

Soluzioni esercizi 24.11.2011

$$1) \quad 3\sqrt{2} e^{i\pi/4} = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3 + 3i$$
$$\operatorname{Re} 3\sqrt{2} e^{i\pi/4} = 3 = \operatorname{Im} 3\sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$\operatorname{Re} (2e^{2\pi/3 i}) = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\operatorname{Im} (2e^{2\pi/3 i}) = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$4e^{-2\pi/3 i} = 4 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 4 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\operatorname{Re} 4e^{-2\pi/3 i} = -2, \quad \operatorname{Im} 4e^{-2\pi/3 i} = -2\sqrt{3}$$

2) Risultato $(u_j w)^m = u_j^m w^m = 1 \cdot z = z$, quindi ciascuna $u_j w$ è una radice m -esima di z , per ogni $j = 1, 2, \dots, m$. Dato che sono m , esse sono tutte e sole le radici m -esime di z .

3) $i^6 = (-1)^3 = -1$, dunque i è una radice sesta di -1 . Per l'esercizio 2), tutte le radici sesta di -1 si trovano moltiplicando i per le 6 radici sesta di 1 , che sono

$$1, \quad e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad e^{i\pi} = -1$$
$$e^{4i\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad e^{5i\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Dunque le radici sesta di -1 sono:

$$\bullet \quad i$$

$$\bullet \quad i \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\bullet \quad i \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\bullet \quad -i$$

$$\bullet \quad i \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\bullet \quad i \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$4) |5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\theta = \arg(5 + 12i) = \arctg \frac{12}{5} = \arccos \frac{5}{13} = \arcsin \frac{12}{13}$$

Dato che le radici quadrate di 1 sono ± 1 , le radici quadrate di $5 + 12i$ sono $\pm \sqrt{13} e^{\frac{\theta}{2}i}$

Osserviamo che, per le formule di bisezione,

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 5/13}{2}} = \sqrt{\frac{18}{26}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 5/13}{2}} = \sqrt{\frac{8}{26}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Dunque le radici quadrate di $5 + 12i$ sono

$$\pm \sqrt{13} e^{\frac{\theta}{2}i} = \pm \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}i \right) = \pm (3 + 2i)$$

5) a) Risolviamo $(z - \bar{z})^3 = i$. Osserviamo che

$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$. Quindi l'equazione diventa

$$(2i \operatorname{Im} z)^3 = i \Leftrightarrow 8i^3 (\operatorname{Im} z)^3 = i \Leftrightarrow -8i (\operatorname{Im} z)^3 = i$$

$$\Leftrightarrow -8 (\operatorname{Im} z)^3 = 1 \Leftrightarrow (\operatorname{Im} z)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$$

Dunque le soluzioni sono tutti e soli i numeri complessi con parte immaginaria $-\frac{1}{2}$.

$$b) z^2 + (i - 1)z - i = 0$$

Usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado.

$$z = \frac{1 - i \pm \sqrt{(i - 1)^2 + 4i}}{2}$$

dove $\sqrt{w}$ indica una delle 2 radici quadrate di w .

$$(i-1)^2 + 4i = -1 + 1 - 2i + 4i = (-i+1)^2$$

Quindi

$$z = \frac{1-i \pm (i+1)}{2} = \frac{1}{-i}$$

c) $z^4 = \bar{z}^3$

$$z^4 = \bar{z}^3 \Rightarrow |z^4| = |\bar{z}^3| \Leftrightarrow |z|^4 = |z|^3$$

quindi $|z|$ vale 0 oppure 1. Una soluzione è $z=0$.

Chiamiamo le soluzioni di modulo 1. Se z è una qualsiasi soluzione, moltiplicando l'equazione per z^3 troviamo

$$z^7 = \bar{z}^3 z^3 = |z|^6 = 1$$

Quindi le soluzioni di modulo 1 sono tutte e sole le radici settime di 1, ossia

$$1, e^{\frac{2\pi i}{7}}, e^{\frac{4\pi i}{7}}, e^{\frac{6\pi i}{7}}, e^{\frac{8\pi i}{7}}, e^{\frac{10\pi i}{7}}, e^{\frac{12\pi i}{7}}$$

d) $z^3 = i z \bar{z} \Leftrightarrow z^3 = i |z|^2$

Passando ai moduli, questa equazione implica

$$|z|^3 = |i z|^2 \Leftrightarrow |z|^3 = |z|^2, \text{ da cui}$$

$|z|=0$ oppure $|z|=1$. Una soluzione è $z=0$.

Per le soluzioni di modulo 1 l'equazione diventa

$$z^3 = i$$

Quindi le radici cubiche di i sono tutte e sole le soluzioni di modulo 1.

Dato che $i = e^{\frac{\pi i}{2}}$, le radici cubiche di i sono:

$$e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; e^{\frac{\pi}{6}i} e^{\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$e^{\frac{\pi}{6}i} e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$$

Riassumendo, le soluzioni sono:

$$0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -i$$

$$e) (z+1)^4 - (z-1)^4 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^4 = (z-1)^4$$

ovvero $z+1$ deve coincidere con una radice quarta di $(z-1)^4$. Una di queste è sicuramente $z-1$, quindi, dato che le radici quarte di 1 sono $1, i, -1, -i$, le radici quarte di $z-1$ sono

$$z-1 ; i(z-1) ; 1-z ; i(1-z)$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione proposta è l'unione delle soluzioni delle 4 equazioni:

$$z+1 = z-1$$

$$z+1 = i(z-1)$$

$$z+1 = 1-z$$

$$z+1 = i(1-z)$$

La prima equazione non ha soluzioni.

La seconda equivale a $(1-i)z = -i-1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i-1}{1-i} = \frac{(-i-1)(1+i)}{1-i^2} = \frac{-i+1-1-i}{2} = -i$$

La terza equivale a $2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$

La quarta equivale a $(1+i)z = i-1$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{1+i^2} = \frac{i+1-1-i}{2} = i$$

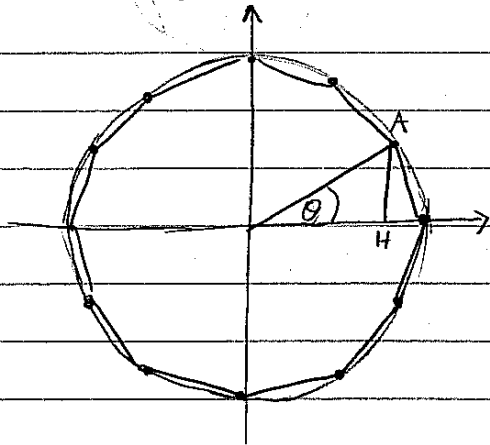
Quindi le soluzioni sono $-i, 0, i$

6) a) Per $m \rightarrow \infty$, risulta $\frac{\pi}{m} \rightarrow 0$, dunque

$$m \sin \frac{\pi}{m} = \pi \frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} = \pi \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}} \rightarrow \pi \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b) Inscriviamo nella circonferenza unitaria il poligono regolare con $2m$ lati, con un vertice in $(1, 0)$: si veda la figura, dove $m = 6$.



L'angolo θ vale $\frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}$

Allora $AH = \sin \theta = \sin \frac{\pi}{m}$

Ma AH è la metà del lato del poligono con m lati inscritto nella circonferenza che misura quindi $2 \sin \frac{\pi}{m}$

Ne segue che il perimetro del poligono con m lati inscritto nella circonferenza vale

$$2m \sin \frac{\pi}{m}$$

(Per il punto a), questo perimetro tende a 2π per $m \rightarrow \infty$, cosa che non stupisce, dato che al tendere di m all'infinito il poligono approssima in modo sempre più preciso la circonferenza.)

c) Per la formula di bisezione del coseno:

$$\cos \frac{\pi}{2^1} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2^2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{2^3} = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Supponendo per induzione che

$$\cos \frac{\pi}{2^{m-1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$$

dove sotto radice compaiono $m-2$ cifre 2, troviamo

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2^m} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \pi/2^{m-1}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_{m-2 \text{ volte } 2}} \end{aligned}$$

e adesso sotto radice ci sono $m-1$ cifre 2.

Questo dimostra la formula per il coseno.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2^m} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/2^{m-1}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}_{m-2 \text{ volte } 2}} \end{aligned}$$

e adesso sotto radice il 2 compare $m-1$ volte.

Questo dimostra la formula per il seno.

d) Dai punti a) e c)

$$\begin{aligned} \pi & \stackrel{(a)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \sin \pi}{2^{n+1}} \stackrel{(c)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}_{n \text{ volte } 2} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}_{n \text{ volte } 2} \end{aligned}$$

7) a) I punti x, y, z sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se la rotazione antioraria di $\frac{\pi}{3}$ e centro z manda x in y , oppure y in x . Questa rotazione è la funzione che manda w in $e^{\frac{\pi}{3}i}(w-z) + z$.

Perciò x, y, z sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$y = e^{\frac{\pi}{3}i}(x-z) + z$$

oppure

$$x = e^{\frac{\pi}{3}i}(y-z) + z$$

o sia se e solo se

$$(1) \quad (y - e^{\frac{\pi}{3}i}(x-z) - z)(x - e^{\frac{\pi}{3}i}(y-z) - z) = 0$$

Sia ora $u = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ una radice terza di 1. Risulta
 $-u^2 = -e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\pi i} e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{7\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{3}i}$

ossia

$$(2) \quad e^{\frac{\pi}{3}i} = -u^2$$

Inoltre $0 = u^3 - 1 = (u-1)(u^2+u+1)$ e dato che $u-1 \neq 0$ si ha

$$(3) \quad u^2 + u + 1 = 0$$

Grazie a (2), (1) si riscrive come:

$$(y + u^2(x - z) - z)(x + u^2(y - z) - z) = 0$$

$\Downarrow$

$$(y + u^2x - z(u^2+1))(x + u^2y - z(u^2+1)) = 0$$

e dato che per (3), $u^2+1 = -u$, si ha

$$(y + u^2x + uz)(x + u^2y + uz) = 0$$

da cui, sviluppando

$$xy + u^2y^2 + uyz + u^2x^2 + u^4xy + u^3xz + uzx + u^3zy + u^2z^2 = 0$$

ossia

$$(4) \quad u^2(x^2 + y^2 + z^2) + (u^4+1)xy + (u+u^3)yz + (u+u^3)zx = 0$$

Da $u^3 = 1$ e da (3), riceviamo

$$u^4+1 = u+1 = -u^2, \quad u+u^3 = u+1 = -u^2$$

per cui (4) equivale a

$$u^2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

e dividendo per u^2 si ha la tesi

b) Le posizioni di A, B e C al tempo t sono

$$A(t) = (t, t), \quad B(t) = (2t, 1), \quad C(t) = (1, 2t)$$

che in notazione complessa diventano i numeri

$$x = t + it, \quad y = 2t + i, \quad z = 1 + 2ti$$

Per il punto a), x, y, z sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se:

$$(t+it)^2 + (2t+i)^2 + (1+2ti)^2 - (t+it)(2t+i) - (2t+i)(1+2ti) - (1+2ti)(t+it) = 0$$

da cui, sviluppando:

$$\begin{aligned} t^2 + 2it^2 - t^2 + 4t^2 + 4ti - 1 + 1 + 4ti - 4t^2 \\ - 2t^2 - it - 2it^2 + t - 2t - 4t^2i - i + 2t \\ - t - it - 2t^2i + 2t^2 = 0 \end{aligned}$$

e semplificando

$$-6it^2 + 6it - i = 0$$

ovvero

$$6t^2 - 6t + 1 = 0$$

che ha radici

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Questi sono gli istanti in cui i punti sono i vertici di un triangolo equilatero.