a.a. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Quinto foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
10 aprile 2018

Argomenti: integrali in senso generalizzato, equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 1

i. Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a+\ell, b]$ per ogni $\ell > 0$. Mostrare che f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \coloneqq \delta(\varepsilon)$ tale che

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } x_0, x_1 \in (a, a+\delta).$$

ii. Enunciare e dimostare una caratterizzazione analoga a quella del punto precedente per funzioni $f\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ integrabili su ogni compatto $[a, a+\ell]$, $\ell > 0$.

Esercizio 2

Siano $a < \xi < b$ tre numeri reali e sia $f\colon [a,b]\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile in $[a, x_0-\ell]$ e $[x_0+\ell, b]$ per ogni $\ell > 0$. Si definisce *valore principale secondo Cauchy* dell'integrale di f su $[a,b]$ la quantità

$$\text{p.v.} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \coloneqq \lim_{\ell\to 0^+} \left[\int_a^{x_0-\ell} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0+\ell}^b f(t)\mathrm{d}t \right]$$

quando il limite al membro destro esiste finito. Mostrare che se f è integrabile su $[a,b]$ (in senso classico o generalizzato) allora p.v. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Produrre un esempio di funzione che ammette integrale finito nel senso del valore principale ma non in senso generalizzato.

Esercizio 3

Provare la seguente *generalizzazione del teorema della media integrale:* se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in (a,b) ed integrabile in $[a,b]$ in senso generalizzato, allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Esercizio 4

i. Si supponga che la funzione $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sia decrescente, infinitesima per $x \to +\infty$ e derivabile con derivata continua. Mostrare che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

è convergente.

ii. Provare che la conclusione resta valida anche senza suppore f derivabile.

Esercizio 5

i. La funzione $f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$ è integrabile in $[e, +\infty)$?

ii. È vero che se esiste $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

iii. Sia $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione decrescente, infinitesima per $x \to +\infty$ e integrabile in senso generalizzato in $[0,+\infty)$. Si verifichi che allora

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0,$$

mentre l'implicazione inversa è falsa.

Esercizio 6

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $c > 1$. Discutere la convergenza dei seguenti integrali al variare del parametro reale α:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)\,|\,\log(a-t)\,|^{\alpha}}, \qquad \int_c^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,|\,\log(t)\,|^{\alpha}}.$$

Esercizio 7

Si considerino le funzioni integrali

$$F(x) := \int_1^{\log(x)} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t, \quad G(x) := \int_1^{x} \frac{e^t - 1}{\sqrt[3]{t^2(t-2)}}\mathrm{d}t, \quad H(x) := \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t\sqrt{|\ t-1\ |}}\mathrm{d}t.$$

Stabilire il domininio di definizione di ciascuna funzione, studiarne il comportamento agli estremi e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizio 8

Calcolare, a seconda del caso, l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali o la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$xy' = \mathrm{tg}(y); \quad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad ; \quad y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0;$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+1}{x^2+1} \\ y(0) = \sqrt{3} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y' + 3x^2y^4 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y' - \dfrac{y}{x} + \dfrac{\log|\ x\ |}{x} = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad .$$