

Soluzioni esercizi 29.9.2011

1) In molti casi diamo solamente la risposta, senza procedimento (per il quale si vedano gli appunti delle lezioni)

- $\max A = 1 = \sup A$, $\min A = -\frac{1}{2} = \inf A$
- $\frac{2m+1}{m-1} = 2 + \frac{3}{m-1} \Rightarrow \max B = \sup B = 5$, $\inf B = 2$, $\nexists \min B$
- $\sup C = +\infty$, $\inf C = -\infty$ ($\Rightarrow \nexists \max$ e $\min$)
- $\sqrt{m^2+1} - m = \frac{(\sqrt{m^2+1} - m)(\sqrt{m^2+1} + m)}{\sqrt{m^2+1} + m} = \frac{m^2+1 - m^2}{\sqrt{m^2+1} + m} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1} + m}$

Essendo il reciproco di una successione strettamente crescente,

$d_m = \frac{1}{\sqrt{m^2+1} + m}$ è strettamente decrescente (ovvero $d_{m+1} < d_m$

$\forall m \in \mathbb{N}$). Quindi $\max D = \sup D = d_0 = 1$, $\inf D = 0$
e $\nexists \min D$.

- $\sup E = +\infty$, $\min E = \inf E = 3$.
- $\sup F = \max F = 2$, $\min F = \inf F = 0$.

2) Dalla disuguaglianza (A-G), si ha

$$a+b = 2 \frac{a+b}{2} \geq 2\sqrt{ab} = 2 \Rightarrow \inf A \geq 2$$

per $a=b=1$ si ha $ab=1$ e $a+b=2 \Rightarrow \min A = \inf A = 2$

$\sup A = +\infty$. Infatti, $\forall M > 0$ scelga $a=M$ e $b=\frac{1}{M}$:

si ha $a+b \in A$ e $a+b > a = M$, per cui A

non è limitata superiormente. In particolare, $\nexists \max A$

$$3) \cdot \sum_{k=0}^m 2^k x^{k+1} = x \sum_{k=0}^m (2x)^k = x \frac{(2x)^{m+1} - 1}{2x - 1} = x \frac{2^{m+1} x^{m+1} - 1}{2x - 1}$$

$$\text{se } x \neq \frac{1}{2}; \text{ per } x = \frac{1}{2} \quad \sum_{k=0}^m 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m 1 = \frac{m+1}{2}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^m (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^m k - \sum_{k=1}^m 1 = 2 \frac{m(m+1)}{2} - m = m^2$$

$$\cdot \sum_{h=k}^m x^h = x^k \sum_{h=k}^m x^{h-k} = x^k \sum_{j=0}^{m-k} x^j = x^k \frac{x^{m-k+1} - 1}{x - 1} \quad \text{se } x \neq 1$$

Se $n=1$, $\sum_{h=K}^n 1^h = n-K+1$.

4) Dimostreremo le prime 2 identità per induzione:

• $m=1$ $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ OK

Se $\sum_{h=1}^m h^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ per un certo $m \geq 1$, allora

$$\sum_{h=1}^{m+1} h^2 = (m+1)^2 + \sum_{h=1}^m h^2 = (m+1)^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{(m+1)(6m+6+2m^2+m)}{6}$$

$$= \frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

che è la formula voluta per $m+1$.

• $m=1$ $1 = 1$ OK

Se $\sum_{h=1}^m h^3 = \left(\sum_{h=1}^m h\right)^2$ per un certo $m \geq 1$, allora

$$\sum_{h=1}^{m+1} h^3 = (m+1)^3 + \sum_{h=1}^m h^3 = (m+1)^3 + \left(\sum_{h=1}^m h\right)^2$$

$$\left(\sum_{h=1}^{m+1} h\right)^2 = \left(m+1 + \sum_{h=1}^m h\right)^2 = (m+1)^2 + \left(\sum_{h=1}^m h\right)^2 + 2(m+1) \sum_{h=1}^m h$$

$$= (m+1)^2 + \left(\sum_{h=1}^m h\right)^2 + 2(m+1) \frac{m(m+1)}{2} = \left(\sum_{h=1}^m h\right)^2 + (m+1)^3$$

Quindi l'identità per $m+1$ vale.

• Usando formule dimostrate in precedenza,

$$\sum_{h=1}^m (2h-1)^2 = \sum_{h=1}^m (4h^2 - 4h + 1) = 4 \sum_{h=1}^m h^2 - 4 \sum_{h=1}^m h + \sum_{h=1}^m 1$$

$$= 4 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - 4 \frac{m(m+1)}{2} + m = \frac{2m(m+1)(2m+1) - 6m(m+1) + 3m}{3}$$

$$= \frac{m(4m^2 + 6m + 2 - 6m - 6 + 3)}{3} = \frac{m(4m^2 - 1)}{3}$$

5) Sia $f(x) = x - x^3$. Allora $x_{n+1} = f(x_n)$ e dato che $x_0 = a \in]0, 1[$, per il principio di induzione basta dimostrare che

$$f([0, 1]) \subset [0, 1]$$

$$\text{Ma se } 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 < 1$$

Quindi $f(x) = x(1 - x^2) \in [0, 1]$ essendo il prodotto di due numeri in $[0, 1]$.

6) La disuguaglianza da dimostrare è equivalente a

$$\sqrt[n]{x} \leq 1 + \frac{x-1}{n}$$

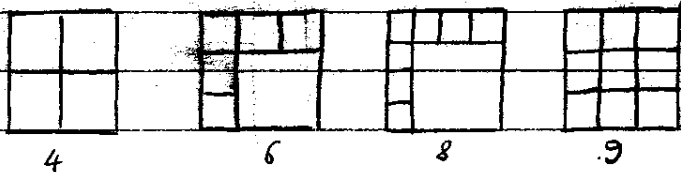
Dato che $x \geq 1$, anche i membri sono positivi. Quindi possiamo elevare alla n e la disuguaglianza è equivalente a

$$x \leq \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n$$

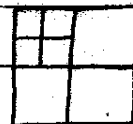
Ma questa segue immediatamente da Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{x-1}{n} = 1 + x - 1 = x \quad \square$$

7) Le soluzioni con 4, 6, 8, 9 sono:



È anche possibile dividerlo in 7 quadrati:



In effetti, se è possibile dividerlo in n quadrati, è anche possibile dividerlo in $n+3$ quadrati (si divide uno dei quadrati in 4). Partendo dalle soluzioni con 6, 7, 8 quadrati, troviamo quindi soluzioni $\forall n \geq 6$.

A queste si aggiungono le soluzioni per $n=1$ e $n=4$, dunque gli unici numeri per cui non è possibile sono 2, 3, 5.

8) a) Partiamo dall'identità

$$x - x_j = (x - \bar{x}) + (\bar{x} - x_j)$$

Elevando ambo i membri al quadrato, troviamo

$$(x - x_j)^2 = (x - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x_j)^2 + 2(x - \bar{x})(\bar{x} - x_j)$$

Sommando su tutti i j da 1 a n , otteniamo

$$\sum_{j=1}^n (x - x_j)^2 = n(x - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - x_j)^2 + \sum_{j=1}^n 2(x - \bar{x})(\bar{x} - x_j)$$

L'ultima sommatoria vale:

$$\sum_{j=1}^n 2(x - \bar{x})(\bar{x} - x_j) = 2(x - \bar{x}) \sum_{j=1}^n (\bar{x} - x_j) =$$

$$= 2(x - \bar{x}) \left(n\bar{x} - \sum_{j=1}^n x_j \right) = 2n(x - \bar{x}) \left(\bar{x} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) = 0$$

Quindi $\sum_{j=1}^n (x - x_j)^2 = n(x - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (\bar{x} - x_j)^2$, c.v.d. $\square$

b) Per il punto a), $Q(x) = \sum_{j=1}^n (\bar{x} - x_j)^2 + n(x - \bar{x})^2$,

Il primo termine non dipende da x e il secondo è minimo per $x = \bar{x}$. Quindi $\bar{x}$ è il punto di minimo di Q , ossia la media aritmetica tra $x_1, \dots, x_n$ è il valore più plausibile della grandezza misurata.

9) Dalle inclusioni $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$ seguono le disuguaglianze $\sup A \cap B \leq \sup A$ e $\sup A \cap B \leq \sup B$, da cui $\sup A \cap B \leq \min \{ \sup A, \sup B \}$

In generale, non vale l'uguaglianza: per esempio con

$$A = \{0, -1\} \text{ e } B = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} \text{ si ha}$$

$$A \cap B = \{-1\}, \text{ quindi } \sup A \cap B = -1, \text{ mentre}$$

$$\sup A = \sup B = 0 \Rightarrow \min \{ \sup A, \sup B \} = 0 \quad \square$$