Geometria e Topologia Differenziale

Terzo scritto — 11 giugno 2009

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, e $\mathbf{t}\colon I \to \mathbb{R}^3$ il suo versore tangente.

(i) Dimostra che se $\sigma(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$ è un'elica di raggio $r > 0$ e passo $a \in \mathbb{R}^*$ allora il supporto di $\mathbf{t}$ è una circonferenza con centro sull'asse z, e calcolane il raggio di curvatura.

(ii) Viceversa, dimostra che se il supporto di $\mathbf{t}$ è contenuto in una circonferenza allora σ è un'elica.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva del primo quadrante ($x > 0, z > 0$) del piano xz di equazione $x = z$. Sia H il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $z = 1$. Sia $C = S \cap H$, e $p = (1, 0, 1)$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare, che C è una curva regolare e che $p \in C$.

(ii) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto p.

(iii) Dimostra che C non è una geodetica di S.

(iv) Calcola la curvatura normale di C in tutti suoi punti.

3) Siano S e C la superficie e la curva del punto precedente, e sia D l'intersezione di S con il piano $z = 2$. Sia T la regione di S compresa fra le curve C e D.

(i) Calcola la curvatura geodetica di C e di D in tutti i loro punti.

(ii) Calcola l'integrale della curvatura gaussiana di S su tutta T.

(iii) Calcola l'area di T.