

MATEMATICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

TERZO SCRITTO

14 settembre 2010

Nome e cognome

Matricola

ATTENZIONE: il testo del compito è su due pagine.

ISTRUZIONI: Non sono ammesse calcolatrici, libri di testo, cellulari, computer, dispense... Sono ammessi solo appunti scritti di proprio pugno. Giustificare tutte le risposte. Risposte del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette. Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta). In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

1. PARTE I

Esercizio 1.1. *In laboratorio ci sono 12 cavie nere e 11 bianche. In quanti modi puoi scegliere una terna ordinata fatta da due cavie nere e una bianca?*

Esercizio 1.2. *Posto*

$$f(x) = \frac{\log_2(x^2) - 1}{\log_2 x - 2},$$

determina il dominio di f e risolvi la disequazione $f(x) \geq 0$.

Esercizio 1.3. *Calcola l'integrale sull'intervallo $[0, 1]$ della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da*

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(2^x) - \log(x+1)}{\log_2(1+x^2)} \right).$$

2. PARTE II

Esercizio 2.1. *Un test diagnostico per una certa malattia fornisce un risultato positivo nel 92% dei casi in cui la malattia è effettivamente presente, e nel 6% dei casi in cui la malattia non è presente. Inoltre, la probabilità che un individuo preso a caso nella popolazione sia malato è $1/300$.*

- (i) *Calcola la probabilità che il test risulti positivo su un individuo preso a caso nella popolazione.*
- (ii) *Calcola la probabilità che un individuo preso a caso nella popolazione sia effettivamente malato sapendo che il test ha dato un risultato positivo.*

Esercizio 2.2. *Si osserva la schiusura delle uova in una certa popolazione di uccelli. Partendo da un tempo iniziale $t_0 = 0$ in cui tutte le uova sono chiuse, si osserva che dopo $t_1 = 1$ ore si sono schiuse in tutto $u_1 = 9$ uova, dopo $t_2 = 2$ ore in tutto $u_2 = 16$ uova, dopo $t_3 = 3$ ore in tutto $u_3 = 21$ uova.*

- (i) *Trova se esiste l'espressione esplicita di una funzione quadratica $u = u(t)$ (dove u sta per il numero totale di uova schiuse e t sta per il tempo trascorso) il cui grafico passi per i dati osservati.*
- (ii) *Ammesso che esista, per quale intervallo di tempi tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?*

Esercizio 2.3. *Un uliveto di 300 piante viene attaccato dalla mosca dell'olio. Indichiamo con $N(t)$ il numero delle piante infettate in funzione del tempo misurato in giorni, e osserviamo che al tempo iniziale $t = 0$ c'è una sola pianta attaccata dal parassita. Sappiamo anche che quella popolazione di mosche è particolarmente aggressiva, per cui sicuramente dopo un numero sufficiente di giorni tutte le piante saranno infettate. Supponendo che $N(t)$ dipenda dal tempo t secondo una funzione della forma*

$$N_x(t) = \frac{301}{1 + 300 \cdot e^{-xt}}.$$

dove x è un parametro reale.

- (i) *Studia la funzione $N_x(t)$ (anche per tempi negativi) al variare del parametro x . [Suggerimento: il segno di x potrebbe influenzare il comportamento qualitativo della funzione.]*
- (ii) *Per quali valori del parametro x tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?*
- (iii) *Per i valori di x ammissibili, determina in funzione di x quanti giorni occorrono perché tutte le piante siano attaccate dal parassita.*