A.A. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Quarto foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
6 marzo 2018

Argomenti: integrale secondo Riemann.

Esercizio 1
Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Calcolare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{x^2} f(t)\mathrm{d}t, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{b} f(t)\mathrm{d}t, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Esercizio 2
Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Esercizio 3
Sia $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e convessa; dimostrare che la funzione $F\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) \coloneqq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

è continua e convessa nel suo dominio.

Esercizio 4
Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa; provare che

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Esercizio 5
Si ponga

$$I_n \coloneqq \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n \,\mathrm{d}x \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

i. Dimostrare che

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(x))^n \,\mathrm{d}x$$

e calcolare I_0, I_1 e I_2.

ii. Verificare che

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

iii. Calcolare I_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6
Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{n} & \text{se } x = \dfrac{m}{n} \text{ con } m,n \in \mathbb{N} \text{ coprimi ed } m < n \end{cases}.$$

i. Determinare l'insieme dei punti di discontinuità di f.

ii. Dimostrare che f è integrabile secondo Riemann in $[0,1)$ e calcolare $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Esercizio 7

Dimostrare che per ogni funzione continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha

$$\int_0^x \left(\int_0^y f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y = \int_0^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$