A.A. 2018-2019
Corso di Analisi matematica II
prof. Matteo Novaga

Terzo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
30 novembre & 7 dicembre 2018

Argomenti: curve rettificabili, integrali curvilinei, forme differenziali lineari, teoremi della divergenza e di Stokes, area di superfici.

Esercizio 1

Si considerino le curve:

a) $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right)$, $t \in \left[\frac{5}{9}, \frac{7}{9}\right]$;

b) $\gamma(t) = (1, t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

c) $\gamma(t) = (\sin^2(t), \cos(t)\sin(t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) spirale archimedea: $\gamma(t) = (a + bt)(\cos(t), \sin(t))$ con $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $t \in \left(-\frac{a}{b}, 2n\pi - \frac{a}{b}\right]$, $n \in \mathbb{N}$;

e) spirale logaritmica: $\gamma(t) = ae^{bt}(\cos(t), \sin(t))$ con $a \in \mathbb{R}$, $t \in [-n\pi, n\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Stabilire per quali valori del parametro t esse sono ben definite e per quali sono regolari. Calcolarne poi la lunghezza (se possibile) negli intervalli indicati.

Esercizio 2

i. Che differenza c'è tra curve iniettive e curve semplici? Esistono curve chiuse iniettive?

ii. Dimostrare che se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva semplice, allora il suo sostegno è un insieme compatto e connesso.

iii. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente e continua. Dimostrare che esiste una curva γ rettificabile il cui sostegno è il grafico di f.

iv. Sia $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva rettificabile. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si considerino la partizione di $[a,b]$ data da

$$\begin{cases} t_0 = a, \\ t_i = t_{i-1} + \dfrac{b-a}{k} \quad \text{per } i = 1, \dots, k \end{cases}$$

e la poligonale

$$r_k(t) = \gamma(t_i) + \frac{k}{b-a}[\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)](t - t_i), \quad \text{per } t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, \dots, k.$$

Dimostrare che

$$\ell(\gamma) = \lim_{k \to +\infty} \ell(r_k),$$

dove $\ell(\gamma)$ e $\ell(r_k)$ sono le lunghezze rispettivamente di γ ed r_k.

Esercizio 3

i. Per $\vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1]$, si consideri la curva $\gamma(\vartheta) = r(\vartheta)(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$. Verificare che γ è regolare se e solo se per ogni $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1)$ risulta $r(\vartheta)^2 + r'(\vartheta)^2 > 0$.

ii. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio di cui è nota una parametrizzazione regolare per la frontiera $\partial\Omega = \gamma$. Si supponga che l'orientazione di γ sia positiva e che la parametrizzazione sia data in coordinate polari tramite la relazione $r = r(\vartheta)$, per $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Mostrare che allora la misura di Ω è data da

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [r(\vartheta)]^2 \, \mathrm{d}\vartheta.$$

iii. Utilizzare la formula precedente per calcolare l'area racchiusa dalla lemniscata definita della relazione $r(\vartheta) = a\sqrt{\cos(2\vartheta)}$, con $a > 0$.

Esercizio 4

Si consideri la curva piana γ definita dalle relazioni $(x(t), y(t)) = r(t)(\cos(t), \sin(t))$ con $r(t) = a(1 + \cos(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$. Essa è un esempio di *cardioide*.

i. Si dica se γ è semplice, chiusa e/o regolare.

ii. Calcolare l'area della regione piana C racchiusa da γ.

iii. Calcolare il baricentro di C. (Si ricordi che, dato un dominio piano Ω di misura finita e non nulla, si definisce baricentro di Ω il punto di coordinate

$$\bar{x} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega x \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \quad \bar{y} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega y \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

avendo denotato con $|\Omega|$ la misura di Ω.)

Esercizio 5

Siano $a, b > 0$; data l'ellisse

$$\mathscr{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

calcolare l'integrale curvilineo di $f(x, y) = xy$ lungo una curva γ che parametrizza il ramo di $\mathscr{E}$ che giace nella regione $\{x > 0, y > 0\}$.

Esercizio 6

Sono date le seguenti coppie di forme differenziali lineari e curve:

$$\omega_1(x, y) = (x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y, \quad \gamma_1(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)),\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$
$$\omega_2(x, y) = \frac{\mathrm{d}x}{x + y} + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y, \quad \gamma_2(t) = (t, t^2),\ t \in [1, 2];$$
$$\omega_3(x, y, z) = y\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z, \quad \gamma_3(t) = (t, t, t + 1),\ t \in [0, 1].$$

i. Calcolare l'integrale di ω_i lungo γ_i per $i = 1, 2, 3$.

ii. Quale tra le precedenti è una forma chiusa? Quale è esatta?

iii. Determinare, laddove siano ben definite, tutte le primitive.

Esercizio 7

Data $\omega(x, y, z) = (x - z)\mathrm{d}x + (1 - xy)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$, calcolarne l'integrale lungo le curve $\gamma_1(t) = (t, t, t)$ e $\gamma_2(t) = (t, t^2, t^2)$ per $t \in [0, 1]$. La forma differenziale considerata è esatta?

Esercizio 8

i. Studiare l'esattezza della forma differenziale

$$\omega(x, y) = y^3 \cos(xy)\mathrm{d}x + (y^\alpha x \cos(xy) + 2y \sin(xy) + 2y)\mathrm{d}y$$

al variare del parametro reale α. Calcolare esplicitamente, laddove possibile, le primitive.

ii. Determinare $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ affinché la forma differenziale $\omega(x,y) = yf(x)\mathrm{d}x + xf(y)\mathrm{d}y$ sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 9

Si consideri il campo di forze

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 - y^2 + 4}, -\frac{y}{x^2 - y^2 + 4} \right).$$

i. Qual è il piú grande sottoinsieme del piano contentente il punto $(0,3)$ in cui F ammette una primitiva?

ii. Calcolare il lavoro del campo F lungo la circonferenza di centro $(3,0)$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

iii. Determinare il segno del flusso uscente di F rispetto al cerchio individuato dalla precedente circonferenza.

Esercizio 10

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con bordo di classe C^1 e siano $f, g \in C^1(\Omega)$. Supponiamo inoltre che g si possa estendere per continuità fino a $\partial\Omega$ e che abbia supporto compatto, ovvero che esista $K \subset \Omega$ compatto tale che $g(x) = 0$ quando $x \in \Omega \setminus K$. Provare che per ogni $i = 1, \ldots, n$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x.$$

Esercizio 11

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^2 in Ω e C^1 in $\bar{\Omega}$. Si dice che u è *armonica* se la traccia della matrice hessiana di u è nulla in Ω. Dimostrare che se Ω ha frontiera regolare, allora

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x) \mathrm{d}\sigma(x) = 0,$$

dove $\hat{n}$ è la normale uscente e $\mathrm{d}\sigma$ è l'elemento d'area su $\partial\Omega$.

Esercizio 12

In $\mathbb{R}^3$, sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x + \log(z^2+1), y(x^2+z^2), y^2+z).$$

i. F è conservativo?

ii. Assegnati i parametri reali $h, r > 0$, calcolare il flusso di F attraverso la superficie

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = r^2, |2y| \leq h \right\}.$$

Esercizio 13

Si considerino la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$$

e l'insieme $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4 \right\}$. Data $\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, z = f(x,y) \right\}$, calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(y(1+z^2), 2xy^4 z, \sqrt{x^2+z^2} \right)$$

attraverso Σ.

Esercizio 14

Calcolare l'area della porzione della superficie sferica di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel semispazio $\{z > 0\}$ la cui proiezione sul piano xy è la lemniscata di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 + 4(y^2 - x^2) = 0.$$

Esercizio 15

In $\mathbb{R}^3$ si considerino la superficie sferica Σ di centro l'origine e raggio $r > 0$ e il cilindro infinito C (pensato come solido) che ha asse parallelo all'asse z e la cui intersezione con il piano xy è il cerchio di centro $(r/2, 0, 0)$ e raggio $r/2$. La *finestra di Viviani* V è la superficie ottenuta intersecando Σ e C che si trova nel semispazio $\{z > 0\}$.

i. Calcolare l'area di V.

ii. Detto γ il bordo di V, trovare un sistema di equazioni cartesiane che individui tale curva. Stabilire se γ è una curva di classe C^1 e descriverne il comportamento nel punto $(r, 0, 0)$.