A.A. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Settimo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
3 maggio 2018

Argomenti: successioni per ricorrenza, equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 1

Si supponga $x_0 = a \in \mathbb{R}$ assegnato. Provare che le seguenti equazioni definite per ricorrenza ammettono limite e calcolarlo:

i. $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{8}{x_n}}$, con $a > 0$;

ii. $x_{n+1} = \min\{1, x_n^2\}$;

iii. $x_{n+1} = \max\{1, x_n^2\}$;

iv. $x_{n+1} = \frac{n}{2n+1} x_n$;

v. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{t}{x_n}\right)$, con $a \neq 0$ e $t > 0$.

Esercizio 2

Data l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{x^3 - y^3}{xy^2},$$

i. tracciare dei grafici qualitativi per le soluzioni;

ii. calcolare esplicitamente l'integrale generale;

iii. verificare che la funzione $E(x, y) \coloneqq \frac{1}{2}x^6 - x^3y^3$ è un integrale primo del problema.

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(y) \coloneqq \begin{cases} -1 & \text{per } y < 0 \\ y^2 - 1 & \text{per } 0 \leq y \leq 1 \\ 2(y-1) & \text{per } y > 1 \end{cases}$$

e la famiglia di problemi di Cauchy

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0,$$

i. mostrare che per ogni y_0 esiste un'unica soluzione locale;

ii. individuare le soluzioni costanti;

iii. mostrare che per ogni y_0 la soluzione è globale;

iv. mostrare che per ogni $y_0 \neq 1$ la soluzione non è limitata;

v. disegnare le traiettorie sul piano xy.

Esercizio 4

Siano $f \in C(\mathbb{R})$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ tali che $f(y_0) \neq 0$. Sia (y_-, y_+) il piú grande intervallo contenente y_0 tale che $f(y) \neq 0$ per ogni $y \in (y_-, y_+)$.

i. Provare che il problema di Cauchy

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

ha un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\int_{y_-}^{y_0} \frac{\mathrm{d}\eta}{f(\eta)} = \int_{y_0}^{y_+} \frac{\mathrm{d}\eta}{f(\eta)} = +\infty.$$

ii. Supponiamo che risulti

$$\int_{y_-}^{y_0} \frac{\mathrm{d}\eta}{f(\eta)} < +\infty.$$

Cosa si può dire?

iii. Cosa accade quando f è localmente lipschitziana?

Esercizio 5

i. Quali tra le seguenti funzioni non è localmente lipschitziana?

$$\frac{\sqrt{e^y+1}-\sqrt{2}}{e^y}, \quad \frac{\sqrt{e^y-1}-\sqrt{2}}{e^y}, \quad \sqrt{e^y+1}-\sqrt{2}.$$

ii. Sia $f(y)$ la funzione non localmente lipschitziana di cui al punto precedente. Trovare una soluzione non identicamente nulla di $y' = f(y)$ con $y(0) = 0$.

Esercizio 6

Si consideri la famiglia di problemi di Cauchy

$$y' = (y^2-1)\sqrt{|y-2|}, \quad y(0) = y_0.$$

Per quali $y_0 \in \mathbb{R}$

i. esiste almeno una soluzione?

ii. la soluzione è unica?

iii. tutte le soluzioni sono monotone decrescenti?

iv. esiste almeno una soluzione non limitata?

Esercizio 7

Sia $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ continua e crescente. Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{y}{y+1} f(y), \quad y(0) = 0.$$

i. Trovare un'espressione implicita per la soluzione e verificare che non esplode in tempo finito.

ii. Dimostrare che y è crescente, convessa e soddisfa $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.