Istituzioni di Geometria

Sesto scritto — 14 ottobre 2010

Nome e Cognome:

---

1) Se M è uno spazio topologico, indichiamo con $C^0(M)$ lo spazio delle funzioni continue da M in $\mathbb{R}$. Se $F\colon M \to N$ è continua, sia $F^*\colon C^0(N) \to C^0(M)$ data da $F^*(f) = f \circ F$.

(i) Dimostra che F^* è lineare.

(ii) Se M e N sono varietà differenziabili, dimostra che un'applicazione continua $F\colon M \to N$ è differenziabile se e solo se $F^*\big(C^\infty(N)\big) \subseteq C^\infty(M)$.

(iii) Se $F\colon M \to N$ è un omeomorfismo fra varietà differenziabili, dimostra che F è un diffeomorfismo se e solo se $F^*|_{C^\infty(N)}$ è un isomorfismo fra $C^\infty(N)$ e $C^\infty(M)$.

2) Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \neq 0\}$ un aperto di $\mathbb{R}^3$, dotato della struttura di varietà differenziabile indotta da $\mathbb{R}^3$, e sia

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}z$$

una 1-forma definita su Ω. Siano poi i, $j\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \Omega$ le funzioni definite da

$$i(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, u^2+v^2\right), \quad j(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}+2, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, u^2+v^2\right).$$

Siano infine $I = [0,2\pi] \subseteq \mathbb{R}$ e $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ la curva differenziabile $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

(i) Mostra che ω è chiusa.

(ii) Calcola

$$\int_I (i\circ\gamma)^*(\omega)\ .$$

(iii) Mostra che $i^*\omega$ non è esatta.

(iv) Mostra che $j^*\omega$ è esatta. [*Suggerimento:* controlla l'immagine di j, e ricorda il lemma di Poincaré.]

3) Sia

$$G = \{(x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > 0\}$$

il semipiano positivo, considera fissato su G l'atlante costituito dalla sola carta (U,φ), dove $U = G$ e $\varphi(x^1,x^2) = (x^1,x^2)$, e poni su G la metrica Riemanniana definita da

$$g_{ij}(x^1,x^2) = \frac{\delta_{ij}}{(x^2)^2}, \qquad i,j \in \{1,2\}.$$

Considera inoltre su G l'operazione binaria $m\colon G\times G \to G$ definita da

$$m\big((a,b),(a',b')\big) = (ba'+a, bb').$$

(i) Mostra che l'operazione m definisce su G una struttura di gruppo di Lie. Nel seguito, per ogni γ, $\gamma' \in G$ indicheremo semplicemente con $\gamma\cdot\gamma'$ l'elemento $m(\gamma,\gamma')$.

(ii) Per ogni $\gamma \in G$, sia $L_\gamma\colon G \to G$ la moltiplicazione a sinistra per γ, ovvero la funzione definita da $L_\gamma(\gamma') = \gamma\cdot\gamma'$ per ogni $\gamma' \in G$. Se $\gamma = (a,b)$ e $\gamma' = (c,d)$, calcola la matrice Jacobiana di L_γ nel punto γ'.

(iii) Mostra che, per ogni $\gamma \in G$, la funzione L_γ è un'isometria rispetto alla metrica g sopra definita.

(iv) Considera la funzione $i\colon G \to G$ definita da $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, dove γ^{-1} è l'inverso di γ rispetto alla moltiplicazione di G. La funzione i è un'isometria?