

Soluzioni esercizi 17.11.2011

1) • Osserviamo che, per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\log(1+x+x^2) &= x + x^2 + o(x+x^2) = x + x^2 + o(x) \\ &= x + o(x)\end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{\log(1+x+x^2)}{x^2} = \frac{x + o(x)}{x^2} = \frac{1 + o(1)}{x}$$

Perciò $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1+x+x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + o(1)}{x} = +\infty$,

mentre, dato che $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 + o(1)}{x} = -\infty$, il

limite di $\frac{\log(1+x+x^2)}{x^2}$ per $x \rightarrow 0$ non esiste.

• $x^b \log_a x = e^{b \log x} \frac{\log x}{\log a}$

Dato che $\log x \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow 0+$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^b \log_a x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{by} \frac{y}{\log a}$$

Poiché $b > 0$, $\lim_{y \rightarrow -\infty} y e^{by} = 0$, dunque il

limite proposto vale 0.

• $\frac{\log(1+\sqrt{x+x^3})}{x} = \frac{\sqrt{x+x^3} + o(\sqrt{x+x^3})}{x} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{x} + x} + o\left(\sqrt{\frac{1}{x} + x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + x} (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0+$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $+\infty \qquad \qquad 1$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(1+\sqrt{x+x^3})}{x} = +\infty$

$$2) \quad z = 2 - i, \quad w = 5 + 3i$$

$$z + 2w = 2 - i + 10 + 6i = 12 + 5i$$

$$z \bar{w} = (2 - i)(5 - 3i) = 10 - 5i - 6i + 3i^2 = 7 - 11i$$

$$\frac{\bar{z}}{w} = \frac{2+i}{5+3i} = \frac{(2+i)(5-3i)}{15+3i^2} = \frac{10+5i-6i-3i^2}{25+9} = \frac{13-i}{34} = \frac{13}{34} - \frac{1}{34}i$$

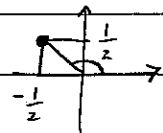
$$\bar{z}^3 = (2+i)^3 = 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$3) \quad i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = i - 1 - i + 1 + i = i$$

$$\frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{1-i^2} = \frac{i-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

Questo numero ha modulo $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e

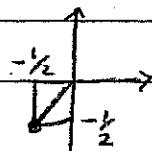
argomento $\frac{3\pi}{4}$



$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1-i}{(1+i)^2} &= \frac{(1-i)(1-i)^2}{(1+i)^2(1-i)^2} = \frac{(1-i)^3}{1+i^4} = \frac{1-3i+3i^2-i^3}{2^2} \\ &= \frac{1-3i-3+i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Questo numero ha modulo $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e

argomento $\frac{5\pi}{4}$



4) Per ipotesi, $z = 1 + iy$ con $y \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned} z + \bar{z}^2 &= 1 + iy + (1 - iy)^2 = 1 + iy + 1 - 2iy + i^2 y^2 \\ &= 2 - y^2 - iy \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{z + \bar{z}^2}{2i} \right| &= \frac{|z + \bar{z}^2|}{|2i|} = \frac{1}{2} |2 - y^2 - iy| = \frac{1}{2} \sqrt{(2 - y^2)^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{y^4 - 3y^2 + 4} \end{aligned}$$

Perciò la disuguaglianza proposta è equivalente a

$$\frac{1}{2} \sqrt{y^4 - 3y^2 + 4} < \frac{y^2}{4} + 1$$

Poiché $y^4 - 3y^2 + 4 > 0$ e $\frac{y^2}{4} + 1$, moltiplicando per 2 ed elevando a al quadrato, questa disuguaglianza equivale a

$$y^4 - 3y^2 + 4 < \left(\frac{y^2}{2} + 2 \right)^2 = \frac{y^4}{4} + 2y^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}y^4 - 5y^2 < 0 \Leftrightarrow 3y^4 - 20y^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(3y^2 - 20) < 0$$

che è soddisfatta se e solo se $y \neq 0$ e $3y^2 - 20 < 0$

$$\Leftrightarrow y \in \left] -\sqrt{\frac{20}{3}}, \sqrt{\frac{20}{3}} \right[\setminus \{0\}$$

5) L'equazione $z|z| = 2i$ si semplifica, passando ai moduli,

$$|z|^2 = 2, \text{ ossia } |z| = \sqrt{2}$$

Quindi $z|z| = 2i$ diventa $\sqrt{2}z = 2i \Leftrightarrow$

$$\bar{z} = \frac{2}{\sqrt{2}}i = \sqrt{2}i \Leftrightarrow z = -\sqrt{2}i$$

6) Cerchiamo soluzioni dell'equazione ricorrenza della forma $z_m = w^m$:

$$w^{m+2} = 6w^{m+1} - 13w^m \Leftrightarrow w^2 - 6w + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow w = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm 2i$$

Quindi $z_m = a(3+2i)^m + b(3-2i)^m$, al variare di $a, b \in \mathbb{C}$, è la soluzione generale del problema.

Nel caso delle condizioni iniziali $z_0 = 1$ e $z_1 = 3$ la successione z_m è reale, quindi da $z_m = \bar{z}_m$ si ricava che $b = \bar{a}$: $z_m = a(3+2i)^m + \bar{a}(3-2i)^m$ da cui

$$\begin{cases} a + \bar{a} = 1 \\ a(3+2i) + \bar{a}(3-2i) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \operatorname{Re} a = 1 \\ 3(a + \bar{a}) + 2i(a - \bar{a}) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} a = \frac{1}{2} \\ 16 \operatorname{Re} a + 2i \cdot 2i \operatorname{Im} a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} a = \frac{1}{2} \\ 3 - 4 \operatorname{Im} a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} a = \frac{1}{2} \\ \operatorname{Im} a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z_m = \frac{1}{2}(3+2i)^m + \frac{1}{2}(3-2i)^m$$

Nel caso delle condizioni iniziali $z_0 = 1$, $z_1 = 3 + 6i$,
i numeri $a, b \in \mathbb{C}$ risolviamo il sistema

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a(3 + 2i) + b(3 - 2i) = 3 + 6i \end{cases} \quad \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 3(a + b) + 2(a - b)i = 3 + 6i \\ \parallel \\ 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow z_n = 2(3 + 2i)^n - (3 - 2i)^n$$