Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Secondo scritto A.A. 2012/13 — 16 settembre 2013

Nome e Cognome:

---

1) Sia $n \geq 1$, e considera la varietà differenziabile $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ diffeomorfa a $\mathbb{R}^{2n}$. Sia inoltre

$$M = \{(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|p - q\| = 1\} .$$

(i) Mostra che M è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
(ii) Calcola i gruppi di coomologia di de Rham di M. [*Suggerimento:* può essere utile mostrare che M è diffeomorfa al prodotto di $\mathbb{R}^n$ con una varietà compatta.]

2) Siano M, N due varietà lisce. Per ogni $p \in M$ e $q \in N$ indica rispettivamente con $i_p\colon N \to M \times N$ e $j_q\colon M \to M \times N$ le applicazioni definite da $i_p(y) = (p,y)$ per ogni $y \in N$ e $j_q(x) = (x,q)$ per ogni $x \in M$.
(i) Dimostra che se $X \in \mathcal{T}(M)$ e $Y \in \mathcal{T}(N)$ sono campi vettoriali allora ponendo $j_*(X)(p,q) = dj_q(X(p))$ e $i_*(Y) = di_p(Y(q))$ per ogni $(p,q) \in M \times N$ si definiscono due campi vettoriali $j_*(X)$, $i_*(Y) \in \mathcal{T}(M \times N)$.
(ii) Dimostra che

$$[j_*(X_1), j_*(X_2)] = j_*([X_1, X_2]) , \quad [i_*(Y_1), i_*(Y_2)] = i_*([Y_1, Y_2]) , \quad [j_*(X_1), i_*(Y_1)] = 0$$

per ogni X_1, $X_2 \in \mathcal{T}(M)$ e Y_1, $Y_2 \in \mathcal{T}(N)$.
(iii) Siano ∇^M una connessione lineare su M e ∇^N una connessione lineare su N. Mostra che esiste un'unica connessione lineare $\nabla^{M\times N}$ su $M \times N$ tale che

$$\nabla^{M\times N}_{j_*(X_1)} j_*(X_2) = j_*(\nabla^M_{X_1} X_2) , \quad \nabla^{M\times N}_{i_*(Y_1)} i_*(Y_2) = i_*(\nabla^N_{Y_1} Y_2) \quad \text{e} \quad \nabla^{M\times N}_{j_*(X_1)} i_*(Y_1) = \nabla^{M\times N}_{i_*(Y_1)} j_*(X_1) = 0$$

per ogni X_1, $X_2 \in \mathcal{T}(M)$ e Y_1, $Y_2 \in \mathcal{T}(N)$.
(iii) Mostra che $\nabla^{M\times N}$ è simmetrica se e solo se lo sono sia ∇^M sia ∇^N.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana con connessione di Levi-Civita ∇. Data una funzione $h \in C^\infty(M)$ poniamo $\tilde{g} = e^{2h} g$, e sia $\tilde{\nabla}$ la connessione di Levi-Civita della metrica Riemanniana $\tilde{g}$.
(i) Trova l'espressione in termini di g e h del tensore $D \in \mathcal{T}^1_2(M)$ dato da

$$D(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y .$$

(ii) Dimostra che $\tilde{\nabla} = \nabla$ se e solo se h è costante. [*Suggerimento:* se h non è costante, trova $p \in M$ e un riferimento locale $\{E_1, \ldots, E_n\}$ di TM vicino a p tale che $\{E_1(p), \ldots, E_n(p)\}$ sia una base g-ortonormale di T_pM con $E_1(h)(p) \neq 0$.]
(iii) Sia $\sigma\colon I \to M$ una curva regolare. Dimostra che

$$\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_{\sigma'} \sigma', \sigma'\big) = e^{2h} g\big(\nabla_{\sigma'} \sigma', \sigma'\big)$$

se e solo se h è costante lungo σ.