentino i risultati della Parte II e della Parte III.1 di [Ham82].

Problema di Plateau per superfici parametriche. Il problema di Plateau si persta bene ad essere studiato con metodi variazionali. Si presentino risultati di esistenza e regolarità dal volumetto di Struwe, [Str89].

Embedding di superfici con curvatura positiva. Si presenti la dimostrazione di un classico risultato di Louis Nirenberg: ogni superficie compatta orientabile con curvatura strettamente postiva può essere immersa (embedded) isometricamente in $\mathbb{R}^3$ come bordo di un aperto convesso. La dimostrazione originale è in [Nir53]. In alternativa, si può presentare questo risultato come applicazione del teorema di inversione in spazi di Frechet di Hamilton (seminario precedente), seguendo [Ham82], sezione III.2.1.

Teoria KAM. In un sistema Hamiltoniano completamente integrabile, lo spazio delle fasi è foliato da tori invarianti, su cui il flusso è una traslazione di un vettore (frequenza) $\omega \in \mathbb{R}^n$. La teoria KAM (dai nomi dei matematici Kolmogorov, Arnold e Moser), studia perturbazioni piccole di sistemi Hamiltoniani completamente integrabili: se ω soddisfa una condizione di tipo diofantino (l'equivalente multi-dimensionale della condizione vista nella sezione 3.6), il toro di frequenza ω sopravvive. Si presenti la dimostrazione nel formalismo Lagrangiano, contenuta in [SZ89].

Teorema delle 3 geodetiche chiuse. Si presenti la dimostrazione del seguente risultato classico di Lusternik e Schnirelman [LL29]: sulla sfera bidimensionale munita di una metrica qualsiasi esistono tre geodetiche chiuse senza auto-intersezioni. Per una dimostrazione moderna si veda [Kli82].

Categoria di Lusternik-Schnirelman e geodetiche. La categoria di Lusternik-Schnirelman e' un invariante topologico che stima dal basso il numero di punti critici di un funzionale. Se ne discutano le proprietà, dimostrando il seguente teorema di Serre: su una varietà Riemanniana completa non contrattile esistono infinite geodetiche che congiungono due punti arbitrari [Sch64], [Pal66].

Infinite geodetiche chiuse su S^2. Bangert e Franks hanno dimostrato che su S^2 munita di una metrica qualsiasi esistono infinite geodetiche chiuse. Lo strumento fondamentale è il seguente risultato di Franks: un omeomorfismo del disco aperto in sè che conserva la misura e che ha almeno due punti fissi ha necessariamente infiniti punti periodici [Fra92]. Si presenti la dimostrazione di questo fatto insieme all'argomento di Bangert [Ban93] per arrivare alle infinite geodetiche su S^2.

Caratteristiche chiuse su ipersuperfici. Sia S un'ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^{2n}$, munito della struttura complessa data dall'identificazione $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Una curva caratteristica su S è una curva sempre tangente a $i\nu$, dove ν è la normale a S. Un problema classico è l'esistenza di caratteristiche chiuse. Si presenti la dimostrazione dell'esistenza di una caratteristica chiusa su una ipersuperficie S compatta e "generica" ([HZ94] capitolo 4, [Str00] sezione II.8).

Riferimenti bibliografici

[Arn61] V. I. Arnold, *Small denominators. I. Mapping the circle onto itself*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **25** (1961), 21–86.

[Ban93] Victor Bangert, *On the existence of closed geodesics on two-spheres*, Internat. J. Math. **4** (1993), 1–10.

[Fra92] J. Franks, *Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms*, Invent. Math. **108** (1992), 403–418.

[Ham82] R. Hamilton, *The inverse funtion theorem of Nash and Moser*, Boll. Amer. Math. Soc. **7** (1982), 65–222.

[Her85] M. R. Herman, *Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number*, Bol. Soc. Bras. Mat. **16** (1985), 45–83.

[HZ94] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[Kli82] W. Klingenberg, *Riemannian geometry*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1982.

[LL29] R. Schnirelmann L. Lusternik, C. R. Acad. Science Paris **189** (1929), 269–271.

[Nir53] L. Nirenberg, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 337–394.

[Pal66] R. S. Palais, *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology **5** (1966), 115–132.

[Sch64] J. T. Schwartz, *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, Comm. Pure Apll. Math. **17** (1964), 307–315.

[Str89] M. Struwe, *Plateau's problem and the calculus of variations*, Princeton University Press, Princeton, 1989.

[Str00] ______, *Variational methods*, third ed., Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[SZ89] D. Salamon and E. Zehnder, *KAM theory in configuration space*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), no. 1, 84–132.