

Soluzioni 5.3.2012

Es 1 $a(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$

$$\begin{aligned} b(x) &= x \sin^2 x \operatorname{tg} x = x \sin^3 x (\cos x)^{-1} = \\ &= x (x + o(x^2))^3 (1 + o(x))^{-1} = x (x^3 + o(x^4)) (1 + o(x)) = \\ &= x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(x) &= x \log(1+x) = x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) = \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + o(x^5) \end{aligned}$$

$$d(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x^2} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) (1 - x^2 + x^4 + o(x^4))$$

$$\begin{aligned} &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + x^5 + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$e(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \right.$$

$$\left. + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^{x+1} = 3 \cdot 3^x = 3 e^{x \log 3} = 3 \left(1 + \log 3 x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\log^2 3}{2} x^2 + \frac{\log^3 3}{3!} x^3 + \frac{\log^4 3}{4!} x^4 + \frac{\log^5 3}{5!} x^5 \right) \end{aligned}$$

$$g(x) = \log(1-x^2) = -x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

Es 2 $\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{x \sin^2 x}$

$$x \sin^2 x = x (x + o(x))^2 = x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \sin x \cos x - x &= \frac{1}{2} \sin 2x - x = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right) - x = \\ &= -\frac{2}{3} x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2/3 x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2/3 + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} - x \right) = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = 1$$

$$\frac{\log \cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\log \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \right) = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + \right.$$

$$\left. + o \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \right) = -\frac{1}{2} + o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Usando lo sviluppo $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ trovato nell'esercizio 1:

$$\frac{\cosh^2 x - 1 - x^2}{x^4} = \frac{1}{x^4} \left(\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^2 - 1 - x^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{x^4} \left(1 + \frac{x^4}{4} + x^2 + o(x^4) - 1 - x^2 \right) = \frac{1}{x^4} \left(\frac{x^4}{4} + o(x^4) \right)$$

$$= \frac{1}{4} + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1 - x^2}{x^4} = \frac{1}{4}$$

Es 3 $\operatorname{arctg}^5 x - 2 \sin^5 x + x^5 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) \right)^5$

$$- 2 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^5 + x^5 = x^5 \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5) \right)^5$$

$$- 2 x^5 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right)^5 + x^5 = x^5 \left(1 + \right.$$

$$\left. + 5 \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5) \right) + 10 \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^5) \right)^2 + o(x^4) \right) =$$

$$\frac{x^4}{9} + o(x^5)$$

$$\frac{x^4}{36} + o(x^5)$$

$$- 2x^5 \left(1 + 5 \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right) + 10 \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^5) \right)^2 + o(x^4) \right) + x^5 = x^5 - \frac{5}{3}x^7 + x^9 + \frac{10}{9}x^9 + o(x^9)$$

$$- 2x^5 + \frac{5}{3}x^7 - \frac{1}{12}x^9 + \frac{5}{9}x^9 + x^5 =$$

$$= \left(1 + \frac{10}{9} - \frac{1}{12} + \frac{5}{9} \right) x^9 + o(x^9) =$$

$$= \frac{36 + 40 - 3 + 20}{36} x^9 + o(x^9) = \frac{31}{12} x^9 + o(x^9)$$

Quindi occorre scegliere $\alpha = \frac{31}{12}$

Es 4

$$a) \log \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{6}x^2 = \log \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) +$$

$$+ \frac{1}{6}x^2 = \log \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right) + \frac{1}{6}x^2 =$$

$$= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right)^2 +$$

$$+ o \left(\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right)^3 \right) + \frac{1}{6}x^2 =$$

$$= \frac{x^4}{5!} + o(x^4) - \frac{1}{2} \frac{x^4}{(3!)^2} + o(x^6) + o(x^9) =$$

$$= \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{12} \right) x^4 + o(x^4) = -\frac{2}{5!} x^4 + o(x^4)$$

$$= -\frac{3}{100} x^4 + o(x^4) \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{100}, m = 4$$

$$b) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1}$$

$$= x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + o(x^2)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{x^3}{2} = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\operatorname{tg} x^3 - (\operatorname{tg} x)^3 = x^3 + \frac{1}{3}x^9 + o(x^9) - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^3$$

$$= x^3 + \frac{1}{3}x^9 + o(x^9) - x^3 \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)^3$$

$$= x^3 + \frac{1}{3}x^9 + o(x^9) - x^3 \left(1 + 3\left(\frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)\right)$$

$$= x^3 + \frac{1}{3}x^9 + o(x^9) - x^3 - x^5 + o(x^5) = -x^5 + o(x^5)$$

$$\alpha = -1, \quad m = 5$$

$$\underline{\text{Es 5}} \quad f(x) = \log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 =$$

$$= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + o(\sin^4 x) \\ - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(x + o(x^2)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x + o(x^2)\right)^4 + o(x^4) - x$$

$$+ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3$$

$$- \frac{1}{4}x^4 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$= x^4 \left(-\frac{1}{12} + o(1)\right)$$

Quindi 0 è un punto di massimo locale.

Es 6 $f(x) = \operatorname{arctg}^5 x - 2 \sin x^5 + x^5 =$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^5 - 2 \left(x^5 + o(x^{10})\right) + x^5 =$$

$$= x^5 \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)^5 - x^5 + o(x^{10}) =$$

$$= x^5 \left(1 + 5 \left(-\frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) + o(x^4)\right) - x^5 + o(x^{10})$$

$$= -\frac{5}{3} x^7 + o(x^8) = x^7 \left(-\frac{5}{3} + o(x)\right)$$

$x^7 > 0$ per $x > 0$ e $-\frac{5}{3} + o(x) < 0$ per $|x|$ piccolo

Ne segue che $f(x) < 0$ per $x > 0$ e piccolo

Es 7 Ricordiamo che f è pari se $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$
ed è dispari se $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

a) f dispari $\Rightarrow f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

b) Se f è pari, derivando l'uguaglianza

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si trova

$$-f'(-x) = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quunque f' è dispari.

c) Se f è dispari, derivando l'uguaglianza

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si trova

$$-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$$

Perciò f' è pari.

Es 8 Per il teorema di Lagrange

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

per qualche ξ strettamente compreso tra x_0 e x .

Al tendere di x a x_0 anche ξ tende a x_0 ,

dunque $f'(\xi)$ tende verso α . Concludiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

Es 9 Dimostriamo per induzione che la derivata

m -esima di f su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è della forma

$$(*) \quad f^{(m)}(x) = p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \quad \forall x \neq 0$$

dove p_m è un polinomio.

Per $m=0$ questo è vero con $p_0 = 1$. Se $(*)$ è

vera per m allora

$$f^{(m+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} p'_m\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} \right) e^{-1/x^2}$$

dunque $(*)$ è vera con $m+1$ se p_{m+1} è il polinomio

$$p_{m+1}(t) = -t^2 p'_m(t) + 2t^3$$

$$\text{Dato che } \lim_{x \rightarrow 0} f^{(m)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} =$$

$$= \lim_{|y| \rightarrow +\infty} p_m(y) e^{-y^2} = 0$$

il risultato dell'esercizio 8 applicato iterativamente

implica che f è derivabile infinite volte in 0 e

che $f^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.