

Soluzioni 13.3.2012

1. Il primo quadrato colorato misura $\frac{1}{9}$. Gli 8 quadrati colorati al secondo passo misurano $\frac{1}{9^2}$ ciascuno. Al terzo passaggio si colorano 8^2 quadrati di area $\frac{1}{9^3}$ ciascuno. In generale, all' m -esima passo si colorano 8^{m-1} quadrati di area $\frac{1}{9^m}$. Quindi l'area totale della superficie colorata è

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} 8^{m-1} \cdot \frac{1}{9^m} &= \frac{1}{9} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{m-1} = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1\end{aligned}$$

Cio' nonostante, non viene colorato "tutto" il quadrato.

$$2. \quad 3,4\bar{5} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots =$$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{5}{10^m} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} \cdot \frac{10}{9} =$$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{18} = \frac{270 + 36 + 15}{90} = \frac{311}{90}$$

$$3. \quad a) \quad \sqrt[m]{\frac{m}{2^m}} = \frac{\sqrt[m]{m}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{2^m} \text{ converge per}$$

il criterio della radice m -esima.

$$b) \quad \frac{3^m}{m^2} \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{m^2} \text{ non converge, dato che il su. termine generale non \(\rightarrow 0\).}$$

$$c) \quad \text{Dato che } \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} \cdot m \rightarrow 1, \text{ la successione}$$

$\frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}$ è asintotica a $\frac{1}{m}$, quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

d) Dato che $\frac{1}{\sqrt{m(m^3+1)}} \cdot m^2 \rightarrow 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}$

converge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

e) Se $m \geq 2$, $\frac{m!}{(2m)!} = \frac{m!}{2m(2m-1)\dots(m+1) \cdot m!} \leq \frac{1}{2m(2m-1)}$

quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(2m)!}$ converge per confronto con

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2m(2m-1)}$, che a sua volta converge

per confronto asintotico con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

f) $\frac{1+2+\dots+m}{m^3} = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{m+1}{2m^2}$ asintotica a $\frac{1}{2m}$,

perciò $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^3}$ diverge per confronto asintotico

con la serie armonica.

$$4. a) \sum_{n=1}^K \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^K \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{K}} - \frac{1}{\sqrt{K+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{K+1}} = 1 + o(1)$$

$$\text{Quindi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \sum_{n=2}^K \frac{1}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^K \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{K-2} - \frac{1}{K} + \frac{1}{K-1} - \frac{1}{K+1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} \right] \rightarrow \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

$$c) \quad \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad \text{Quindi}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^K \frac{n+1/2}{n^2(n+1)^2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{K^2} - \frac{1}{(K+1)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(K+1)^2} \right) = \frac{1}{2} + o(1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$5 - \sqrt[n]{\frac{m^2}{x^n}} = \frac{\sqrt[n]{m^2}}{x} \rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Per il criterio della radice n -esima, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^2}{x^n}$ converge se $x > 1$.

Se $0 < x \leq 1$, $\frac{m^2}{x^n} \geq m^2$, dunque la serie non converge, dato che il suo termine generale non è infinitesimo.

$$6 - a) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1})} \quad \text{è asintotica a}$$

$$2 \cdot \frac{1}{n} \quad \text{Quindi } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \text{ diverge per}$$

confronto asintotico con la serie armonica

$$b) \frac{1}{m^2 - m} = \frac{1}{m^2 + o(m^2)} = \frac{1}{m^2} \frac{1}{1 + o(1)} = \frac{1}{m^2} (1 + o(1)) \sim$$

asintotica a $\frac{1}{m^2}$, quindi $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 - m}$ converge per

confronto asintotico con $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$.

$$c) (\sqrt[m]{m e^{-m}})^{1/m} = \sqrt[m]{m} \cdot e^{-1} \rightarrow e^{-1} < 1 \text{ quindi la}$$

serie $\sum_{m=0}^{\infty} \sqrt[m]{m e^{-m}}$ converge per il criterio della radice m -esima

$$d) \sqrt[m]{\frac{e^{mx}}{m}} = \frac{e^x}{\sqrt[m]{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Quindi la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{mx}}{m}$ converge se $x < 0$, per

il criterio della radice m -esima. Se $x \geq 0$ si ha

$$\frac{e^{mx}}{m} \geq \frac{1}{m}, \text{ quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica}$$

$$e) \text{ Se } m \geq 2 \quad \frac{m!}{m^m} = \frac{m \cdot (m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{m \cdot m \cdots m} \leq 1 \cdot \frac{2}{m^2} = \frac{2}{m^2},$$

quindi $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m!}{m^m}$ converge per confronto con $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^2} < +\infty$.

f) Abbiamo visto tempo fa che

$$\log m! = m \log m - m + o(m) = m \log m + O(m)$$

$$\text{Quindi } \frac{\log m!}{m^3} = \frac{1}{m^2} \log m + O\left(\frac{1}{m^2}\right) = O\left(\frac{1}{m^{3/2}}\right)$$

Perciò $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log m!}{m^3}$ converge per confronto asintotico con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$$

7. Sia x_m la frazione di metro percorsa dopo m minuti (indifferentemente prima o dopo che lo spirito maligno abbia allungato il metro, visto che in questo processo la frazione di metro percorsa non cambia).

Perciò $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = \frac{30}{200} = \frac{3}{20} = \frac{1}{10} + \frac{3}{20}$

Tra l' $(m-1)$ -esimo e l' m -esimo minuto il metro misura m metri, quindi in questo minuto il baco percorre una frazione $\frac{1}{10m}$ del metro. Ne segue che

$$x_K = \sum_{m=1}^K \frac{1}{10 \cdot m} = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^K \frac{1}{m}$$

Dato che la serie armonica diverge, esiste K tale che $x_K \geq 1$, e dopo K secondi il baco ha raggiunto la meta.