PRINCIPIO DI INDUZIONE

LORENZO BRASCO

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

Esercizio 2. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

Soluzione Procediamo per induzione: la (2) è ovviamente vera per $n = 1$, come è facile convincersi. Supponiamo adesso che la (2) sia vera per un qualche naturale n_0 (*ipotesi induttiva*): è vero che questo implica la validità di (2) anche per il naturale successivo $n_0 + 1$? Se la risposta è sì abbiamo finito, grazie al principio di induzione. Abbiamo quindi

$$\sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 = (n_0+1)^2 + \sum_{k=1}^{n_0} k^2$$

e sfruttando l'ipotesi induttiva, sappiamo dire esplicitamente chi è la sommatoria a seconda membro, ovvero

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 &= (n_0+1)^2 + \sum_{k=1}^{n_0} k^2\\ &= (n_0+1)^2 + \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6},\end{aligned}$$

dopo di che basta svolgere un po' di semplici passaggi algebrici, per ottenere che

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_0+1} k^2 = (n_0+1)^2 + \frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} &= \frac{6(n_0+1)^2 + n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}\\ = \frac{(n_0+1)[6n_0+6+n_0(2n_0+1)]}{6} &= \frac{(n_0+1)(n_0+2)(2n_0+3)}{6},\end{aligned}$$

ovvero la (2) è vera anche per $n_0 + 1$ e quindi possiamo concludere. $\diamond$

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Osservazione 1. Più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $i \in \mathbb{N}$, definiamo

$$N_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i,$$

ovvero $N_i(n)$ è la somma delle potenze $i-$esime dei primi n numeri: in particolare, negli esercizi precedenti abbiamo trovato la forma esplicita per $N_i(n)$ quando $i = 1, 2, 3$. Si può provare la seguente formula ricorsiva per $N_i(n)$:

$$N_i(n) = \frac{1}{i+1}(n+1)^{i+1} - \frac{1}{i+1}\sum_{m=0}^{i-1}\binom{i+1}{m} N_m(n). \tag{4}$$

Infatti cominciamo osservando che, usando il cambio di indice $k = j + 1$ e la formula del Binomio di Newton (si veda Esercizio 7), si ottiene

$$N_i(n) = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^i = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m} j^m,$$

ovvero scambiando le sommatorie[1] nella precedente, si ha

$$\begin{aligned} N_i(n) = \sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m}\left(\sum_{j=0}^{n-1} j^m\right) &= \sum_{m=0}^{i}\binom{i}{m} N_m(n-1) \\ &= N_i(n-1) + i\, N_{i-1}(n-1) + \sum_{m=0}^{i-2}\binom{i}{m} N_m(n-1). \end{aligned}$$

Osserviamo adesso che $N_i(n) - N_i(n-1) = n^i$ per definizione, quindi la relazione precedente può anche essere riscritta, portando $N_i(n-1)$ e la sommatoria a primo membro e dividendo per i, come

$$N_{i-1}(n-1) = \frac{1}{i}n^i - \frac{1}{i}\sum_{m=0}^{i-2}\binom{i}{m} N_m(n-1),$$

ovvero, visto che la precedente vale per ogni i e per ogni n, sostituendo i con $i+1$ e n con $n+1$ si ottiene la (4).

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $n^3 + 5\,n$ è divisibile per 6.

Soluzione Conviene come sempre appellarci al principio di induzione: la tesi è ovviamente vera per $n = 1$, dal momento che in tal caso il numero in questione è

$$1^3 + 5 \cdot 1 = 6,$$

che è chiaramente divisibile per 6. Supponiamo adesso che per un certo naturale n_0, il numero $n_0^3 + 5\,n_0$ sia divisibile per 6 (*ipotesi induttiva*), vogliamo che lo stesso succeda anche per il naturale successivo $n_0 + 1$, ovvero vogliamo provare che $(n_0 + 1)^3 + 5\,(n_0 + 1)$ è anch'esso divisibile per 6. D'altronde si ha

$$(n_0+1)^3 + 5\,(n_0+1) = n_0^3 + 3n_0^2 + 3n_0 + 1 + 5n_0 + 5 = [n_0^3 + 5n_0] + [3n_0(n_0+1)] + 6,$$

[1] Notare che i due indici j e m sono indipendenti.

e quest'ultima è la somma di tre numeri, tutti divisibili per 6: il primo $n_0^3 + 5n_0$ lo è per ipotesi induttiva, il terzo è 6, mentre il secondo $3n_0(n_0+1)$ è divisibile per 6 in quanto triplo prodotto del numero pari[2] $n_0(n_0+1)$. In conclusione, anche $(n_0+1)^3 + 5\,(n_0+1)$ è divisibile per 6. $\diamond$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $10^n - 1$ è divisibile per 9.

Soluzione Procediamo per induzione: come sempre, il primo passo è verificare che la nostra affermazione sia vera per il primo naturale per cui viene formulata, ovvero in questo caso per $n = 1$. D'altronde in tal caso il numero in questione è

$$10^1 - 1 = 9,$$

che è divisibile per 9. Adesso, domandiamoci cosa succede se assumiamo che la nostra affermazione sia vera per un certo naturale $n_0 \in \mathbb{N}$, ovvero assumiamo di sapere che $10^{n_0} - 1$ sia divisibile per 9 (*ipotesi induttiva*): lo stesso varrà per anche per $10^{n_0+1} - 1$? In effetti si ha

$$10^{n_0+1} - 1 = 10 \cdot 10^{n_0} - 1 = 10 \cdot 10^{n_0} - 10 + 9 = 10 \cdot (10^{n_0} - 1) + 9,$$

ovvero $10^{n_0+1} - 1$ è la somma di due numeri divisibili per 9 e quindi è anch'esso divisibile per 9. Per il principio di induzione, ne concludiamo che l'affermazione di partenza è vera per ogni $n \geq 1$. $\diamond$

Esercizio 6. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $k \geq n$, si ha

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Soluzione È sufficiente scrivere esplicitamente i binomiali a primo membro e svolgere qualche calcolo, infatti si ha

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n!\,k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)\,n!}{k!(n-k+1)} = \binom{n+1}{k},\end{aligned}$$

che è esattamente ciò che volevamo provare. $\diamond$

Esercizio 7 (Binomio di Newton)**.** Siano $x, y \in \mathbb{R}$ due numeri positivi. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{5}$$

Soluzione Procediamo usando il principio di induzione: la verifica che (5) è vera per $n = 1$ è immediata. Supponiamo adesso di sapere che (5) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, vorremmo dimostrare che allora essa è vera anche per il successivo naturale, ovvero per $n_0 + 1$: osserviamo innanzitutto che vale ovviamente

$$(x+y)^{n_0+1} = (x+y)^{n_0}\,(x+y),$$

[2] Si provi che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ è un numero pari.

dopo di che applichiamo l'ipotesi induttiva (ovvero il fatto che stiamo supponendo (5) vera per n_0), ottenendo quindi

$$\begin{aligned}(x+y)^{n_0+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k} \\ &= x\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k} + y\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^{k+1} y^{n_0-k} + \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k+1}.\end{aligned}$$

A questo punto, riscriviamo la prima sommatoria cambiando il nome dell'indice di somma e ponendo $k = h-1$, così da ottenere

$$\sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^{k+1} y^{n_0-k} = \sum_{h=1}^{n_0+1}\binom{n_0}{h-1}x^h y^{n_0-h+1},$$

in modo che abbiamo ottenuto

$$\begin{aligned}(x+y)^{n_0+1} &= \sum_{k=1}^{n_0+1}\binom{n_0}{k-1}x^k y^{n_0-k+1} + \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}x^k y^{n_0-k+1} \\ &= x^{n_0+1} + y^{n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0}\left[\binom{n_0}{k-1} + \binom{n_0}{k}\right] x^k y^{n_0-k+1},\end{aligned}$$

ovvero, utilizzando l'identità dimostrata nell'esercizio precedente

$$\begin{aligned}(x+y)^{n_0+1} &= x^{n_0+1} + y^{n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0}\binom{n_0+1}{k}x^k y^{n_0-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n_0+1}\binom{n_0+1}{k}x^k y^{n_0-k+1},\end{aligned}$$

quindi la (5) è vera anche per n_0+1. Per il principio di induzione, essa è vera per ogni $n \geq 1$. $\diamond$

Esercizio 8. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$2^{n-1} \leq n!. \tag{6}$$

Soluzione La proposizione è chiaramente vera per $n = 0$, ricordandosi che $0! = 1$ per definizione. Supponiamo adesso che (6) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, mostriamo come questo implichi che (6) debba essere vera anche per il naturale successivo $n_0 + 1$. Si ha infatti per ipotesi induttiva

$$2^{n_0} = 2\, 2^{n_0-1} \leq 2\, n_0!,$$

e d'altronde $2 \leq n_0 + 1$, appena $n_0 \geq 1$, quindi abbiamo provato

$$2^{n_0} \leq (n_0+1)!,$$

concludendo così la dimostrazione. $\diamond$

Esercizio 9. Dimostrare che per ogni $n \geq 6$, si ha

$$2^n\, n! \leq n^n. \tag{7}$$

Soluzione Di nuovo, useremo il principio di induzione: partiamo intanto col verificare che (7) è vera per $n = 6$, infatti si ha

$$2^6\, 6! \leq 6^6,$$

con semplici calcoli[3]. Supponiamo adesso che (7) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$, vogliamo provare che lo stesso possiamo dire per il naturale successivo $n_0 + 1$. Osserviamo che si ha, sfruttando l'ipotesi induttiva

$$2^{n_0+1}(n_0 + 1)! = 2(n_0 + 1)2^{n_0} n_0! \leq 2(n_0 + 1)n_0^{n_0},$$

quindi se riusciamo a dimostrare che la quantità a secondo membro può essere stimata come segue

$$2(n_0 + 1)n_0^{n_0} \leq (n_0 + 1)^{n_0+1}, \tag{8}$$

abbiamo concluso, perchè avremmo dimostrato proprio che (7) è vera anche per n_0+1. Il problema quindi si è ridotto a dimostrare la validità di (8), ma d'altronde si vede subito che essa è equivalente a dimostrare che

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{n_0},$$

la quale è una conseguenza imnmediata della formula del Binomio di Newton dimostrata in precedenza, infatti

$$\left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} \frac{1}{n_0^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n_0} \binom{n_0}{k} \frac{1}{n_0^k} \geq 2,$$

concludendo così la dimostrazione. ◇

Esercizio 10. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$n^n \leq 3^n n!. \tag{9}$$

Soluzione Usiamo il principio di induzione: la verifica che (9) è vera per $n = 0$ è immediata. Vediamo adesso cosa succede se supponiamo che (9) sia vera per un certo $n_0 \in \mathbb{N}$: se grazie a questo riusciamo a provare la validità di (9) anche per il successivo naturale $n_0 + 1$, abbiamo finito. Come prima, osserviamo che grazie all'ipotesi induttiva possiamo dire

$$3^{n_0+1}(n_0 + 1)! = 3(n_0 + 1)3^{n_0} n_0! \geq 3(n_0 + 1)n_0^{n_0}.$$

Supponiamo per un attimo di saper provare che

$$3(n_0 + 1)n_0^{n_0} \geq (n_0 + 1)^{n_0+1}, \tag{10}$$

di nuovo questo ci permetterebbe di provare che (9) è valida anche per n_0+1 e quindi di concludere. Resta quindi da provare che effettivamente vale la (10): con qualche passaggio algebrico, non è difficile vedere che questa è equivalente alla seguente

$$\left(1 + \frac{1}{n_0}\right)^{n_0} \leq 3,$$

[3]Non volendo sforzarsi con calcoli troppo lunghi (o non volendo usare la calcolatrice), non è difficile convincersi che $2^6\, 6! \leq 6^6 \iff 80 \leq 3^4$ e quest'ultima è ovviamente vera.

che cercheremo adesso di dimostrare. Usando nuovamente la formula del Binomio di Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0} &= \sum_{k=0}^{n_0}\binom{n_0}{k}\frac{1}{n_0^k} = 2+\sum_{k=2}^{n_0}\binom{n_0}{k}\frac{1}{n_0^k}\\ &= 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{n_0!}{k!(n_0-k)!}\frac{1}{n_0^k} = 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{n_0\cdot(n_0-1)\cdot\ \dots\ \cdot(n_0-k+1)}{k!}\frac{1}{n_0^k}\\ &= 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n_0}\right)\left(1-\frac{2}{n_0}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\frac{n_0-k+1}{n_0}\right)\\ &\le 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k!}\le 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

dopo di che osserviamo che usando la (6), abbiamo

$$\frac{1}{k!}\le\frac{1}{2^{k-1}},$$

ovvero riprendendo da dove eravamo rimasti

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n_0}\right)^{n_0} &= 2+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{1}{k!}\le 2+\sum_{h=1}^{n_0-1}\frac{1}{2^h}\\ &= 1+\sum_{h=0}^{n_0-1}\frac{1}{2^h} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^{n_0}}\right)\le 3,\end{aligned}$$

concludendo così la dimostrazione. $\diamond$

Osservazione 2. Si osservi che nella risoluzione degli ultimi due esercizi, abbiamo dimostrato

$$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 3,\quad \text{per ogni } n\ge 1.$$