

Soluzioni esercizi 6.12.2011

1) a) Studiamo il segno della derivata di f :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \log x) \cdot 1}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2}$$

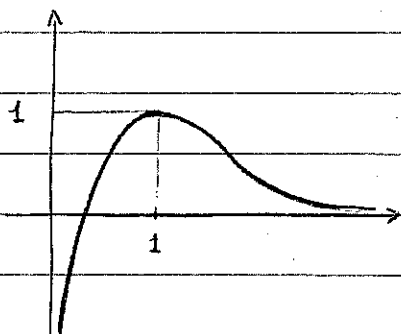
Quindi $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ per $x > 1$,
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ne segue che f è strettamente
 crescente in $]0, 1[$, raggiunge il suo massimo per
 $x = 1$, dove $f(1) = \frac{1 + \log 1}{1} = 1$, ed è strettamente
 decrescente in $]1, +\infty[$.

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \log x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \log x}{x} = 0$$

Quindi il grafico di f è approssimativamente:



b) Dato che $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ si ha

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + x} \quad \text{per } x \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1 - e^x}{1 - x} \quad \text{per } x \leq 0$$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non necessariamente
 in 0. Poniamo

$$f_+(x) := \frac{e^x - 1}{1 + x} \quad ; \quad f_-(x) = \frac{1 - e^x}{1 - x}$$

$$f'_+(x) = \frac{e^x(1+x) - (e^x-1) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{xe^x + 1}{(1+x)^2} > 0 \quad \text{per } x \geq 0$$

dunque f , che coincide con f_+ su $[0, +\infty[$, è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ e

$$f(0) = f_+(0) = \frac{e^0 - 1}{1 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{1 + x} = +\infty \quad \text{Studiamo ora } f_-:$$

$$f'_-(x) = \frac{-e^x(1-x) - (1-e^x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{(1-x)^2}$$

$$f'_-(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)e^x + 1 \geq 0$$

Dato che $x-2 < 0$ su $]-\infty, 0]$, su tale intervallo questa disuguaglianza equivale a

$$-e^x + \frac{1}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq \frac{1}{2-x}$$

$$\text{Per } x = 0 \text{ si ha } e^x = 1 > \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dal fatto che } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{2-x}} = 0, \text{ deduciamo che}$$

per x sufficientemente piccolo $e^x < \frac{1}{2-x}$. Per il teorema degli zeri, esiste $\bar{x} < 0$ tale che $e^{\bar{x}} = 1/(2-\bar{x})$.

Dato che $f''_-(x) = (x-1)e^x < 0$ per $x \leq 0$, f'_- risulta strettamente decrescente, perciò $\bar{x}$ è l'unico zero di f'_- su $]-\infty, 0]$ e si ha $f'_-(x) > 0$ su $]-\infty, \bar{x}[$ e $f'_-(x) < 0$ su $]\bar{x}, 0[$.

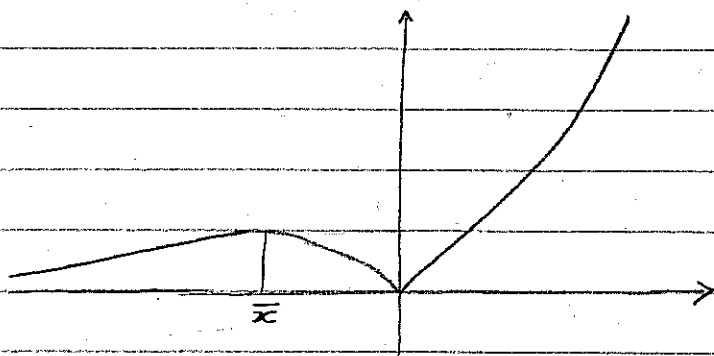
Perciò f cresce strettamente in $]-\infty, \bar{x}[$, raggiunge un massimo locale in $\bar{x}$ e decresce strettamente in $]\bar{x}, 0[$.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 - x} = 0$

Infine $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'_+(0) = 1$

$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'_-(0) = -1$

dunque f non è derivabile in 0. Il suo grafico è qualcosa del tipo



2) a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$
 $= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^x \cdot e^{-x} = 1$

b) $D \sinh x = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$D \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

$D \tanh x = \frac{D \sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$

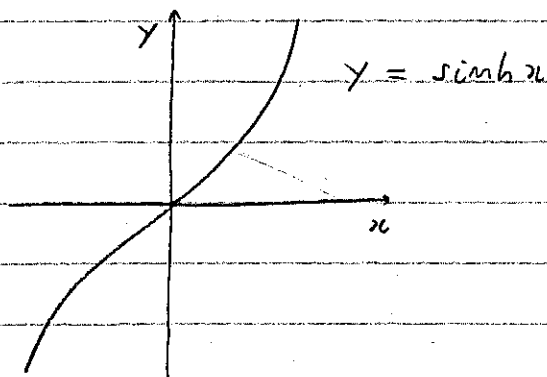
c) $\sinh x$ è una funzione dispari. Inoltre

$D \sinh x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 1$

↑
disuguaglianza
aritmetica geometrica

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

Quindi il seno iperbolico ha un grafico del tipo:



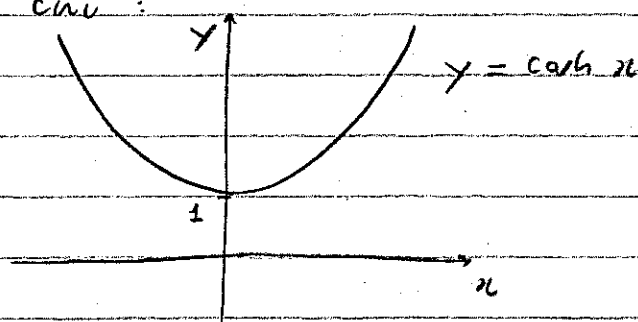
Invece $\cosh x$ è una funzione pari; come abbiamo visto, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$ e vale $= 1 \Leftrightarrow e^x = e^{-x}$ ossia $\Leftrightarrow x = 0$.

Inoltre $D \cosh x = \sinh x > 0$ in $]0, +\infty[\Leftrightarrow \cosh x$ è strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

Infine

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

da cui:



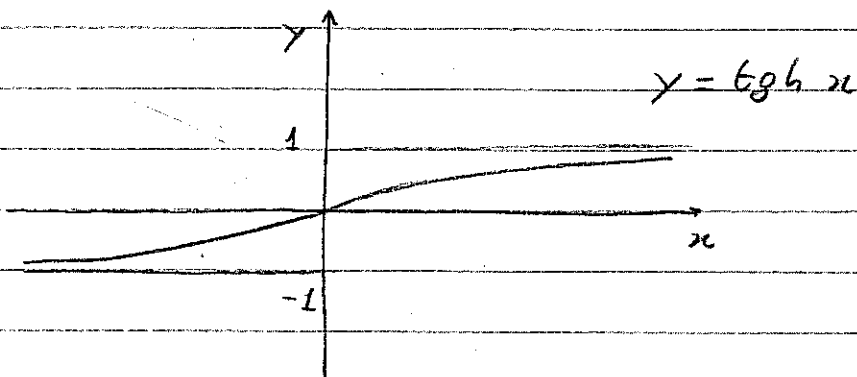
$$\text{Infine } D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \tanh x$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Inoltre $\bar{e}$ una funzione dispari e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

da cui



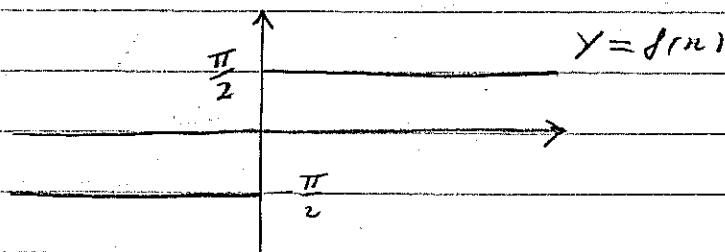
$$\begin{aligned} 3) \text{ Si ha } f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

Ne segue che f è costante su $]0, +\infty[$ e su $] -\infty, 0[$

$$\text{Dato che } f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{e } f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

si ha



$$4) \text{ Sia } f(x) = x e^{\sqrt[3]{x}} \quad \text{Allora}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x}} - x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} e^{\sqrt[3]{x}} = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right) e^{\sqrt[3]{x}}$$

da cui $f'(x) < 0$ su $]0, \frac{1}{4}[$

$$f'(\frac{1}{4}) = 0$$

$f'(x) > 0$ su $] \frac{1}{4}, +\infty[$

Perciò f decresce in $]0, \frac{1}{4}[$ e cresce in $] \frac{1}{4}, +\infty[$

Ne segue che

$$f(\frac{1}{4}) = \min_{x > 0} f(x)$$

Dato che $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} = \frac{e^2}{4}$, deduciamo che

$$x e^{\frac{1}{4}x} \geq \frac{e^2}{4} \quad \forall x > 0$$

e in particolare $x e^{\frac{1}{4}x} > 1 \quad \forall x > 0$ poiché $\frac{e^2}{4} > 1$

5) f è continua su $[0, 3]$, che è chiuso e limitato. Quindi per il Teorema di Weierstrass possiede ivi massimo e minimo.

Poiché

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x \\ &= (x-1)(x-2)e^x \end{aligned}$$

la derivata di f si annulla esattamente nei punti $x=1$ e $x=2$, entrambi appartenenti a $[0, 3]$. I punti di massimo e minimo di f vanno cercati tra questi e tra gli estremi dell'intervallo. Dato che

$$f(1) = 3e, \quad f(2) = e^2, \quad f(0) = 7, \quad f(3) = e^3$$

si ha

$$\min_{[0, 3]} f = 7, \quad \max_{[0, 3]} f = e^3$$

6) Per il teorema di Weierstrass, f ha massimo e minimo su $[0, \pi/2]$. Risultare

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x = \\ &= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 4 \sin^2 x \cos x \\ &= \cos x (\cos^2 x - 5 \sin^2 x) = \cos x (1 - 6 \sin^2 x) \end{aligned}$$

Perciò $f'(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
oppure $\sin^2 x = \frac{1}{6}$

Nell'intervallo $[0, \pi/2]$, f' si annulla esattamente nei punti

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$$

I punti di massimo e minimo vanno cercati tra i punti $0, \frac{\pi}{2}$ e $\arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Risultare

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\begin{aligned} f\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}\right) &= \sin x (1 - 2 \sin^2 x) \Big|_{x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(1 - 2 \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Dunque $\min_{[0, \pi/2]} f = -1$, $\max_{[0, \pi/2]} f = \frac{2}{3\sqrt{6}}$

7) I semiasse dell'ellisse sono 2 e 3, inoltre ogni rettangolo inscritto ha i lati paralleli agli assi coordinati. Consideriamo un rettangolo inscritto R e supponiamo che i suoi lati paralleli all'asse x abbiano ascisse x e $-x$.

Allora i lati paralleli all'asse x hanno ordinate
 $y = \pm 3 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Dunque l'area di R è

$$A(x) = 2x \cdot 6 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 12x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Dobbiamo determinare il massimo di A su $[0, 2]$.

Risulta, $\forall x \in]0, 2[$,

$$A'(x) = 12 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + 12x \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{4} \cdot 2x\right) =$$

$$= 12 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - 3x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

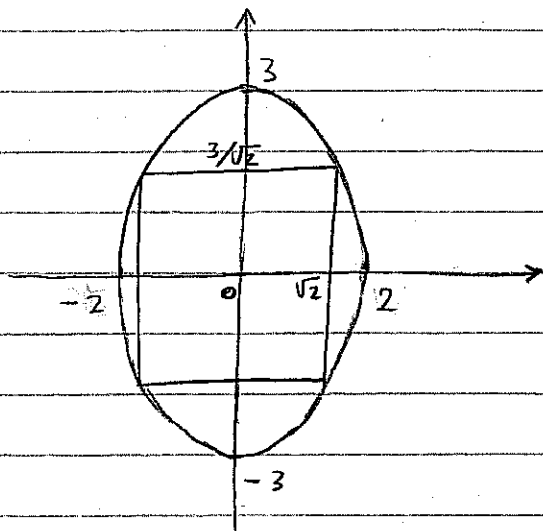
$$= 3 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(4 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - x^2\right) = 6 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} (2 - x^2)$$

Quindi $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Dat. da

$$A(0) = 0 = A(2) \quad \text{e} \quad A(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 12,$$

il rettangolo di area massima si ottiene per

$x = \sqrt{2}$ e $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ed ha area 12:



8) Sia $f(x) = e^x - mx + q$ f è una funzione continua e le soluzioni dell'equazione sono le x per cui $f(x) = 0$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ q & \text{se } m = 0 \\ -\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Inoltre $f'(x) = e^x - m$

Se $m \leq 0$, si ha $f'(x) = e^x - m > e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
 quindi f è strettamente crescente.

Tenendo conto dei limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$,
 otteniamo:

a) se $m < 0$ allora l'equazione ha una soluzione
 per ogni $q \in \mathbb{R}$

b) se $m = 0$ e $q < 0$ allora l'equazione ha
 una soluzione.

c) se $m = 0$ e $q \geq 0$ allora l'equazione non
 ha soluzioni.

Supponiamo ora $m > 0$. Allora

$$\begin{aligned} f' &> 0 \text{ su }]\log m, +\infty[, \quad f'(\log m) = 0, \\ f' &< 0 \text{ su }]-\infty, \log m[\end{aligned}$$

Quindi $\log m$ è l'unico punto di minimo globale,
 dove

$$f(\log m) = m - m \log m + q = m(1 - \log m) + q$$

Tenendo conto del fatto che $f(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$,
 otteniamo:

a) se $m(1 - \log m) + q < 0$, ossia se

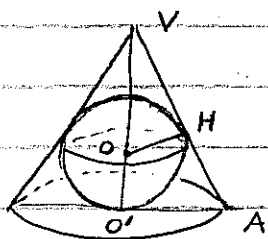
$$q < m(\log m - 1)$$

allora l'equazione ha 2 soluzioni

b) se $q = m(\log m - 1)$, allora l'equazione ha una soluzione

c) se $q > m(\log m - 1)$ allora l'equazione non ha soluzioni

9)



Supponiamo che la sfera abbia raggio 1

Sia $x > 1$ il raggio della base del cono

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $AO'V$ e OHV ricaviamo che, posto $OV = y$

$$\frac{O'A}{OH} = \frac{AV}{OV} \quad \text{ossia} \quad \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{x^2 + (1+y)^2}}{y} \quad \text{da cui}$$

$$xy = \sqrt{x^2 + (1+y)^2} \Leftrightarrow x^2 y^2 = x^2 + (1+y)^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)y^2 - 2y - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2(x^2 - 1)}}{x^2 - 1} \quad (\text{l'altra soluzione va scartata, in quanto negativa})$$

Quindi:

$$AV = OV \cdot \frac{O'A}{OH} = y \cdot \frac{x}{1} = xy = \frac{x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + x^2(x^2 - 1)}$$

e la superficie laterale è

$$S(x) = \pi \cdot O'A \cdot AV = \pi \frac{x^2}{x^2 - 1} \sqrt{1 + x^2(x^2 - 1)}, \quad \forall x > 1$$

Derivando:

$$S'(x) = \pi \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \sqrt{1+x^2(x^2-1)} + \pi \frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{4x^3-2x}{\sqrt{1+x^2(x^2-1)}} =$$

$$= \pi \left(\frac{2x}{(x^2-1)^2} \sqrt{1+x^2(x^2-1)} + \frac{x^3(2x^2-1)}{(x^2-1)\sqrt{1+x^2(x^2-1)}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{(x^2-1)^2 \sqrt{1+x^2(x^2-1)}} \left(-2x(1+x^2(x^2-1)) + x^3(2x^2-1)(x^2-1) \right)$$

$$= \frac{-2x - 2x^5 + 2x^3 + 2x^7 - 2x^5 - x^5 + x^3}{(x^2-1)^2 \sqrt{1+x^2(x^2-1)}} = \frac{2x^7 - 5x^5 + 3x^3 - 2x}{(x^2-1)^2 \sqrt{1+x^2(x^2-1)}} = \frac{x(2x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 2)}{(x^2-1)^2 \sqrt{1+x^2(x^2-1)}}$$

Dato che $x > 1$,

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 2 = 0$$

Con il cambio di variabile $x^2 = z$, otteniamo l'equazione di terzo grado

$$2z^3 - 5z^2 + 3z - 2 = 0 \quad \text{con } z = x^2 > 1$$

Dato che $z = 2$ è soluzione, il polinomio si fattorizza:

$$2z^3 - 5z^2 + 3z - 2 = (z-2)(2z^2 - z + 1)$$

dove $2z^2 - z + 1 > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ poiché $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

Concludiamo che

$$S'(x) = \frac{\pi(x^2-2)(2x^4 - x^2 + 1)}{(x^2-1)^2 \sqrt{1+x^2(x^2-1)}} \quad \text{è negativa}$$

su $]1, \sqrt{2}[$ e positiva su $]\sqrt{2}, +\infty[$. Perciò $\sqrt{2}$ è punto di minimo per S . Il cono di superficie laterale minima ha base di raggio $\sqrt{2}$ e

$$S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}\pi$$

1o) Risultato:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+x^2 - (x-1)2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1+2x-x^2+1+x^2}{(1+x^2)^2} = 2 \frac{1+x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Dallo studio del segno di f' ricaviamo che f è strettamente decrescente su $]-\infty, -1]$ e strettamente crescente su $]-1, +\infty[$.

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -1 + \operatorname{arctg}(-1) = -1 - \frac{\pi}{4}$$

Dunque $f < 0$ su $]-\infty, -1]$, mentre per il teorema degli zeri f ha uno zero in $]-1, +\infty[$, che per la stretta crescita è unico.