

Soluzioni esercizi 13.10.2011

1) Mostriamo che $u_n = \alpha^{(2^n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Per $n=0$

$$\alpha^{(2^0)} = \alpha^1 = \alpha \quad \text{ok} \quad \text{Se } u_n = \alpha^{(2^n)} \text{ allora}$$

$$u_{n+1} = u_n^2 = (\alpha^{(2^n)})^2 = \alpha^{2 \cdot (2^n)} = \alpha^{(2^{n+1})}$$

Per induzione si ha la tesi. Deduciamo che

• se $\alpha = \pm 1$ $u_n = 1 \quad \forall n \geq 1$

• se $|\alpha| > 1$ $u_n = \alpha^{2^n} = |\alpha|^{2^n} \uparrow +\infty$

• se $|\alpha| < 1$ $u_n = \alpha^{2^n} = |\alpha|^{2^n} \downarrow 0$

$$2) \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = 3 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Dato che $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, per l'esercizio 2 del 6.10.2011, risulta $\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \rightarrow 1$. Quindi $\sqrt[n]{2^n + 3^n} \rightarrow 3$.

3) E' un'iterazione della forma $a_{n+1} = f(a_n)$, con

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$$

La disuguaglianza $f(x) < x$ vale se e solo se

$$\frac{1}{2}(x + x^2) < x \Leftrightarrow x^2 - 2x + x < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2}$$

Inoltre $f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{2}$

Dato che $f(x) = \frac{1}{2}(x + x^2) < \frac{1}{2}(x + x) = x$, x cade nell'intervallo $\left] \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \right[=: I$

Mostriamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a_n \in I \text{ e, } n \geq 1, a_n < a_{n-1}$$

Per $n=0$, $a_0 = x \in I$ per quanto visto.

Se l'affermazione sopra è vera per n , allora

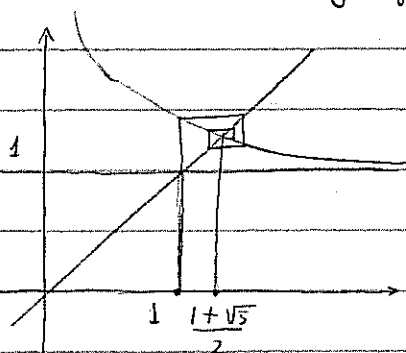
$$a_{n+1} = f(a_n) < a_n < \frac{1 + \sqrt{1-x}}{2} \text{ e, dal fatto che } f \text{ è strettamente crescente su } [0, +\infty[,$$

$$a_{n+1} = f(a_n) > f\left(\frac{1 - \sqrt{1-x}}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{2} \text{ . Cio' conclude il passo induttivo.}$$

Dato che $a_n \downarrow$ e $q_n \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}$, (q_n) converge ad un certo $L \in \left[\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{2}, \alpha \right]$

Passando al limite in $q_{n+1} = f(q_n)$ troviamo $L = f(L)$, da cui $L = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha}}{2}$, ma per le limitazioni viste sopra, necessariamente $L = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{2}$

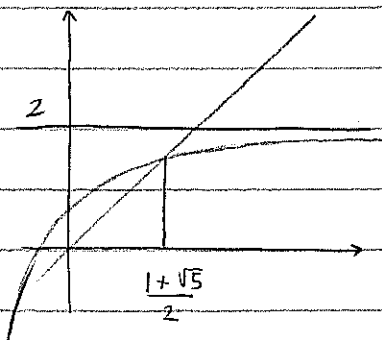
4) E' un' iterazione della forma $\pi_{n+1} = f(\pi_n)$, con $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Dal fatto che $\pi_0 = 1 > 0$, deduciamo che $\pi_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Risulta $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dall'analisi del grafico di f ,



intuiamo che $\pi_{2n} \uparrow$ e $\pi_{2n+1} \downarrow$, convergendo entrambe al valore $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Per formalizzare questa intuizione, consideriamo

$$f^2(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$



Si trova facilmente che f^2 è strettamente
 $f^2(x) > x$ per $0 \leq x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 $f^2(x) = x$ per $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 $f^2(x) < x$ per $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x$

Quindi, se $\pi_n \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$, allora $\pi_{n+2} = f^2(\pi_n) > \pi_n$ e $\pi_{n+2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mentre se $\pi_n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, allora

$$r_{n+2} = f^2(r_n) < r_n \quad \text{e} \quad r_{n+2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dato che $r_0 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, otteniamo per induzione che
 $r_{2n} \uparrow$ e $r_{2n} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n$

Dato che $r_1 = f(1) = 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, otteniamo per induzione
 che $r_{2n+1} \downarrow$ e $r_{2n+1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n$

Entrambe le successioni convergono quindi a un $L > 0$,
 soluzione di $L = f^2(L)$. Dato che l'unica soluzione
 positiva di questa equazione è $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sia
 r_{2n} che r_{2n+1} convergono a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
 Ma allora $r_n \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5) La successione $x_n = t^n$ risolve $x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$
 $\Leftrightarrow t^2 = 6 - t \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-2) = 0$
 $\Leftrightarrow t = -3$ oppure $t = 2$

$x_n = a(-3)^n + b2^n$ soddisfa $x_0 = 4$ e $x_1 = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ -3a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

Quindi la soluzione è

$$x_n = (-3)^n + 3 \cdot 2^n$$

6) La successione $u_n = t^n$ risolve $u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1}$

$$\Leftrightarrow t^2 = 6t - 9 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3$$

Dato che $t=3$ è una radice doppia del polinomio
 $t^2 - 6t + 9$, possiamo mostrare che anche

$$u_n = n \cdot 3^n$$

$$\begin{aligned} \text{è soluzione: } u_{n+1} - 6u_n + 9u_{n-1} &= (n+1)3^{n+1} - 6n3^n + 9(n-1)3^{n-1} \\ &= n \cdot 3^n (3 - 6 + 3) + 3^n (3 - 3) = 0 \end{aligned}$$

La successione $u_n = a 3^n + b n 3^n$ soddisfa le condizioni $u_0 = -1$ e $u_1 = 3$ se e solo se

$$\begin{cases} a = -1 \\ 3a + 3b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Quindi $u_n = -3^n + 2n 3^n$.

7) Diamo solamente le risposte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x}) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = -\frac{1}{56}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1}{x(x+1)}} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} \right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2+x| - |x| - 2}{x} \text{ non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ non esiste}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \sqrt{x^2+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}) = 0$$

8) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia m_0 tale che $|a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$.

Allora se $m > m_0$:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_0} a_k + \frac{1}{m} \sum_{k=m_0+1}^m a_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_0} a_k + \frac{m-m_0}{m} \frac{1}{m-m_0} \sum_{k=m_0+1}^m a_k$$

$$\text{Risultato} \quad \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_0} a_k \right| \leq \frac{m_0}{m} \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$$

$$\left| \frac{1}{m-m_0} \sum_{k=m_0+1}^m a_k - A \right| = \left| \frac{1}{m-m_0} \sum_{k=m_0+1}^m (a_k - A) \right| \leq \frac{1}{m-m_0} \sum_{k=m_0+1}^m |a_k - A| < \varepsilon$$

Perciò

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m a_k - A \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m_0} a_k + \frac{n-m_0}{n} \frac{1}{n-m_0} \sum_{k=m_0+1}^m a_k - A \right| \\ &\leq \frac{m_0}{n} \sup_{k \in \mathbb{N}} a_k + \left| \frac{n-m_0}{n} \left(\frac{1}{n-m_0} \sum_{k=m_0+1}^m a_k - A \right) \right| + \frac{m_0}{n} |A| \\ &\leq \frac{m_0}{n} \sup_{k \in \mathbb{N}} a_k + \frac{n-m_0}{n} \varepsilon + \frac{m_0}{n} |A| \end{aligned}$$

Per $n \rightarrow +\infty$ l'ultima espressione tende a ε ,
quindi $\exists m_1 > m_0$ t.c. $\forall n \geq m_1$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m a_k - A \right| < 2\varepsilon$$

$$\text{da cui } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m a_k \rightarrow A \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \square$$