Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quarto scritto A.A. 2011/12 — 7 giugno 2012

Nome e Cognome:

---

1) Sia G un gruppo di Lie. Un *G-spazio* è una varietà M provvista di un'applicazione differenziabile $\theta\colon G \times M \to M$ (detta *azione* di G su M) tale che

$$\theta\big(g_1, \theta(g_2, p)\big) = \theta(g_1 g_2, p) \qquad \text{e} \qquad \theta(e, p) = p$$

per ogni g_1, $g_2 \in G$ e $p \in M$, dove $e \in G$ è l'elemento neutro del gruppo. Per semplicità di notazione scriveremo $g \cdot p$ invece di $\theta(g, p)$.

(i) Dimostra che per ogni $g \in G$ l'applicazione $\theta_g\colon M \to M$ data da $\theta_g(p) = g \cdot p$ è un diffeomorfismo di M con se stessa.

(ii) Diremo che l'azione su M è *transitiva* se esiste $p_0 \in M$ tale che la sua *orbita* $G(p_0) = \{g \cdot p_0 \mid g \in G\}$ coincide con M. Dimostra che se l'azione è transitiva allora $G(p) = M$ per ogni $p \in M$.

(iii) Un'applicazione differenziabile $F\colon M \to N$ fra due G-spazi è *equivariante* se $F(g \cdot p) = g \cdot F(p)$ per ogni $g \in G$ e $p \in M$. Dimostra che se l'azione su M è transitiva allora ogni applicazione $F\colon M \to N$ equivariante ha necessariamente rango costante.

2) Sia M una varietà di dimensione n, e $\omega \in A^n(M)$ una n-forma.

(i) Dimostra che, data un'applicazione differenziabile $F\colon M \to M$, per ogni $p \in M$ tale che $F(p) = p$ si ha $(F^*\omega)_p = \det(dF_p)\omega_p$.

Sia ora G un gruppo di Lie di dimensione n.

(ii) Se $g \in G$, indichiamo con $L_g\colon G \to G$ la *traslazione sinistra* $L_g(x) = gx$, con $R_g\colon G \to G$ la *traslazione destra* $R_g(x) = xg$ e con $C_g\colon G \to G$ il *coniugio* $C_g(x) = gxg^{-1}$. Dimostra che $R_g = L_g \circ C_{g^{-1}}$ per ogni $g \in G$.

(iii) Una n-forma $\omega \in A^n(G)$ è *invariante a sinistra* se $L_g^*\omega = \omega$ per ogni $g \in G$. Dimostra che se $\omega \in A^n(G)$ è invariante a sinistra allora per ogni $g \in G$ si ha $R_g^*\omega = \det\big(\mathrm{Ad}(g^{-1})\big)\omega$, dove $\mathrm{Ad}(g) = d(C_g)_e$.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot\,, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$.

(i) Dimostra che per ogni $\phi^1, \ldots, \phi^p \in V^*$ si ha

$$\phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^p = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\tau) \phi^{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \phi^{\tau(p)} .$$

(ii) Sia $\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle\colon T(V) \times T(V) \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare indotto da $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, cioè l'unico prodotto scalare su $T(V)$ tale che: $T^p_r(V)$ è ortogonale a $T^q_s(V)$ se $(p, r) \neq (q, s)$; coincide con $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ su V; è dato da $\langle\!\langle v^*, w^* \rangle\!\rangle = \langle v, w \rangle$ su V^*, dove per ogni $v \in V$ abbiamo posto $v^* = \langle \cdot, v \rangle \in V^*$; e si ha $\langle\!\langle \alpha_1 \otimes \beta_1, \alpha_2 \otimes \beta_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle\!\rangle \langle\!\langle \beta_1, \beta_2 \rangle\!\rangle$ per ogni α_1, $\alpha_2 \in T^p_r(V)$ e β_1, $\beta_2 \in T^q_s(V)$. Dimostra che

$$\langle\!\langle \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^p, \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p \rangle\!\rangle = p! \det\big(\langle\!\langle \phi^h, \omega^k \rangle\!\rangle\big)$$

per ogni $\phi^1, \ldots, \phi^p, \omega^1, \ldots, \omega^p \in V^*$.

(iii) Sia M una n-varietà Riemanniana orientata, di forma di volume ν_g. Dimostra che per ogni $k = 0, \ldots, n$ esiste un'unica applicazione $C^\infty(M)$-lineare $\star\colon A^k(M) \to A^{n-k}(M)$, detta *operatore di Hodge*, tale che

$$\omega \wedge \star\eta = \frac{1}{k!} \langle\!\langle \omega, \eta \rangle\!\rangle \nu_g ,$$

per ogni $\omega, \eta \in A^k(M)$ dove $\langle\!\langle \cdot\,, \cdot \rangle\!\rangle$ è la metrica lungo le fibre di $\bigwedge^k M$ indotta dalla metrica Riemanniana di M come nel punto (ii).

(iv) Dimostra che $\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)}\omega$ per ogni $\omega \in A^k(M)$.

(v) Se $M = \mathbb{R}^n$ con la metrica e l'orientazione standard calcola $\star dx^i$ per $i = 1, \ldots, n$.