

Soluzioni esercizi 13.12.2011

1) • f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 25, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{+\infty} \underbrace{(25x^4 + 10x^2 + 1 - 8x)}_1 = +\infty$$

quindi f non ha massimo. La derivata di f è

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(5 + \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) + \frac{24}{x^4} = -\frac{20}{x^3} - \frac{4}{x^5} + \frac{24}{x^4} = \\ &= -\frac{4}{x^5}(5x^2 - 6x + 1) = -\frac{4}{x^5}(5x - 1)(x - 1) \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 && \text{per } x < 0 \\ f'(x) &< 0 && \text{per } 0 < x < \frac{1}{5} \\ f'(x) &> 0 && \text{per } \frac{1}{5} < x < 1 \\ f'(x) &< 0 && \text{per } x > 1 \end{aligned}$$

$$\text{e } f'\left(\frac{1}{5}\right) = f'(1) = 0.$$

Perciò f è strettamente crescente su $]-\infty, 0[$, con immagine $f(]-\infty, 0[) =]25, +\infty[$.

Invece f decresce strettamente su $]0, \frac{1}{5}]$, tendendo a 25 per $x \rightarrow 0$ e raggiungendo un minimo locale per $x = \frac{1}{5}$, con

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = (5 + 25)^2 - 8 \cdot 125 = 900 - 1000 = -100,$$

cresce strettamente su $[\frac{1}{5}, 1]$, raggiungendo un massimo locale in $x = 1$, con

$$f(1) = (5 + 1)^2 - 8 = 36 - 8 = 28,$$

e decresce strettamente su $[1, +\infty[$, tendendo a 25 per $x \rightarrow +\infty$.

Concludiamo che il minimo di f vale -100 ed è
assunto in un unico punto x , ossia $x = -\frac{1}{5}$.

- Dalle proprietà della funzione sono segue che

$$g(x) = \sqrt{1 + \sin e^x} \leq \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e che vale $= \sqrt{2}$ se e solo se $e^x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Dato che l'immagine della funzione esponenziale è
 $]0, +\infty[$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'equazione $e^x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
possiede soluzione, dunque

$$\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \sqrt{2}$$

Analogamente, $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e si annulla per
 $e^x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, equazione che è risolvibile per ogni
 $k \in \mathbb{N}$. Perciò

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0.$$

- Conviene introdurre un cambio di variabile: post. $y = \log x$,
troviamo che al variare di x in $]0, +\infty[$, y
assume tutti i valori reali. Perciò il massimo e
il minimo di $h(x)$ in $]0, +\infty[$ coincidono con il
massimo e il minimo di

$$H(y) = y - y^2$$

su $\mathbb{R}$. Dato che $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} H(y) = -\infty$, la funzione H
non ha minimo, mentre assume massimo nell'unico punto

dove si annulla $H'(y) = 1 - 2y$, ossia $y = \frac{1}{2}$, per cui

$H(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Concludiamo che h non ha minimo

ovvero $\max_{x > 0} h(x) = \frac{1}{4}$.

- Grazie al cambio di variabile $y = \frac{x}{x+1}$, ossia

$$(x+1)y = x \Leftrightarrow (1-y)x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \quad (*)$$

il problema si riduce a trovare massimo e minimo della funzione $L(y) = \arcsin y$ al variare di y nell'insieme

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \neq -1 \text{ e } \left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 1 \right\}$$

Da (*) segue che l'equazione $y = \frac{x}{x+1}$ ha soluzione $x \neq -1$ se e solamente se $y \neq 1$. Dunque

$$B = [-1, 1[$$

Dato che la funzione arcseno è strettamente crescente sul suo dominio $[-1, 1]$, deduciamo che

$$\min_{x \in A} L(x) = \min_{y \in [-1, 1[} \arcsin y = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

mentre il non esiste massimo su A .

2) a) Si tratta di calcolare $Y(0)$, $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$

Si trova

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = \frac{2}{3}, \quad Y(2) = \frac{1}{2}, \quad Y(3) = \frac{6}{13}$$

$$b) \quad Y'(t) = \frac{2(t^2+4) - 2t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{-8 - 2t^2}{(t^2+4)^2}$$

Quindi $Y'(t) > 0 \Leftrightarrow -8 - 2t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2 + 4 < 0$
 $\Leftrightarrow 0 \leq t < 2$ (in questo problema, $t \geq 0$).

Concludiamo che la concentrazione cresce nelle prime 2 ore e successivamente decresce.

c) Il picco della concentrazione si ha dopo 2 ore e

il valore massimo raggiunto è $Y(2) = \frac{1}{2}$.

d) Nel modell. alternativo

$$Y'(t) = \frac{2(16+t^3) - 2t \cdot 3t^2}{(16+t^3)^2} = \frac{32 - 4t^3}{(16+t^3)^2}$$

$$\text{da cui: } Y'(t) > 0 \Leftrightarrow 32 - 4t^3 > 0 \Leftrightarrow t^3 - 8 < 0 \\ \Leftrightarrow 0 \leq t < 2$$

Come prima, la concentrazione cresce nelle prime due ore, quando raggiunge il valore massimo

$Y(2) = \frac{4}{16+8} = \frac{1}{6}$ inferiore al precedente, e decresce successivamente.

Dato che la seconda funzione tende a 0 più rapidamente della prima per $t \rightarrow +\infty$, concludiamo che nel secondo modello la presenza delle sostanze nel sangue ha minore durata.

3) Dato $f(x)$ il flusso luminoso in un punto sulla congiungente tra le sorgenti che dista $x \in]0, d[$ dalla sorgente di intensità A , si ha

$$f(x) = K \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{(d-x)^2} \right)$$

Qui K è la costante di proporzionalità. Il valore di minimo di f dipende da K , ma il punto di minimo no, quindi possiamo assumere $K=1$. Risultato

$$f'(x) = -\frac{2A}{x^3} + \frac{2B}{(d-x)^3} = \frac{2Bx^3 - 2A(d-x)^3}{x^3(d-x)^3}$$

Dato che f è continua in $]0, d[$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow d^-} f(x) = +\infty$$

per il complemento al teorema di Weierstrass,

sappiamo che f assume minimo in $I_0, d \in I$. Per il principio di Fermat, f' si deve annullare nei punti di minimo, che quindi vanno cercati tra le soluzioni di

$$f'(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq d,$$

ovv. di

$$B x^3 - A (d-x)^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{(d-x)^3} = \frac{A}{B} \Leftrightarrow \frac{x}{d-x} = \sqrt[3]{\frac{A}{B}} \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{A}{B}} (d-x) \Leftrightarrow \left(1 + \sqrt[3]{\frac{A}{B}}\right) x = \sqrt[3]{\frac{A}{B}} d$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{\frac{A}{B}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{A}{B}}} d = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{A}} d$$

Avendo trovato un solo punto dove si annulla f' e dato che questo appartiene a $I_0, d \in I$, concludiamo che il punto di minimo globale della

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}} d \quad \text{dalla tangente } A.$$

4) Dato che f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$, f è crescente se e solo se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Dato che

$$f'(x) = a - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = a - \frac{xc^4 + 3x^2 + 1}{(1+x^2)^2}$$

vogliamo dimostrare l'implicazione

$$a - \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq \frac{2}{8}$$

La prima disuguaglianza dice che $a \geq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, con $g(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2}$, dunque $a \geq \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$

Determiniamo l'estrema superiore di g su $\mathbb{R}$

Osserviamo che $g(x) = G(x^2)$ con

$$G(y) = \frac{y^2 + 3y}{(1+y)^2}$$

$$\text{Dunque } \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \sup_{y \geq 0} G(y)$$

Risultati $G(0) = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} G(y) = 1$ Inoltre

$$G'(y) = \frac{(2y+3)(1+y)^2 - (y^2+3y)2(1+y)}{(1+y)^4} =$$

$$= \frac{(2y+3)(1+y) - 2y(y+3)}{(1+y)^3} = \frac{2y^2 + 5y + 3 - 2y^2 - 6y}{(1+y)^3}$$

$$= \frac{3-y}{(1+y)^3} \quad \text{che } > 0 \text{ su } [0, 3[\text{ e } < 0 \text{ su }]3, +\infty[$$

Dunque G cresce su $[0, 3]$, raggiunge il massimo in $x = 3$ e decresce su $[3, +\infty[$ Per.

$$\sup_{y \geq 0} G(y) = \max_{y \geq 0} G(y) = G(3) = \frac{9+9}{16} = \frac{9}{8}$$

Concludiamo che $Q \geq \frac{9}{8}$

5) La disuguaglianza proposta è equivalente a

$$(*) \quad \frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{k} \quad \forall x > 0$$

Ponendo $H = 1/k$, si chiede di trovare il minimo valore di H per cui valga (*), ossia il minimo dell'insieme dei maggioranti dell'immagine delle funzioni

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

cioè $\sup_{x > 0} f(x)$. Studiamo la funzione f

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - (\log x) \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{x \sqrt{x}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \log x}{x \sqrt{x}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \log x > 0 \Leftrightarrow \log x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$$

Perciò f cresce in $]0, e^2]$, raggiunge il suo massimo per $x = e^2$ dove

$$f(e^2) = \frac{\log e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

e decresce in $[e^2, +\infty[$.

$$\sup_{x>0} f(x) = \frac{2}{e}$$

Perciò il valore minimo di $H = \frac{1}{K}$ per cui vale (*) è $\frac{2}{e}$, da cui il valore massimo di K per cui vale (*) è $K = \frac{e}{2}$.

6) a) La disuguaglianza $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ è equivalente

a $f(x) \geq 0$ con $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$. Dato che

f è pari, basterà dimostrare che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = x - \sin x$$

$$f'(0) = 0, \quad f''(x) = 1 + \cos x \geq 0 \Rightarrow f' \text{ è crescente}$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescente in } [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0.$$

La disuguaglianza $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ equivale a $g(x) \geq 0$ con

$$g(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{2!} + 1 - \cos x$$

Di nuovo, periamo supponi $x \geq 0$. Risult.

$$g'(x) = \frac{x^3}{3!} - x + \sin x, \quad g''(x) = \frac{x^2}{2!} - 1 + \cos x = f(x)$$

Abbiamo già mostrato che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi g' è crescente in $\mathbb{R}$. Allora $g'(x) \geq g'(0) = 0$ per $x \geq 0$, da cui g è crescente in $[0, +\infty[$. Allora $g(x) \geq g(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$, c.v.d.

b) Partendo egli esponenziali, la disuguaglianza è equivalente a

$$1 + \sin x \leq e^{\arctan x} \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

ossia $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$, con

$$f(x) = e^{\arctan x} - 1 - \sin x$$

Dato che

$$f'(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2],$$

f è crescente in $[0, \pi/2]$, da cui $f(x) \geq f(0) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$.

c) Det. che $2 - x^2 > 0$ su $]0, \sqrt{2}[$, la disuguaglianza equivale a

$$2x > (2 - x^2) \sin x \quad \forall x \in]0, \sqrt{2}[$$

ossia $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \sqrt{2}[$ con

$$f(x) = 2x - (2 - x^2) \sin x$$

Risulta

$$f'(x) = 2 + (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$$

Det. che $0 \leq 2 - x^2 \leq 2$ per $x \in [0, \sqrt{2}]$, si ha

$$(2 - x^2) \cos x \geq -2, \text{ da insieme al fatto che}$$

$$2x \sin x > 0 \text{ per } x \in]0, \pi[, \text{ che contiene }]0, \sqrt{2}[,$$

deduciamo che $f'(x) > 0$ per $x \in]0, \sqrt{2}[$.

Dunque f è strettamente crescente in $[0, \sqrt{2}]$ e

$$\forall x \in]0, \sqrt{2}[\quad f(x) > f(0) = 0.$$

d) Se $f(x) = e^{-x} + \sin x$ e calcoliamo

$$f'(x) = -e^{-x} + \cos x$$

$$f''(x) = e^{-x} - \sin x$$

$$f'''(x) = -e^{-x} - \cos x < 0 \quad \forall x \in]0, \pi/2[$$

Allora f'' è strettamente decrescente su $[0, \pi/2]$, e, dato che

$$f''(0) = 1 > 0, \quad f''(\pi/2) = e^{-\pi/2} - 1 < 0$$

deduciamo che esiste $a \in]0, \pi/2[$ tale che

$$f'' > 0 \text{ su } [0, a[\text{ , } f'' < 0 \text{ su }]a, \pi/2]$$

Allora f' cresce strettamente su $[0, a]$ e

decresce strettamente su $[a, \pi/2]$. Dato che

$$f'(0) = -1 + 1 = 0, \quad f'(\pi/2) = -e^{-\pi/2} < 0$$

esiste $b \in]a, \pi/2[$ tale che $f' > 0$ su $]0, b[$

e $f' < 0$ su $]b, \pi/2[$. Ma allora f cresce strettamente su $[0, b]$ e decresce strettamente su $[b, \pi/2]$. Dato che

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(\pi/2) = e^{-\pi/2} + 1 > 1,$$

concludiamo che

$$f(x) > 1 \quad \forall x \in]0, \pi/2[.$$

e) $f(x) = x e^{1/x}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x} = +\infty$$

$$\text{Inoltre } f'(x) = e^{1/x} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

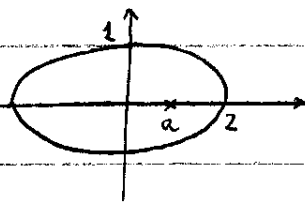
che $f' > 0$ per $x < 1$ e $f' < 0$ per $x > 1$.

Perciò f decresce in $]0, 1[$ e cresce in $[1, +\infty[$,

assumendo minimo $f(1) = e$. Perciò $f(x) > e > 1$

$\forall x \in]0, +\infty[$.

7) a)



Per simmetria, è sufficiente considerare il caso $a \geq 0$.

Per $a \geq 2$, il punto di minima distanza è chiaramente

$(2, 0)$, mentre per $a = 0$ abbiamo la coppia di punti

$(0, 1)$ e $(0, -1)$. Sia $0 < a < 2$. Se (x, y) minimizza la distanza da $(a, 0)$, lo stesso è vero per $(x, -y)$.

Quindi ci limitiamo a considerare $y \geq 0$ e si ha

$$(x, y) = (x, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}})$$

Minimizzare la sua distanza da $(a, 0)$ è equivalente a minimizzare il quadrato di questa distanza, che vale

$$f(x) = (x - a)^2 + 1 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 - 2ax + a^2 + 1$$

Il grafico di questa funzione è una parabola con vertice di ascissa

$$x = \frac{4}{3}a$$

Quando $\frac{4}{3}a < 2$, ossia $a < \frac{3}{2}$, il punto di minimo di f cade all'interno dell'intervallo $[-2, 2]$ e i punti

$$\left(\frac{4}{3}a, \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}a^2} \right)$$

sono i punti dell'ellisse che minimizzano la distanza

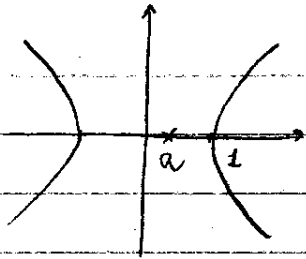
da $(a, 0)$. Se $\frac{4}{3}a \geq 2$, ossia se $a \geq \frac{3}{2}$, la

funzione f è strettamente decrescente in $[-2, 2]$ e

il punto che minimizza la distanza da $(a, 0)$

è $(2, 0)$.

b)



Per simmetria, basta considerare il caso $a \geq 0$.

Per $a = 0$ il minimo della distanza è realizzato dai punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, mentre per $-0 < a \leq 1$ dal punto $(1, 0)$.

Studiamo il caso $a > 1$.

Per simmetria, possiamo limitarci a considerare i punti dell'iperbole con ordinata positiva, ossia $(x, \sqrt{x^2 - 1})$.

al variare di $x \geq 1$. Il quadrato della distanza di tale punto da $(a, 0)$ vale

$$f(x) = (x - a)^2 + x^2 - 1 = 2x^2 - 2ax + a^2 - 1.$$

Il grafico di f è una parabola con vertice di ascissa

$$x = \frac{a}{2}$$

Per $\frac{a}{2} > 1$, ossia $a > 2$, tale x è interna

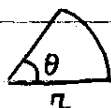
a $[1, +\infty[$ ed i punti che minimizzano la distanza sono

$$\left(\frac{a}{2}, \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)$$

Per $a \leq 2$, f è strettamente crescente in $[1, +\infty[$ ed il punto che minimizza la distanza è

$$(1, 0)$$

8) Siano r e θ il raggio e l'angolo del settore circolare



$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$r > 0$$

Il perimetro vale $P = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$, quindi si deve avere $r(2 + \theta) = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2 + \theta}$

L'area vale dunque

$$A(r, \theta) = \frac{1}{2} \theta r^2 = \frac{1}{2} \frac{\theta}{(2 + \theta)^2}$$

Perciò è sufficiente massimizzare la funzione

$$Q(\theta) = \frac{\theta}{(2 + \theta)^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Risulta } Q'(\theta) = \frac{(2 + \theta)^2 - \theta \cdot 2(2 + \theta)}{(2 + \theta)^4} =$$

$$= \frac{2 + \theta - 2\theta}{(2 + \theta)^3} = \frac{2 - \theta}{(2 + \theta)^3}$$

Dal segno di Q' ricaviamo che Q cresce strettamente in $[0, 2]$ e decresce strettamente in $[2, 2\pi]$, assumendo massimo per $\theta = 2$.

Il settore circolare di area massima tra quelli di perimetro 1 è quello di angolo $\theta = 2$ e raggio $r = \frac{1}{2 + \theta} = \frac{1}{4}$, e la sua area vale

$$A(r, \theta) = \frac{1}{2} \theta r^2 = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} 9) e) \text{ Si ha } f'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+3)^2}} \cdot \frac{x+3 - x}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{3}{(x+3)^2 + x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \end{aligned}$$

Perciò f è strettamente crescente sia in $]-\infty, -3[$ che in $]-3, +\infty[$.

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$$

deduciamo che f è bigettiva da $]-\infty, -3[$ a $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

Dato che

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

deduciamo che f è bigettiva da $]-3, +\infty[$ a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$.

Perciò f è invertibile da $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[\setminus \{\frac{\pi}{4}\}$.

b) Per la regola di derivazione delle funzioni inverse, risulta

$$g'(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(g(-\frac{\pi}{4}))}$$

Il numero $x = g(-\frac{\pi}{4})$ è determinato dall'equazione $f(x) = -\frac{\pi}{4}$, ossia $\operatorname{arctg} \frac{x}{x+3} = -\frac{\pi}{4}$,

$$\text{ossia } \frac{x}{x+3} = -1 \Leftrightarrow x = -x-3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Perciò

$$g'(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(-\frac{3}{2})} = \frac{3}{(-\frac{3}{2}+3)^2 + (-\frac{3}{2})^2} = \frac{3}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$10) a) \quad \cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

$$\begin{aligned} \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \\ &+ \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b}) \\ &+ \frac{1}{4} (e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b}) = \frac{1}{2} (e^{a+b} + e^{-a-b}) \\ &= \cosh(a+b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \\ &+ \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \frac{1}{4} (e^{a+b} + e^{a-b} - e^{b-a} - e^{-a-b}) \\ &+ \frac{1}{4} (e^{a+b} - e^{a-b} + e^{b-a} - e^{-a-b}) = \frac{1}{2} (e^{a+b} - e^{-a-b}) \\ &= \sinh(a+b). \end{aligned}$$

$$b) \quad \sinh x = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

Poniamo $t = e^x > 0$ $\quad \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} = y \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2ty - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow t = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

ed essendo $t > 0$, $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$

$$\Rightarrow x = \log t = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Quindi la funzione inversa di $\sinh x$ è la funzione

$$f(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

dove $y \geq 1$

$$\cosh x = y \quad | \quad \text{con } x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

e ponendo nuovamente $t = e^x > 0$, si ha

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} = y \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2yt + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \quad \Leftrightarrow x = \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Dato che ci interessa la soluzione $x \geq 0$, si ha

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

dunque l'inversa della restrizione di $\cosh x$ a $[0, +\infty[$ è la funzione

$$g(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$