Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quinto scritto A.A. 2011/12 — 2 luglio 2012

Nome e Cognome:

---

1) Sia M un varietà connessa. Dimostra che per ogni p, $q \in M$ esiste un diffeomorfismo $F\colon M \to M$ con $F(p) = q$. [*Suggerimento:* comincia dimostrandolo per p e q sono sufficientemente vicini.]

2) Sia M una varietà di dimensione n. Dimostra che a ogni $X \in \mathcal{T}(M)$ è possibile associare un'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare $i_X\colon A^\bullet(M) \to A^\bullet(M)$ che soddisfa le proprietà seguenti:

(a) $i_X\bigl(A^r(M)\bigr) \subseteq A^{r-1}(M)$;
(b) $i_X(f) = 0$ per ogni $f \in A^0(M) = C^\infty(M)$;
(c) $i_X(\omega) = \omega(X)$ per ogni $\omega \in A^1(M)$;
(d) $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge i_X(\omega_2)$ per ogni $\omega_1 \in A^r(M)$ e $\omega_2 \in A^s(M)$.

Dimostra inoltre che $i_X \circ i_X = O$.

3) Sia M una varietà Riemanniana, e $S \subset M$ una sottovarietà considerata con la metrica indotta.

(i) Sia $\sigma\colon I \to S$ una curva. Dimostra che se σ è una geodetica in M allora è una geodetica anche in S.

Dato $p \in S$, diremo che S è *geodetica in* p se ogni geodetica in M uscente da p e tangente a S in p ha supporto completamente contenuto in S. Diremo inoltre che S è *totalmente geodetica* se è geodetica in ogni suo punto.

(ii) Caratterizza tutte le sottovarietà totalmente geodetiche di $\mathbb{R}^n$ considerato con la metrica euclidea.
(iii) Supponiamo che S sia geodetica in $p \in S$; dimostra che ogni geodetica (rispetto alla metrica indotta) in S uscente da p è anche una geodetica in M.
(iv) Trova un esempio di una sottovarietà S in una varietà Riemanniana M e di una geodetica (rispetto alla metrica indotta) in S che non sia una geodetica in M.
(v) Supponiamo che S sia totalmente geodetica. Dimostra che per ogni $p \in S$ è possibile trovare un intorno aperto U di p in S tale che $d_S(q_1, q_2) = d_M(q_1, q_2)$ per ogni q_1, $q_2 \in U$, dove d_M (rispettivamente, d_S) è la distanza Riemanniana in M (rispettivamente, in S). [*Suggerimento:* usa palle geodeticamente convesse.]