A.A. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Sesto foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
11 aprile 2018

Argomenti: equazioni differenziali ordinarie.
Notazioni: se f è una funzione, poniamo $\|f\| := \sup_x |\ f(x)\ |$, dove l'estremo superiore si intende esteso al dominio di f.

Esercizio 1

Determinare se esistono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y \log(y)}{x}$$

tali che $\int_{\mathbb{R}} y(x)\mathrm{d}x$ sia convergente.

Esercizio 2

Posto

$$f(x,y) := \begin{cases} y^2 & \text{quando } x \in (0,1) \\ \dfrac{y}{x} & \text{quando } x \in [1,+\infty) \end{cases},$$

stabilire per quali $y_0 > 0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione continua.

Esercizio 3

Disegnare dei grafici qualitativi per le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$\textit{i)}\ y' = (y^2 - 4y + 3)^3; \quad \textit{ii)}\ y' = -y^2 + t; \quad \textit{iii)}\ y' = -2xy; \quad \textit{iv)}\ y' = y\sin(y).$$

Esercizio 4

Sia y una soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x,y)$ definita sull'intervallo $I(y) \subseteq \mathbb{R}$. La funzione $z\colon I(z) \to \mathbb{R}$ è un *prolungamento* di y se $I(y) \subseteq I(z)$, se risolve la stessa equazione differenziale in $I(z)$ e se $y \equiv z$ in $I(y)$. Una soluzione y di $y' = f(x,y)$ si dice *massimale* se ogni suo prolungamento z è banale, ovvero se $I(y) \equiv I(z)$ per ogni prolungamento z.

Data l'equazione $y' = f(x,y)$, si supponga che tutti i problemi di Cauchy ad essa associati ammettano un'unica soluzione. Dimostrare che in tale ipotesi

i. ogni soluzione $z\colon I(z) \to \mathbb{R}$ ammette un unico prolungamento massimale;

ii. se $y^*\colon I(y) \to \mathbb{R}$ è la soluzione massimale, $I(y^*)$ è aperto.

Esercizio 5

i. Stabilire per quali $\gamma > 0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x)^{1+\gamma} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ha una soluzione massimale definita per ogni $x > 0$.

ii. Si mostri che la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non è definita oltre un certo $x_{\max} > 0$.

Esercizio 6

i. Siano $\alpha, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e si consideri la famiglia di soluzioni $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y_n'(x) = \alpha(x)y(x) + f(x) \\ y_n(x_0) = \eta_n \end{cases},$$

dove $x_0 \in [a,b]$ ed $\eta_n \in \mathbb{R}$. Supponiamo che la successione $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga ad η; si provi che allora

$$\lim_{n\to\infty} [\|y_n - y\| + \|y_n' - y'\|] = 0,$$

dove y è la soluzione di

$$\begin{cases} y'(x) = \alpha(x)y(x) + f(x) \\ y(x_0) = \eta \end{cases}.$$

ii. Siano α ed f come sopra e supponiamo che y soddisfi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \alpha(x)y(x) + f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Provare che esiste $M \coloneqq M(a,b,\|\alpha\|) > 0$ tale che

$$\|y\| + \|y'\| \le M(\mid y_0 \mid + \|f\|).$$