Elementi di Geometria Differenziale

Primo compitino — 7 aprile 2006

Nome e Cognome:

Da svolgere a casa:

1) Indichiamo con $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ il semispazio chiuso superiore in $\mathbb{R}^n$, e ricordiamo che una funzione continua definita su un aperto di $\mathbb{H}^n$ è di classe C^∞ se (per definizione) ammette un'estensione C^∞ a un aperto di $\mathbb{R}^n$. Una *n-carta di bordo* $(U.\varphi)$ su un insieme M è un'applicazione bigettiva $\varphi: U \to V \subset \mathbb{H}^n$, dove U è un sottoinsieme di M e V è un aperto di $\mathbb{H}^n$ con $V \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \varnothing$. Due n-carte (di bordo o no) (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) su un insieme M sono *compatibili* se $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ e $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{H}^n$ (a seconda del tipo di carta) e $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ è di classe C^∞ nel senso sopra ricordato. Una *varietà con bordo* è un insieme M provvisto di un atlante (cioè una famiglia di n-carte a due a due compatibili i cui domini coprano tutto M) contenente almeno una carta di bordo. Diremo che $p \in M$ è un *punto di bordo* se esiste una carta (U, φ) di bordo con $p \in U$ e $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n$; è un *punto interno* se esiste una carta (di bordo o no) (U, φ) tale che $p \in U$ e $\varphi(p)$ appartenga all'interno (relativo a $\mathbb{R}^n$) di $\mathbb{H}^n$.

(i) Dimostra che l'insieme ∂M dei punti di bordo di una varietà con bordo M è disgiunto dall'insieme dei punti interni.

(ii) Dimostra che ∂M ha una struttura naturale di varietà (usuale) di dimensione $n-1$, mentre $M \setminus \partial M$ ha una struttura naturale di varietà (usuale) di dimensione n.

2) Siano M_1 e M_2 due varietà connesse n-dimensionali, e per $j = 1, 2$ scegliamo carte (U_j, φ_j) centrate in $p_j \in M_j$ con $\varphi_j(U_j) = B_2 \subset \mathbb{R}^n$. Poniamo $V_j = \varphi_j^{-1}(B_1)$ e $M'_j = M_j \setminus V_j$. La *somma connessa* $M_1 \# M_2$ di M_1 ed M_2 è lo spazio topologico ottenuto quozientando l'unione disgiunta di M'_1 ed M'_2 rispetto alla relazione d'equivalenza che identifica ciascun $q \in \partial V_1$ con $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(q) \in \partial V_2$. Dimostra che esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su $M_1 \# M_2$ per cui la restrizione della proiezione al quoziente a ciascun M'_j (pensato come varietà con bordo) sia un embedding. Dimostra inoltre che per $j = 1, 2$ esistono aperti $\tilde{M}_j \subset M_1 \# M_2$ diffeomorfi a $M_j \setminus \{p_j\}$ e tali che $\tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2$ è diffeomorfo a $B_2 \setminus \{O\}$. Discuti infine l'unicità della somma connessa al variare delle carte locali usate per definirla.

3) Sia $F: M \to N$ un'applicazione C^∞ fra varietà, e supponiamo che $dF_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ sia surgettiva per ogni $p \in M$ (si dice che F è una *sommersione*). Dimostra che:

(i) per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $U \subseteq N$ di $F(q)$ e un'applicazione $G: U \to M$ di classe C^∞ tale che $F \circ G = \mathrm{id}_U$;

(ii) F è un'applicazione aperta;

(iii) per ogni $Y \in \mathcal{T}(N)$ esiste un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ tale che Y è F-correlato a X.

4) Sia E un fibrato vettoriale di rango r su una varietà n-dimensionale M. Indichiamo con $O_E \subset E$ l'immagine della sezione nulla, e poniamo $E_* = E \setminus O_E$. Il *proiettivizzato* $\mathbb{P}(E)$ è l'insieme ottenuto quozientando E_* rispetto alla relazione d'equivalenza $v \sim w$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tale che $v = \lambda w$. Dimostra che $\mathbb{P}(E)$ ha una naturale struttura di varietà di dimensione $r + n - 1$ tale che la proiezione naturale $\pi: \mathbb{P}(E) \to M$ sia di classe C^∞. Inoltre, dimostra che $\pi^{-1}(p)$ è diffeomorfo a $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{R})$ per ogni $p \in M$. Infine dimostra che $\mathbb{P}(\Lambda^n M)$ è diffeomorfa al rivestimento doppio orientabile $\tilde{M}$ di M.