

Soluzioni esercizi 6.10.2011

$$1) a) \frac{m - 6m^4}{1 + m^2 + m^4} = \frac{\overset{-6}{\cancel{m^4}} - 6}{\underset{+1}{\cancel{m^4}} + \cancel{m^2} + 1} \rightarrow -6$$

Quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m - 6m^4}{1 + m^2 + m^4} = -6$

$$b) \sqrt{m} - \sqrt{m-1} = \frac{(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}} = \frac{m - (m-1)}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}} = \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}$$

Il denominatore tende a $+\infty$, quindi la frazione tende a 0.
Perciò $\lim_{m \rightarrow \infty} (\sqrt{m} - \sqrt{m-1}) = 0$.

$$c) \frac{2^m}{m!} = \frac{2}{m} \cdot \frac{2}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1}$$

I termini da $\frac{2}{m-1}$ fino a $\frac{2}{2}$ sono tutti ≤ 1 ,
dunque lo stesso vale per il loro prodotto. Perciò
abbiamo la maggiorazione

$$\frac{2^m}{m!} \leq \frac{2}{m} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{m}$$

Dato che $\frac{4}{m} \rightarrow 0$ e $\frac{2^m}{m!} > 0$, concludiamo $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m}{m!} = 0$.

$$d) \frac{m!}{m^m} = \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \dots \cdot \frac{2}{m} \cdot \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m} \text{ poiché i primi}$$

$m-1$ termini sono tutti ≤ 1 . Dato che $\frac{1}{m} \rightarrow 0$
e che $\frac{m!}{m^m} > 0$, concludiamo per confronto che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{m^m} = 0$$

$$e) \frac{(-1)^m + 2}{(-1)^{m+1} - 2} \text{ vale } \frac{3}{-3} = -1 \text{ se } m \text{ è pari, e vale}$$

$\frac{1}{-1} = -1$ se m è dispari. La successione è costantemente
uguale a -1 , dunque il suo limite è -1 .

$$f) \frac{m + (-1)^m}{m - (-1)^m} = \frac{1 + \frac{(-1)^m}{m}}{1 - \frac{(-1)^m}{m}} \rightarrow 1$$

$\frac{(-1)^m}{m} \rightarrow 0$ (top) and $\frac{(-1)^m}{m} \rightarrow 0$ (bottom)

Dunque $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m + (-1)^m}{m - (-1)^m} = 1$

$$g) \frac{(m+1)! - m!}{m^2 3^m} = \frac{m! (m+1-1)}{m^2 3^m} = \frac{m!}{m^2 3^m} = \frac{(m-1)!}{3^m}$$

Ragionando come nel caso (c), $\frac{(m-1)!}{3^m} \rightarrow +\infty$

Dunque $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)! - m!}{m^2 3^m} = +\infty$

$$h) \sqrt[m]{3^{2m} m^3} = 3^2 \sqrt[m]{m^3} = 9 \sqrt[m]{m^3}$$

Per quanto abbiamo visto a lezione, $\sqrt[m]{m^3} \rightarrow 1$

Quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{3^{2m} m^3} = 9$

i) Ragionamento simile al caso (c):

$$\frac{a^m}{m!} = \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m-1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1}$$

Fissa $k \in \mathbb{N}$ tale che $k \geq a$ (per esempio, $k = \lceil a \rceil$)

Allora $\forall m > k$ si ha $\frac{a}{m} \leq \frac{a}{k} \leq 1$.
 Se $m > k$ si ha

$$\frac{a^m}{m!} = \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m-1} \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k-1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1} \leq \frac{a}{m} \cdot \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$$

ciascun termine ≤ 1

$$\Rightarrow \frac{a^m}{m!} \leq \frac{a^k}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{m} \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow \infty$$

Per confronto, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a^m}{m!} = 0$

2) Dato che $\frac{a}{2} < a < 2a$ e $a_m \rightarrow a$, risulta
 $\frac{a}{2} < a_m < 2a$ definitivamente. Perciò

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_m} < \sqrt[n]{2a} \quad \text{definitivamente.}$$

Come visto a lezione, le successioni a sinistra e a destra tendono a 1. Per confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_m} = 1.$$

$$3) \sqrt[n]{\frac{3^n + n^2}{2^n + n^3}} = \sqrt[n]{\frac{3^n(1 + n^2 3^{-n})}{2^n(1 + n^3 2^{-n})}} = \frac{3}{2} \sqrt[n]{\frac{1 + n^2 3^{-n}}{1 + n^3 2^{-n}}}$$

Dato che $n^2 3^{-n} \rightarrow 0$ e $n^3 2^{-n} \rightarrow 0$, la frazione sotto la radice n -esima tende a 1. Per l'esercizio

(2), la sua radice n -esima tende a 1.

Concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + n^2}{2^n + n^3}} = \frac{3}{2}$$

4) a) Nelle somme

$$a_m := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

comprende $n+1$ termini, ciascuno dei quali $\leq$

$$\frac{1}{n^2}. \quad \text{Quindi} \quad a_m \leq \frac{n+1}{n^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_0 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_1 \rightarrow 0$$

Per confronto, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_m = 0$.

b) Nelle somme $b_m := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$

comprende $n+1$ termini, ciascuno dei quali $\geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$

$$\text{Quindi} \quad b_m \geq \frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \underbrace{\sqrt{\frac{n}{2}}}_{+\infty} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}}_0 \rightarrow +\infty \quad \text{Quindi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_m = +\infty$$

5) Siano A e B i limiti di (a_n) e (b_n) , rispettivamente. Fissa $\varepsilon > 0$. Definitivamente si ha

$$A - \varepsilon \leq a_n \leq b_n < B + \varepsilon,$$

da cui $A < B + 2\varepsilon$. Dato che questa disuguaglianza vale $\forall \varepsilon > 0$, deduciamo che $A \leq B$ (se fosse $A > B$, scelto $0 < \varepsilon < \frac{B-A}{2}$ avremmo

$$A < B + 2\varepsilon < B + B - A = 2B - A$$

da cui $2A < 2B \Rightarrow A < B$, assurdo.)

Un esempio in cui $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$ ma i limiti coincidono è $a_n = -\frac{1}{n+1}$, $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

6) Consideriamo solo il caso $0 < L < +\infty$ (i casi $L=0$ e $L=+\infty$ sono analoghi, anzi leggermente più semplici). Fissiamo $\varepsilon > 0$ t.c. $2\varepsilon < L$.

Da $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$ deduciamo che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \text{definitivamente}$$

da cui

$$(L - \varepsilon) a_n < a_{n+1} < (L + \varepsilon) a_n \quad \forall n \geq n_0$$

per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$. Iterando queste disuguaglianze, troviamo

$$(L - \varepsilon)^{m-n_0} a_{n_0} < a_m < (L + \varepsilon)^{m-n_0} a_{n_0} \quad \forall m \geq n_0$$

da cui

$$(L - \varepsilon)^m \sqrt[m]{\frac{a_{n_0}}{(L - \varepsilon)^{n_0}}} < \sqrt[m]{a_m} < (L + \varepsilon)^m \sqrt[m]{\frac{a_{n_0}}{(L + \varepsilon)^{n_0}}} \quad \forall m \geq n_0$$

La quantità a sinistra tende a $L - \varepsilon$, quella a destra a $L + \varepsilon$. In particolare, la quantità a sinistra è $> L - 2\varepsilon$ definitivamente e quella a destra è $< L + 2\varepsilon$ definitivamente. Perciò

$$L - 2\varepsilon < \sqrt[m]{a_m} < L + 2\varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

e per l'arbitrarietà di ε , $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_m} = L$.



Mostriamo che non vale l'implicazione opposta.
Fissiamo $L > 0$ e poniamo

$$a_n = \begin{cases} L^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ nL^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Allora n pari $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = L$

n dispari $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = L \sqrt[n]{n} \rightarrow L$

dunque $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$

Pero per n pari $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)L^{n+1}}{L^n} = (n+1)L \rightarrow +\infty$

mentre per n dispari $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{L^{n+1}}{nL^n} = \frac{L}{n} \rightarrow 0$,

dunque $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non ha limite.