A.A. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Terzo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
1 dicembre 2017

Argomenti: calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale, serie numeriche.

Esercizio 1
Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin(x^2)}{x^6},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x)\right]^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(x-\log(1+x))}{(e^{x^2}-1)\log(1+x)}.$$

Esercizio 2
Determinare per quali valori dei parametri $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono derivabili:

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x}-1 & \text{per } x>0 \\ \alpha+\beta x & \text{per } x\le 0 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} \alpha-\beta x^2 & \text{per } x>0 \\ \alpha & \text{per } x=0 \\ 1-\cos(x) & \text{per } x<0 \end{cases}, \quad h(x)=\begin{cases} \beta x & \text{per } x>0 \\ \alpha & \text{per } x=0 \\ xe^{\frac{1}{x}} & \text{per } x<0 \end{cases}.$$

Esercizio 3
Calcolare la derivata n-esima della funzione $f(x)=x^{n-1}\log(x)$.

Esercizio 4

i. Dimostrare che per ogni $x\ge 0$

$$e^x \ge 1+x \quad \text{e} \quad \log(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2}.$$

ii. Distinguendo i casi $y=0$ ed $y\neq 0$, provare che per ogni $x,y\ge 0$ e per ogni $0<\alpha<\beta$ risulta

$$\left(x^\beta+y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \left(x^\alpha+y^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Esercizio 5
Sia data $f\colon(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua e derivabile.

i. Supponiamo che esista finito il limite $\ell' := \lim_{x\to+\infty} f'(x)$; provare che allora $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell'$.

ii. Supponiamo che esistano finiti i limiti di f ed f' per $x\to+\infty$; provare che allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

Esercizio 6

i. Dimostrare che non esiste una funzione $f\in C^1([0,1])$ tale che $|\ f'(x)\ |=1$ in $[0,1]$ e che $f(0)=f(1)=1$.

ii. Dare un esempio di funzione $f\in C^0([0,1])$ che sia derivabile in $(0,1)$ escluso al piú un numero finito di punti e che soddisfi le uguaglianze $f(0)=f(1)=1$ e $|\ f'(x)\ |=1$ laddove la derivata esiste.

Esercizio 7

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n3^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n\sqrt{n+1}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!e^n}{3^n n^n}.$$

Esercizio 8

Stabilire il carattere delle seguenti serie al variare dei parametri $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\binom{n}{k}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}, \quad \sum_{n=9}^{+\infty} \frac{\log(|\ x\ |+\sqrt{n})}{n^2 \mid x \mid + n}.$$

Esercizio 9

Dimostrare che se $\{x_n\}$ è una successione positiva ed infinitesima di numeri reali, allora esiste una sua estratta $\{x_{n_k}\}$ tale che $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_k}$ è convergente.