Soluzioni esercizi 22.9.2011

1) a) Sviluppando il quadrato, la disuguaglianza proposta è equivalente a $a^2+b^2+2ab \leq 2a^2+2b^2$, che a sua volta equivale a $0 \leq a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$, che è vera $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

b) Supponiamo $x>0$. La disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica applicata a x e $\frac{1}{x}$ dà
$$\frac{x+1/x}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1,$$ che equivale a $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$.
Quindi
$$\left|x+\frac{1}{x}\right| = x+\frac{1}{x} \geqslant 2$$ che è la disuguaglianza richiesta.
Se $x<0$, si ha: $x+1/x<0$, da cui
$$\left|x+\frac{1}{x}\right| = -\left(x+\frac{1}{x}\right) = (-x)+\frac{1}{-x} \geqslant 2$$
dove abbiamo usato la disuguaglianza già dimostrata applicata al numero positivo $-x$.

c) Se $a=0$ la disuguaglianza è banalmente vera, quindi supponiamo $a>0$. Applichiamo la disuguaglianza del punto b) al numero $x/\sqrt{a}$, ottenendo
$$\left|\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x}\right| \geqslant 2$$
Moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{a}$ si trova $\left|x+\frac{a}{x}\right| \geqslant 2\sqrt{a}$

d) A lezione abbiamo dimostrato la disuguaglianza
$$(*) \qquad xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2 \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$
Perciò
$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \overset{(*)}{\leq}$$
$$\leq x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2) = 3(x^2+y^2+z^2)$$
e dividendo per 3 si ha la tesi

e) Tutte le espressioni in gioco sono invarianti per scambio di a con b, quindi possiamo supporre $a \leqslant b$.
Allora $a^{-1} \geqslant b^{-1} \Rightarrow a^{-1}+b^{-1} \leqslant 2a^{-1} \Rightarrow$
$$\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \geqslant \frac{2}{2a^{-1}} = a = \min\{a,b\}$$ che dimostra la prima disuguaglianza

Analogamente, $a \le b \Rightarrow a^2 \le b^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \le \frac{b^2+b^2}{2} = b^2$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \sqrt{b^2} = b = \max\{a,b\}$ e l'ultima disuguaglianza è dimostrata.

La terza disuguaglianza è la disuguaglianza aritmetico-geometrica vista a lezione.

Applicando questa disuguaglianza ai numeri a^{-1} e b^{-1} si ha

$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2} \ge \sqrt{a^{-1}b^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}$ che passando agli inversi

diventa $\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}} \le \sqrt{ab}$, che è la seconda disuguaglianza

Elevando al quadrato, la disuguaglianza (da dimostrare)

$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ equivale a $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$ che, sviluppando il quadrato e moltiplicando per 4, equivale alla disuguaglianza $(a-b)^2 \ge 0$, che è vera.

2) Dato che il cerchio ha area π, si ha $S_1 + S_2 = \pi$ e vogliamo rendere massimo il prodotto $S_1 S_2$ tenendo la somma $S_1 + S_2 = \pi$ costante. Dalla disuguaglianza aritmetico-geometrica, $S_1 S_2 \le \left(\frac{S_1+S_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$ e vale "=" se e solo se $S_1 = S_2$.

Quindi il prodotto $S_1 S_2$ non supera mai $\frac{\pi^2}{4}$, e vale $\frac{\pi^2}{4}$ se e solo se $S_1 = S_2 = \frac{\pi}{2}$, ossia quando la retta passa per il centro del cerchio.

3) Se gli spigoli del parallelepipedo sono lunghi a, b, c, l'area totale vale $A = 2(ab+bc+ca)$ e il volume vale $V = abc = 1$, per ipotesi. Dalla disuguaglianza aritmetico-geometrica,

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \ge \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = (abc)^{\frac{2}{3}} = V^{\frac{2}{3}} = 1$$

e vale "=" se e solo se $ab = bc = ca$. Questa disuguaglianza può essere riscritta come

$$A = 2(ab+bc+ca) = 6 \cdot \frac{ab+bc+ca}{3} \geq 6$$

Quindi l'area totale non è mai inferiore a 6 e vale 6 se e solo se $ab = bc = ca$. Le ultime 2 uguaglianze equivalgono a $a = b = c$, quindi il parallelepipedo di area totale minima tra quelli di volume 1 è il cubo.

4) a) Da $x+y+z=0$ segue che $z = -(x+y)$. Allora

$$x^3+y^3+z^3 = x^3+y^3+(-(x+y))^3 = x^3+y^3-(x+y)^3$$
$$= x^3+y^3-(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = -3x^2y-3xy^2$$
$$= -3xy(x+y) = 3xyz.$$

b) Il punto a) suggerisce di tentare una fattorizzazione della forma

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\,p(x,y,z). \qquad (*)$$

Il polinomio p deve essere omogeneo di grado 2 (cioè composto solo da monomi di grado 2) e simmetrico in x, y, z. Perciò deve essere della forma

$$p(x,y,z) = \alpha(x^2+y^2+z^2) + \beta(xy+yz+zx).$$

Sostituendo questa espressione in $(*)$ si ricava $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, dunque vale la fattorizzazione

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad (+$$

c) Ricordiamo il risultato visto a lezione

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ e vale "=" } \Longleftrightarrow x=y=z.$$

Allora, quando x, y, z sono numeri positivi, il lato destro di $(+)$ è ≥ 0 e vale $0 \Longleftrightarrow x=y=z$. Per $(+)$, lo stesso è vero per la quantità

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \qquad (x)$$

Siano ora a, b, c i 3 numeri positivi per i quali

vogliamo dimostrare la disuguaglianza aritmetico-geometrica e poniamo $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$.
La quantità (8) vale

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc}$$

e abbiamo mostrato che questa espressione è ≥ 0 e $= 0 \iff x = y = z$ ossia $a = b = c$.
Perciò

$$a+b+c - 3\sqrt[3]{abc} \geq 0 \iff \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

e vale "=" $\iff a = b = c$. $\square$

5) Indichiamo con $a \leq b \leq c$ le lunghezze degli spigoli di un generico parallelepipedo. La condizione sul volume è $abc = 1$.
Sviluppando il parallelepipedo sul piano si vede che la lunghezza del cammino più breve che connette una coppia di vertici opposti è il minimo tra le quantità:

$$\sqrt{a^2 + (b+c)^2}, \quad \sqrt{b^2 + (c+a)^2}, \quad \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

Sviluppando i quadrati e usando l'ipotesi $a \leq b \leq c$ troviamo che il più piccolo tra questi 3 numeri è

$$d = \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

Quindi tra tutte le terne di numeri positivi a, b, c per cui $a \leq b \leq c$ e $abc = 1$ vogliamo trovare quella che rende minima la quantità d.
Usando $abc = 1$ riceviamo

$$d^2 = c^2 + (a+b)^2 = \frac{1}{a^2b^2} + (a+b)^2 \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{a^2b^2} + 4ab$$

$$= \frac{1}{a^2b^2} + 2ab + 2ab \overset{(2)}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2}(2ab)(2ab)} = 3\sqrt[3]{4}$$

dove la (1) e la (2) seguono dalla disuguaglianza aritmetico - geometrica applicata a a, b (per la (1)) e $\frac{1}{a^2b^2}$, $2ab$, $2ab$ (per la (2)).

Quindi d non è mai inferiore a $\sqrt{3\sqrt[3]{4}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{2}$ e vale $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}$ se e solo se valgono le uguaglianze in (1) e (2), ossia se e solo se $a = b$ e $\frac{1}{a^2b^2} = 2ab$, ovvero $a = b = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$.

In questo caso, $c = \frac{1}{ab} = \sqrt[3]{2}$ quindi la condizione $a \leq b \leq c$ è verificata.
Conclusione: il parallelepipedo richiesto ha spigoli di lunghezze $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, $\sqrt[3]{2}$.

6) a) Siano $a, b, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ gli n numeri positivi, con media aritmetica

$$A = \frac{1}{n}\left(a + b + \sum_{j=1}^{n-2} x_j\right)$$

Stiamo supponendo $a < A < b$. Se rimpiazziamo a e b con

$$a' = A \quad \text{e} \quad b' = b - A + a \quad (>0 \text{ poiché } b > A)$$

risulta $a' + b' = A + b - A + a = a + b$, quindi la somma degli n numeri $a', b', x_1, \dots, x_{n-2}$ coincide con la somma degli n numeri $a, b, x_1, \dots, x_{n-2}$ e lo stesso vale per le loro medie aritmetiche.
Prima della sostituzione, la media geometrica è la radice n-esima di

$$ab\prod_{j=1}^{n-2} x_j$$

Dopo la sostituzione diventa la radice n-esima di

$$a'b'\prod_{j=1}^{n-2} x_j$$

Per confrontare queste 2 quantità è sufficiente confrontare ab e $a'b'$. Si ha

$$a'b' - ab = A(b - A + a) - ab = Ab - A^2 + Aa - ab$$
$$= b(A-a) - A(A-a) = (b-A)(A-a) > 0$$

quindi $a'b' > ab$ e la nuova media geometrica è più grande della vecchia.

b) Siano $a_1, \dots, a_n$ numeri non-negativi con media aritmetica A e media geometrica G. Se gli n numeri coincidono, si ha ovviamente $A = G$. Se non coincidono, non possono essere tutti $\geq A$ (la media aritmetica sarebbe più grande), né $\leq A$, quindi ve ne è uno $< A$ e uno $> A$. Rimpiazzandoli come nel punto a), la media aritmetica resta la stessa, A, mentre la media geometrica diventa strettamente maggiore, $G' > G$. Inoltre con questa sostituzione abbiamo reso uno degli n numeri $= A$. Iterando questo procedimento, la media geometrica continua a salire e sale pure il numero dei termini uguali ad A. Il procedimento si interrompe quando tutti i termini sono uguali a A. Per tali numeri la media geometrica vale A ed essendo tale media geometrica maggiore della media geometrica iniziale, concludiamo che $A > G$. □

7) Detta x la lunghezza del lato perpendicolare alla palizzata, si trova che quello parallelo alla palizzata deve essere lungo $30 - 2x$. Vogliamo massimizzare l'area, ossia la quantità

$$A = x(30 - 2x)$$

Dalla disuguaglianza aritmetico-geometrica applicata a $2x$ e $30-2x$ si ha che

$$A = \frac{1}{2}\, 2x\,(30-2x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+30-2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,15^2 = \frac{225}{2}$$

e vale "=" se e solo se $2x = 30-2x$, ossia $x = 15/2$. Concludiamo che l'area del recinto non potrà mai superare il valore di $225/2 = 112{,}5\ m^2$ e che tale valore è realizzato scegliendo il lato perpendicolare alla palizzata di lunghezza $x = \frac{15}{2} = 7{,}5\ m$

8) Chiamiamo S_n la quantità

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Per $n=1$, $S_1 = \frac{1}{2}$, che è $\leq \frac{3}{4}$ e $\leq \frac{1}{2}$, quindi entrambe le disuguaglianze valgono per $n=1$.
Esprimiamo S_{n+1} in funzione di S_n:

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= S_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

Partendo dall'ipotesi induttiva $S_n \leq 3/4$ non possiamo dedurre che $S_{n+1} \leq 3/4$: la prima disuguaglianza non passa all'induzione. Invece dall'ipotesi $S_n \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$ segue che

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$\leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4(n+1)}$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera poiché equivale a

$$\frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \leq \frac{1}{4n} - \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4n(n+1)}$$

che segue da $2(2n+1) \geq 4n$.
Quindi il principio di induzione mostra che la seconda disuguaglianza è vera $\forall n \geq 1$.
Essendo implicata dalla seconda, anche la prima disuguaglianza è vera $\forall n \geq 1$, però non la si può dimostrare per induzione in maniera diretta.