

ANNO ACCADEMICO 2014–15
SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
MATEMATICA
SCRITTO STRAORDINARIO
PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

17 novembre 2015

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compito sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compito è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Determina, motivando la risposta, se la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$$

è iniettiva.

Esercizio 2. Calcola il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x}{1 + x^2} dx .$$

Esercizio 3. Determina per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i due vettori $\vec{v} = 2h\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + h\vec{k}$ sono ortogonali.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. Trova un esempio

- (i) di una funzione f definita e continua su tutto \mathbb{R} , periodica di periodo 4, che abbia come insieme immagine l'intervallo $[-5, -1]$;
- (ii) di una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pari, avente valore minimo 1 ed avente come asintoto la retta $y = 2$;
- (iii) di una funzione h definita e continua su tutto \mathbb{R} e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2\pi\}$ ma non in 2π .

Esercizio 5. Uno studio approfondito sulla variazione della popolazione di globuli rossi nel sangue di un paziente ha mostrato che la relazione fra il numero iniziale x di globuli rossi presenti in un campione di sangue a un certo istante e il numero $P(x)$ di nuovi globuli rossi prodotti in intervallo di tempo fissato può essere modellizzata dalla funzione

$$P(x) = bx^s e^{-\frac{sx}{r}},$$

dove b , r ed s sono parametri che dipendono dallo stato di salute del paziente.

- (i) Supponendo $b = 2$, $r = 5$ e $s = 5$ studia questa funzione, anche per $x < 0$.
- (ii) Determina, se esiste, il numero di cellule iniziali x_0 per cui la produzione di nuove cellule è massima.
- (iii) Descrivi cosa questo modello suggerisce sulla relazione fra il numero di globuli rossi iniziale e la produzione di nuovi globuli rossi (esiste un livello critico al di sotto del quale l'organismo non produce più globuli rossi? Cosa succede se il numero di globuli rossi presenti inizialmente è molto elevato? Eccetera...).

Esercizio 6. Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro il sistema ammette soluzione, e in tal caso trova le soluzioni) il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = t, \\ x - (t + 1)y + z = 2t, \\ x + y + (t + 1)z = 0. \end{cases}$$