Geometria e Topologia Differenziale

Terzo compitino A.A. 2005/06 — 21 dicembre 2005

Nome e Cognome:

---

1) Siano S^2 la sfera di raggio uno in $\mathbb{R}^3$, e T il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza di equazione $(x-2)^2+z^2=1$ contenuta nel piano $y=0$.

(i) Consideriamo la curva $\sigma\colon(0,2\pi)\to S^2$ data da

$$\sigma(s)=(\cos s,0,\sin s).$$

Trova tutti i campi vettoriali paralleli lungo σ.

(ii) Consideriamo la curva $\eta\colon(0,2\pi)\to T$ data da

$$\eta(t)=(2\cos t,2\sin t,1).$$

Trova tutti i campi vettoriali paralleli lungo η.

2) Sia T il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza $(x-2)^2+z^2=1$ contenuta nel piano $y=0$, e siano P_1, P_2 e P_3 i paralleli passanti rispettivamente per i punti $(3,0,0)$, $(2,0,1)$ e $(1,0,0)$. Orientiamo T con il versore normale $N\colon T\to\mathbb{R}^3$ tale che $N(3,0,0)=(1,0,0)$. Sia infine $\sigma\colon\mathbb{R}\to T$ una geodetica che interseca il parallelo P_1 in $\sigma(s_0)$ con un angolo $\alpha_0\in(0,\pi/2)$ tale che

$$\cos\alpha_0<\frac{1}{3}.$$

(i) Mostra che se σ interseca P_2, allora interseca anche P_3.

(ii) Mostra che σ interseca sempre P_2.

3) Sia S^2 la sfera di raggio uno in $\mathbb{R}^3$.

(i) Sia $\xi\colon S^2\to\mathbb{R}^3$ dato da $\xi(x,y,z)=(x^2+y-1,xy-x,xz)$. Mostra che ξ è un campo vettoriale tangente su S^2, trovane i punti singolari e calcolane l'indice.

(ii) Costruisci un esempio di campo vettoriale tangente su S^2 avente esattamente due punti singolari, e calcolane l'indice.