

Soluzioni 20.3.2012

1. a) Dimostriamo preliminarmente l'identità

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

In fatti, posto $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$$

da cui $f(x) = c \quad \forall x > 0$. Dato che $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,
 $c = \frac{\pi}{2}$ e (*) vale.

Grazie a (*):

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{m} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{m}$$

Dato che $\operatorname{arctg} \frac{1}{m}$ è asintotico a $\frac{1}{m}$, la serie data diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

b) $\log \left(1 + \frac{(-1)^m}{m} \right)$ è positivo per m pari e negativo per m dispari.

Quindi il termine generale della serie è della forma $(-1)^m a_m$ con

$$a_m = \left| \log \left(1 + \frac{(-1)^m}{m} \right) \right| > 0$$

Risulta $a_m = o(1)$. Verifichiamo che (a_m) è decrescente, ossia $a_{m+1} \leq a_m \quad \forall m \geq 2$, distinguendo il caso m pari dal caso m dispari.

Se $m = 2K$,

$$\begin{aligned} a_{m+1} - a_m &= a_{2K+1} - a_{2K} = -\log\left(1 - \frac{1}{2K+1}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{2K}\right) \\ &= -\log\left[\left(1 + \frac{1}{2K}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2K+1}\right)\right] = -\log\left(\frac{2K+1}{2K} \cdot \frac{2K+1-1}{2K+1}\right) = \\ &= \log 1 = 0 \end{aligned}$$

Perciò $a_{m+1} = a_m$ se m è pari. Se $m = 2K-1$

$$\begin{aligned} a_{m+1} - a_m &= a_{2K} - a_{2K-1} = \log\left(1 + \frac{1}{2K}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{2K-1}\right) \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{2K}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2K-1}\right) = \log \frac{2K+1}{2K} \cdot \frac{2K-1-1}{2K-1} = \\ &= \log \frac{(2K+1)(2K-2)}{2K(2K-1)} = \log \frac{2K(2K-1) - 2}{2K(2K-1)} = \\ &= \log\left(1 - \frac{1}{K(2K-1)}\right) < 0 \end{aligned}$$

Perciò $a_{m+1} < a_m$ se m è dispari. Concludiamo che (a_n) è decrescente, da cui la serie data converge per il criterio di Leibniz.

$$c) \quad \sin \frac{(-1)^n}{\log n} = (-1)^n \sin \frac{1}{\log n}$$

Dato che $0 < \frac{1}{\log n} \leq \frac{1}{\log 2} < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \geq 2$, si

tratta di una serie a segni alterni. La successione $\sin \frac{1}{\log n}$ è infinitesima. Inoltre $\frac{1}{\log n}$ è decrescente

te, e dato sia x è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$, dove

$\frac{1}{\log m}$ assume i suoi valori, concludiamo che

anche $\sin \frac{1}{\log m}$ è decrescente. Perciò la serie

dato converge per il criterio di Leibniz.

d) Dato che $\log x \leq x - 1, \forall x > 0$.

si ha

$$m - \log m \geq m - (m - 1) = 1 > 0$$

da cui $\frac{1}{m - \log m} > 0$. Perciò si tratta di

una serie a segni alterni. Dato che $\log m = o(m)$, la successione

$$\frac{1}{m - \log m} = \frac{1}{m + o(m)}$$

è infinitesimale. Mostriamo che $\frac{1}{m - \log m}$ è

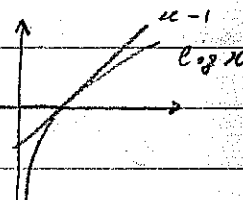
decrescente, o equivalentemente che $m - \log m$ è crescente. Questo segue dal fatto che

$$f(x) = x - \log x$$

è crescente su $[1, +\infty[$, come si può provare studiando il segno della derivata:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \text{se } x \geq 1$$

Perciò la serie data converge per il criterio di Leibniz.



2. Riscriviamo l' n -esimo termine della serie come

$$(\log n)^{-\log n} = e^{-(\log n)(\log \log n)}$$

Dato che $\log \log n$ diverge, $\log \log n \geq 2$ definitivamente. Allora

$$e^{-(\log n)(\log \log n)} \leq e^{-2 \log n} = \frac{1}{n^2}$$

e la serie converge per confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

3. Dato che

$$\log \frac{3}{2} = \log \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \dots$$

$$\text{detta } S_K = \sum_{n=1}^K \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{2^n}, \text{ si ha}$$

$$(*) \quad S_{2K} < \log \frac{3}{2} < S_{2K-1}, \quad \forall K \geq 1$$

(infatti ragionando come nella dimostrazione del criterio di Leibniz, troviamo che (S_{2K}) cresce verso $\log \frac{3}{2}$, mentre (S_{2K+1}) decresce verso $\log \frac{3}{2}$)

$$\text{Dato che } S_{2K-1} - S_{2K} = \frac{1}{2K} \cdot \frac{1}{2^{2K}} < \frac{1}{10} \text{ già}$$

$$\text{per } K=2, \text{ deduciamo che } S_{2 \cdot 2 - 1} = S_3 =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{12 - 3 + 1}{24} = \frac{5}{12}$$

data da $\log \frac{3}{2}$ meno di $\frac{1}{10}$.

4. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange,

$$\cos 1 = \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} 1^{2m} = \frac{1}{(2K)!} D^{2K}(\cos x) \Big|_{x=y} \cdot 1^{2K}$$

polinomio di Taylor di ordine $2K-1$

per qualche $y \in]0, 1[$. Dato che

$$D^{2K} \cos x = (-1)^K \cos x$$

il valore assoluto di $D^{2K}(\cos x)$ non supera 1 e
troviamo:

$$\left| \cos 1 - \sum_{m=0}^{K-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \right| \leq \frac{1}{(2K)!}$$

$(2K)! \geq 100$ già per $K=3$, quindi

$$\sum_{m=0}^2 \frac{(-1)^m}{(2m)!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} = \frac{24-12+1}{24} = \frac{13}{24}$$

approssima $\cos 1$ con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$

5. Dobbiamo stimare dall'alto la somma $\sum_{n=h}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^{2n}}$

Scriviamo $\frac{\sqrt{n}}{3^{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{3^n} \cdot \frac{1}{3^n}$ e studiamo la

funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3^x} = \sqrt{x} e^{-x \log 3}$. Dato che

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\log 3) \sqrt{x} \right) e^{-x \log 3} \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2 \log 3}$$

deduciamo che f è decrescente su $[\frac{1}{2 \log 3}, +\infty[$.

Dato che $\frac{1}{2 \log 3} < 1$, f è decrescente in partico-

lare su $[1, +\infty[$ e la successione $\left(\frac{\sqrt{m}}{3^m}\right)_{m \geq 1}$ è

decrescente. Questo fatto permette di stimare il resto h -esimo della serie come:

$$\begin{aligned} \sum_{m=h}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{3^{2m}} &= \sum_{m=h}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{3^m} \cdot \frac{1}{3^m} \leq \sum_{m=h}^{\infty} \frac{\sqrt{h}}{3^h} \cdot \frac{1}{3^m} = \\ &= \frac{\sqrt{h}}{3^h} \sum_{m=h}^{\infty} \frac{1}{3^m} = \frac{\sqrt{h}}{3^h} \cdot \frac{3^{-h}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{h} \cdot \frac{1}{3^{2h}} \end{aligned}$$

per $h=4$ questo numero vale $\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^8} = \frac{4}{3^9} = \frac{4}{19683}$

che è minore di 10^{-3} Perciò

$$\sum_{m=1}^3 \frac{\sqrt{m}}{3^{2m}} = \frac{1}{9} + \frac{\sqrt{2}}{3^4} + \frac{\sqrt{3}}{3^6} \quad \text{approssima la somma della}$$

serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{3^{2m}}$ con un errore inferiore a 10^{-3}

6. a) Risultato:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{2m} a_k &= \sum_{h=1}^m a_{2h-1} + \sum_{h=1}^m a_{2h} = \sum_{h=1}^m \frac{1}{2^{h-1}} - \sum_{h=1}^m \frac{1}{3^{2h-1}} \\ &= \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{2^h} - 3 \sum_{h=1}^m \frac{1}{3^{2(h-1)}} = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{2^h} - 3 \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{9^h} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^m}}{1 - \frac{1}{2}} - 3 \frac{1 - \frac{1}{9^m}}{1 - \frac{1}{9}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) - \frac{27}{8} \left(1 - \frac{1}{9^m}\right) \end{aligned}$$

che per $m \rightarrow \infty$ tende a $2 - \frac{27}{8} = -\frac{11}{8}$

Perciò $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = -\frac{11}{8}$

Dato che $S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} \rightarrow 0$, anche
(S_{2m+1}) converge a $-\frac{11}{8}$

Concludiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{11}{8}$, ossia la

serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge e la sua somma vale $-\frac{11}{8}$

b) Sia $S_m = \sum_{k=1}^m b_k$. Allora

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} b_k = \sum_{k=1}^m b_{2k-1} + \sum_{k=1}^m b_{2k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{3^k}$$

$$\geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{1/3}{1 - 1/3}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{1}{2}$$

tende a $+\infty$, poiché $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$ per $m \rightarrow +\infty$

(somma parziale della serie armonica)

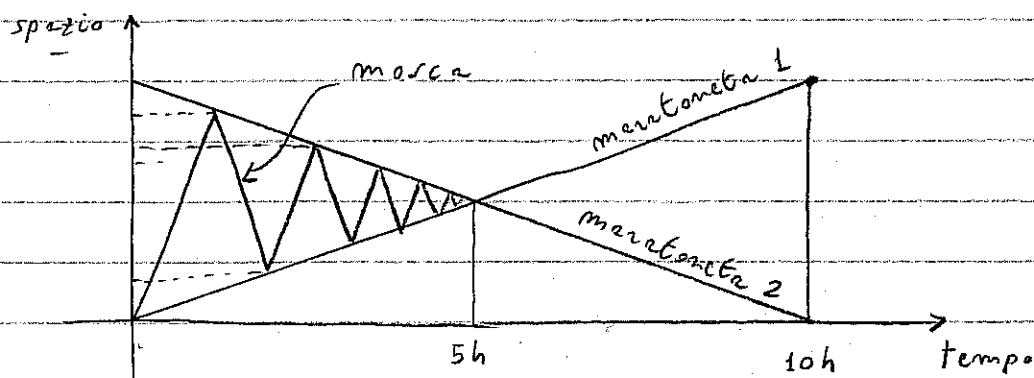
Dato che $S_{2m+1} - S_{2m} = b_{2m+1} \rightarrow 0$, anche
 $S_{2m+1} \rightarrow +\infty$ e concludiamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

diverge a $+\infty$

7. I maratoneisti si incontrano quando hanno percorso 50 Km ciascuno, ossia dopo 5 ore. In queste 5 ore la mosca ha percorso $5 \cdot 20 = 100$ Km.

Possiamo arrivare alla stessa risposta anche sommando i tratti percorsi dalla mosca.



La posizione dei 2 maratoneisti dopo t ore è, rispettivamente,

$$a(t) = 10 \cdot t, \quad b(t) = 100 - 10 \cdot t$$

La posizione della mosca durante il primo tratto è

$$m(t) = 20 \cdot t$$

$$\text{Dato che } m(t) = b(t) \Leftrightarrow 20 \cdot t = 100 - 10 \cdot t \Leftrightarrow$$

$t = \frac{100}{3}$, la mosca incontra il secondo maratoneista dopo $t_0 = \frac{100}{3}$ ore.

In quell'istante, ha percorso $S_0 = 20 \cdot t_0 = \frac{200}{3}$ Km.

Dato che in questo istante i maratoneisti distano

$$b(t_0) - a(t_0) = 100 - 10 \cdot t_0 - 10 \cdot t_0 = \frac{100}{3} \text{ Km}$$

ossia $\frac{1}{3}$ della distanza iniziale, il secondo tratto percorso dalla mosca sarà $\frac{1}{3}$ del precedente:

$$S_1 = \frac{1}{3} S_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{200}{3} \text{ Km}$$

In generale, il tratto S_n misura $\frac{1}{3^n} S_0$ Km e il percorso totale della mosca è

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = S_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{200}{3} \cdot \frac{3}{2} = 100 \text{ Km}$$