

○ Soluzioni 27.3.2012

$$1. a) \sqrt[n]{\frac{1}{n 2^n}} = \frac{1}{2 \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$ è 2

$$b) \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 3$$

Quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n$ è $\frac{1}{3}$

$$c) \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$$

Quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ è $+\infty$

$$d) \sqrt[n]{|1 + (-2)^n|} \leq \sqrt[n]{1 + 2^n} = 2 \sqrt[n]{2^{-n} + 1} \rightarrow 2$$

$$\sqrt[n]{|1 + (-2)^n|} \geq \sqrt[n]{2^n - 1} = 2 \sqrt[n]{1 - 2^{-n}} \rightarrow 2$$

Quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^n$ è $\frac{1}{2}$

$$e) \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}} = \sqrt[n]{\frac{n-1}{n+1}} \rightarrow 1$$

Quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} x^n$ è 1

$$f) \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 2$$

Quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}} x^n$ è $\frac{1}{2}$

$$2) a) \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{(2x)^m}{(x + \frac{1}{x})^m} = \sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{2x^2}{x^2+1} \right)^m$$

e dato che $\sum_{m=0}^{\infty} m z^m = \frac{z}{(1-z)^2}$ (lezione 26.03.2012)
si trova

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{2x^2}{x^2+1} \right)^m = \frac{2x^2}{x^2+1} \left(1 - \frac{2x^2}{x^2+1} \right)^{-2} = \frac{2x^2(x^2+1)}{(1-x^2)^2}$$

$$b) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{m^2+m} 2^{-m} x^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2x^2} \right)^m$$

e dato che $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} z^m = -\log(1-z)$ (lezione 26.03.2012)
si trova

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2x^2} \right)^m &= -\log \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) = -\log \frac{2x^2-1}{2x^2} = \\ &= x^2 \log 2 - \log(2x^2-1) \end{aligned}$$

3) La serie converge per $x \in]-1, 1[$. Derivando l'identità

$$\sum_{m=0}^{\infty} m x^m = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{si trova } \sum_{m=0}^{\infty} m^2 x^{m-1} &= \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \\ &= \frac{1+x^2-2x+2x-2x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \sum_{m=0}^{\infty} m^2 x^m = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$4) \log(1+x-2x^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} (x-2x^2)^m =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} x^m (1-2x)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (-2x)^k$$

con la convenzione $\binom{m}{k} = 0$ se $k > m$,

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \binom{m}{k} (-1)^k 2^k x^{m+k}$$

Sostituzione $m = m+k \geq 1$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-k}}{m-k} \binom{m-k}{k} (-1)^k 2^k x^m = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

dove $a_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-k}}{m-k} \binom{m-k}{k} (-1)^k 2^k =$

$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{m-k} \binom{m-k}{k} = (-1)^m \sum_{0 \leq k \leq \frac{m}{2}} \frac{2^k}{m-k} \binom{m-k}{k}$$

5. Dalla sviluppo di arctg x in $x=1$ sappiamo che

$$\pi = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Detta $S_k = 4 \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{2m+1}$ la somma parziale k-esima,

dal fatto che si tratta di una serie a segni alterni con termine generale di valore assoluto decrescente, sappiamo che

$$S_{\text{dispari}} \leq \pi \leq S_{\text{pari}}$$

Ma $S_{2K} - S_{2K-1} = \frac{4}{4K+1} < 10^{-6}$ per $K \geq 10^6$.

Quindi $S_{10^6-1} = 4 \sum_{m=0}^{10^6-1} \frac{(-1)^m}{2m+1}$ differisce da π

meno di 10^{-6}

$$6. \quad \frac{\pi}{6} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2m+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1) 3^m}$$

Detta $S_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(2m+1) 3^m}$ si ha

$$S_{2k-1} < \pi < S_{2k}$$

$$S_{2k} - S_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(4k+1) 3^{2k}} < 10^{-6} \quad \text{se}$$

$$\sqrt{3} (4k+1) 9^k > 10^6 \quad (*)$$

Dato che $(4 \cdot 5 + 1) 9^5 = 1240029$, $(*)$ è vera già per $k=5$.

Perciò

$$S_9 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^9 \frac{(-1)^m}{(2m+1) 3^m}$$

differsire da π per meno di 10^{-6} . Si noti che questa approssimazione richiede molti meno termini di quella dell'esercizio 5.

7. Sappiamo che l'alternante $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ converge in $[-1, 1]$.

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

Dimostriamo per induzione che

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+k)(m+k-1)\dots(m+1) a_{m+k} x^m \quad (*)$$

da cui seguirà $f^{(k)}(0) = k! a_k$

(*) è vera per $k=1$. Se la supponiamo vera per $k-1$, troviamo:

$$\begin{aligned}
 f^{(k)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x) = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} (m+k-1) \dots (m+1) a_{m+k-1} x^m \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+k-1) \dots (m+1) a_{m+k-1} m x^{m-1} = \quad (m = m-1) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+k) \dots (m+2)(m+1) a_{m+k} x^m
 \end{aligned}$$

che dimostra (*).

8) a) Dagli sviluppi di e^x , $\sin x$ e $\cos x$:

$$e^x + \sin x + \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\text{Data che } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \text{ si ha}$$

semplici fissiamo i termini con coefficiente negativo nello sviluppo di $\sin x$ e $\cos x$ e si ottiene

$$\begin{aligned}
 e^x + \sin x + \cos x &= 2 \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ pari}}}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 2 \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ pari}}}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\
 &= 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m}}{(4m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \right)
 \end{aligned}$$

Per $x=1$ si ottiene la tesi.

b) Analogamente

$$\begin{aligned}
 e^x - \sin x - \cos x &= 2 \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 2 \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ dispari}}}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \\
 &= 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+3}}{(4m+3)!} \right)
 \end{aligned}$$

e per $x=1$ si ottiene la tesi.