Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quinto scritto A.A. 2012/13 — 9 gennaio 2014

Nome e Cognome:

---

1) Siano S_0 e S_1 due sottovarietà chiuse disgiunte di una varietà M. Costruisci una funzione $f \in C^\infty(M)$ tale che $f(M) \subset [0,1]$ e $f|_{S_j} \equiv j$ per $j = 0,\ 1$.

2) Sia $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un riferimento locale per il fibrato tangente TM di una n-varietà M sopra un aperto U, e sia $\{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n\}$ il riferimento locale duale di T^*M su U. Siano poi $c_{ij}^k \in C^\infty(U)$ le funzioni definite da

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k E_k$$

per $i,\ j,\ k = 1, \ldots, n$. Dimostra che

$$\mathrm{d}\epsilon^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^k \epsilon^i \wedge \epsilon^j$$

per $k = 1, \ldots, n$.

3) Sia M una varietà Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Dato $p_0 \in M$, sia $\sigma\colon I \to M$ la curva integrale del campo vettoriale $\operatorname{grad} f$ uscente da p_0.

(i) Dimostra che $\sigma \equiv p_0$ se e solo se p_0 è un punto critico di f.

(ii) Dimostra che se p_0 non è un punto critico di f allora la funzione $f \circ \sigma$ è strettamente crescente. [*Suggerimento:* ricorda che $\langle v, \operatorname{grad} f\rangle_p = df_p(v)$ per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$.]

(iii) Dimostra che se $I = \mathbb{R}$ e f è limitata allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in M$ tale che $\|\operatorname{grad} f(q)\|_q < \varepsilon$.