

Soluzioni esercizi 10.11.2011

1) a) per $x \rightarrow 0$ $\frac{\log(1+10x)}{x} = \frac{10x + o(x)}{x} = 10 + o(1)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+10x)}{x} = 10$

b) per $x \rightarrow 0^+$ $e^{1/x} \rightarrow +\infty$, da cui
 $\frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1} = \frac{1 + 3/e^{1/x}}{1 + 1/e^{1/x}} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow 1$

per $x \rightarrow 0^-$ $e^{1/x} \rightarrow 0$, da cui
 $\frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1} \rightarrow 3$

Dato che $1 \neq 3$, non esiste il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1}$

c) per $x \rightarrow 1^+$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow 0$

$\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} \rightarrow 1$

per $x \rightarrow 1^-$, $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} \rightarrow 0$

Dato che $1 \neq 0$, non esiste il $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$

d) $(1 + \frac{2}{x})^x = \exp(x \log(1 + \frac{2}{x})) = \exp(x(\frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})))$

$= \exp(2 + o(1)) = e^2 + o(1)$ poiché $\exp$ è
 continua

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^2$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} &= \exp\left(\frac{x}{x+1} \log \frac{1}{x^3}\right) = \exp\left(\frac{x}{x+1} (\log 1 - \log x^3)\right) \\
 &= \exp\left(-\frac{x}{x+1} \log x^3\right) = \exp\left(-\frac{3x}{x+1} \log x\right) = \\
 &= \exp\left(-\frac{3}{1+\frac{1}{x}} \log x\right)
 \end{aligned}$$

Per $x \rightarrow +\infty$ $-\frac{3}{1+\frac{1}{x}} \log x \rightarrow -\infty$, quindi

il suo esponentiale è infinitesimo. Dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 0$$

$$f) \quad x^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \log x}$$

per $x \rightarrow 0+$ $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, $\log x \rightarrow -\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \log x \rightarrow -\infty$$

Dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x} \log x} = 0$$

$$g) \quad \frac{\log(1+x) - x}{3x+2} = \frac{o(1)}{o(1)+2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{3x+2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 h) \quad \text{Per } x \rightarrow 0, \quad \frac{3x}{1-e^{2x}} &= \frac{3x}{1-(1+2x+o(x))} = \\
 &= \frac{3x}{-2x+o(x)} = \frac{3}{-2+o(1)} \rightarrow -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1-e^{2x}} = -\frac{3}{2}$$

$$i) \quad \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{2x} = \exp\left(2x \log\left(1 + \frac{7}{x}\right)\right) =$$

$$\text{per } x \rightarrow -\infty \quad = \exp\left(2x \left(\frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \exp\left(14 + o(1)\right) \rightarrow e^{14}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{2x} = e^{14}$$

2) Risultato, per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{1 + x + o(x) - (1 - x + o(x))}{x}$$

$$= \frac{2x + o(x)}{x} = 2 + o(1)$$

$$\text{Dunque occorre scegliere } a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$$

3) Per $x \geq 0$ si ha

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

La funzione $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ è strettamente decrescente

su $[0, +\infty[\Rightarrow f$ è strett. crescente su $[0, +\infty[$

Dato che

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1$$

essendo f continua, f manda $[0, +\infty[$ bigettivamente su $[0, 1[$.

Dato che f è una funzione dispari, ossia

$f(-x) = -f(x)$, f manda $]-\infty, 0]$ bigettivamente

su $]-1, 0]$. Perciò f è bigettiva da $\mathbb{R}$ a $]-1, 1[$

Determiniamo l'inversa di f . Sia $y \in]-1, 1[$.

Risolviamo l'equazione $f(x) = y$ nelle incognite x :

$$\frac{x}{1 + |x|} = y \Leftrightarrow x = y + |x|y$$

$$\Leftrightarrow x - |x|y = y$$

Se $y \geq 0$ si deve avere $x \geq 0$, da cui

$$x(1 - y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1 - y}$$

Se $y < 0$ si deve avere $x < 0$, da cui

$$x(1 + y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1 + y}$$

Riassumendo

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1 - y} & \text{per } y \geq 0 \\ \frac{y}{1 + y} & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

o in forma compatta,

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

4) Risulta $p(0) = a_0 < 0$, mentre

$$p(x) = x^m \sum_{j=0}^m a_j \frac{x^j}{x^m} = x^m \left(a_m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j x^{j-m} \right)$$

$$= x^m (a_m + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow \pm \infty$$

da cui $p(x) > 0$ per x molto grande o x molto piccolo, dato che m è pari e $a_m > 0$.

In particolare, esiste $x_0 > 0$ tale che
 $p(x_0) > 0$ e $p(-x_0) > 0$

Per il teorema degli zeri applicato agli intervalli
 $[0, x_0]$ e $[-x_0, 0]$, esistono radici
 $y \in]0, x_0[$ e $z \in]-x_0, 0[$
di p , come richiesto.

Un esempio è

$$p(x) = x^m - 1$$

Infatti p è strett. crescente su $[0, +\infty[$ e
strett. decrescente su $]-\infty, 0]$. Quindi possiede
un'unica radice negativa ed un'unica radice
positiva (che in effetti sono $x = \pm 1$).

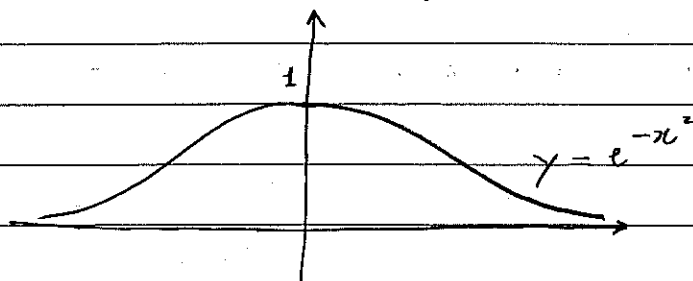
5) La funzione $x \mapsto -x^2$ è strettamente
decrescente su $[0, +\infty[$. Dunque $f(x) = e^{-x^2}$
è strettamente decrescente su $[0, +\infty[$.

Inoltre

$$f(0) = e^{-0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$

Infine, $f(x)$ è una funzione pari, ossia
 $f(-x) = f(x)$, perciò f è strettamente
crescente su $]-\infty, 0]$, con
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$

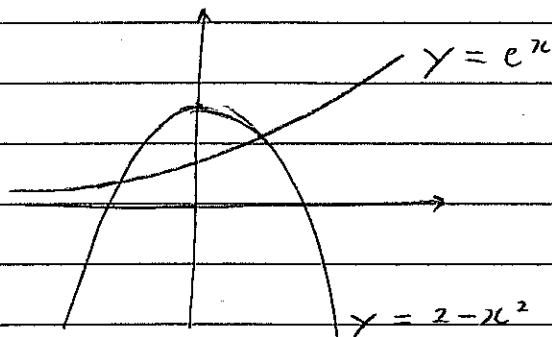
Deduciamo che f ha un grafico della forma



6) L'equazione può essere riscritta come

$$e^x = 2 - x^2$$

Tracciando i grafici delle funzioni $x \mapsto e^x$
e $x \mapsto 2 - x^2$ si trova



da cui si deduce l'esistenza di esattamente 2
soluzioni, una negativa e una positiva.

Più formalmente: la funzione

$$f(x) = e^x + x^2$$

è strett. crescente su $[0, +\infty[$. Quindi $f(x) = 2$

ha al più una soluzione positiva. Dato che

$$f(0) = 1 + 0 = 1 < 2 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 2,$$

$f(x) = 2$ ha effettivamente una soluzione positiva.

Analogamente, $f(x) = e^x + x^2$ è strettamente decrescente
su $]-\infty, 0]$ (ma per dimostrare questo servono le

derivate ...) e dato che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si conclude
che $f(x) = 2$ ha esattamente una soluzione negativa.

7) A lezione (10.11.2011) abbiamo visto che

$$\sqrt[m]{m!} = \frac{m}{e} + o(m) \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

Questo sviluppo può essere riscritto come:

$$\sqrt[m]{m!} = m \left(\frac{1}{e} + o(1) \right)$$

e prendendo il logaritmo:

$$\log \sqrt[m]{m!} = \log \left[m \left(\frac{1}{e} + o(1) \right) \right]$$

$$\frac{1}{m} \log m! = \log m + \log \left(\frac{1}{e} + o(1) \right)$$

$$\log m + \log \frac{1}{e} + o(1)$$

$$\log m - 1 + o(1)$$

Moltiplicando per m :

$$\log m! = m \log m - m + o(m)$$

8) La costruzione descritta rende le m^m funzioni da X_m in X_m equiprobabili. Di queste, $m!$ sono permutazioni.

a) La probabilità che una funzione random sia una permutazione è $\frac{m!}{m^m}$. Dato che $\frac{m!}{m^m} \rightarrow 0$ per $m \rightarrow \infty$, la probabilità che una funzione random sia una permutazione è infinitesima per $m \rightarrow \infty$.

b) La probabilità che generando K funzioni random vi sia almeno una permutazione è $1 -$ (la probabilità che nessuna sia una permutazione).

La probabilità che una funzione random non sia una permutazione è $1 - \frac{m!}{m^m}$.

Quindi la probabilità che generando K funzioni

random nessuna sia una permutazione è

$$\left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)^K$$

Concludiamo che la probabilità che di queste K almeno una sia una permutazione è

$$1 - \left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)^K$$

Esaminiamo ora le varie scelte di K proposte.

Per $K = n$ si ha, usando lo sviluppo $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)^n &= \exp\left[n \log\left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)\right] = \\ &= \exp\left[-n \frac{n!}{n^n} + o\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right] = \exp[o(1)] \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Quindi la probabilità che tra n funzioni random $X_1 \rightarrow X_n$ una almeno sia una permutazione è infinitesima per $n \rightarrow \infty$.

Per $K = 2^n$ si ha

$$\left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)^{2^n} = \exp\left[2^n \log\left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)\right] = \exp\left[-\frac{2^n n!}{n^n} (1 + o(1))\right]$$

Per l'esercizio (7),

$$\begin{aligned} \log \frac{2^n n!}{n^n} &= n \log 2 + \log n! - n \log n = \\ &= n \log 2 + n \log n - n + o(n) - n \log n \\ &= (\log 2 - 1)n + o(n) \rightarrow -\infty \quad \text{poiché } \log 2 < 1 \end{aligned}$$

Perciò $\frac{2^n n!}{n^n} \rightarrow 0$, da cui

$$\left(1 - \frac{n!}{n^n}\right)^{2^n} = \exp\left[-\frac{2^n n!}{n^n} (1 + o(1))\right] = \exp(o(1)) \rightarrow 1$$

Quindi la probabilità che tra 2^n funzioni random

da X_m in X_m una elemento sia una permutazione
è ancora infinitesimale per $m \rightarrow \infty$.

Per $K = 3^m$ si ha, con gli stessi passaggi di prima,

$$\log \frac{3^m m!}{m^m} = (\log 3 - 1)m + o(m) \rightarrow +\infty \text{ poich\'e } \log 3 > 1$$

Perciò $\frac{3^m m!}{m^m} \rightarrow +\infty$ per $m \rightarrow \infty$, da cui

$$\left(1 - \frac{m!}{m^m}\right)^{3^m} = \exp \left[\underbrace{- \frac{3^m m!}{m^m} (1 + o(1))}_{\downarrow -\infty} \right] \rightarrow 0$$

Concludiamo che la probabilità che tra 3^m funzioni
random da X_m in X_m uno almeno sia una permuta-
zione tende a 1 per $m \rightarrow \infty$.