A.A. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Secondo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
8 novembre 2017

Argomenti: successioni di numeri reali e complessi, limiti di funzioni.

Esercizio 1
Dare esempi di:

a. successioni limitate non convergenti;

b. successioni illimitate che non ammettono limite;

c. successioni prive di estratte convergenti.

Esercizio 2
Calcolare, se esistono, i limiti per $n \to \infty$ delle seguenti successioni:

$$x_n = n^2 - n\sin(n), \quad x_n = 3^{-n}\mathrm{arctg}\left(\frac{(-1)^n n}{\log(n)}\right), \quad x_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \quad x_n = \frac{n^3 + 2n^{\frac{1}{7}} + 5}{n^4 + 2n + 1}$$

$$x_n = \left(\mathrm{arctg}(n^2) + 1\right)^{\frac{2}{n}}, \quad x_n = \frac{1 + \sin(n^2)}{n}, \quad x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}, \quad x_n = \mathrm{tg}\left((-1)^n \log(n)\right)),$$

$$x_n = \left(\frac{1}{2} + \exp\left(\frac{1}{n^2 + 1}\right)\right)^{\frac{n^2}{n^3+1}}, \quad x_n = \frac{2^n + (-3)^n}{4^n + (-5)^n}, \quad x_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \quad x_n = \left(\frac{n + \sqrt{n} + 3}{n}\right)^n.$$

Esercizio 3

i. Disporre le seguenti successioni in ordine crescente di infinito:

$$\frac{n^3}{\log(n)}, \quad 3^{\sqrt{n}}, \quad \log(n!), \quad n^2\log(n), \quad (\log(n))^{\sqrt{n}}.$$

ii. Studiare il comportamento asintotico delle seguenti successioni al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{n^2 + n}{n + 1} - \alpha n, \quad \sqrt[n]{\alpha^n + n!}, \quad \frac{(n!)^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^n}.$$

Esercizio 4
Si consideri la successione di Fibonacci, ovvero la successione definita dalle relazioni

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1, \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

i. Trovare un'espressione esplicita per il termine generico x_n.

ii. Stabilire il comportamento asintotico della successione.

Esercizio 5
Siano $\{ x_n \}$ ed $\{ y_n \}$ due successioni di numeri reali e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Provare o confutare le seguenti affermazioni:

a. se $x_n \to 0$, allora $|x_n| \to 0$; *b.* se $x_n \to \ell$, allora $|x_n| \to |\ell|$;
c. se $|x_n| \to 0$, allora $x_n \to 0$; *d.* se $|x_n| \to |\ell|$, allora $x_n \to \ell$;
e. se $x_n \to \pm\infty$, allora $x_n + y_n \to \pm\infty$;
f. se $\{ x_n \}$ è convergente ed $\{ y_n \}$ è limitata, $x_n + y_n$ è limitata;
g. se $x_n \to 0$, allora $(x_n)^{-1}$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$; *h.* se x_n è illimitata, allora $(x_n)^{-1} \to 0$;
i. se $x_n \to 0$, allora $x_n y_n \to 0$; *j.* se $\{ x_n \}$ ed $\{ y_n \}$ sono convergenti, $x_n y_n$ è convergente.

Esercizio 6

i. Data una successione $\{ x_n \}$ a termini positivi, dimostrare che o essa diverge a $+\infty$ oppure esiste una sottosuccessione convergente.

ii. Sia $\{ x_n \}$ una successione con la seguente proprietà: da ogni estratta $\{ x_{n_k} \}$ si può estrarre una sottosuccessione $\left\{ x_{n_{k_h}} \right\}$ convergente. Provare che $\{ x_n \}$ è limitata.

Esercizio 7

i. Sia z un numero complesso e sia $\rho(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$ la sua rappresentazione in coordinate polari. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $z^n = \rho^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta))$.

ii. Trovare le soluzioni complesse delle equazioni

$$z^2 - \bar{z}^2 - 4i = 0; \quad z^6 - z^3 + 3 = 0; \quad z^n = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

iii. Si dice che una successione di numeri complessi $\{ z_n = x_n + iy_n \}$ converge a $z = x + iy$ se le successioni di numeri reali $\{ x_n \}$ ed $\{ y_n \}$ convergono rispettivamente ad x e ad y. Supponendo che z_n converga a z nel senso suddetto, cosa si può dire delle successioni $\{ \rho_n \}$ e $\{ \vartheta_n \}$? (Intendiamo che ρ_n e ϑ_n diano l'espressione in coordinate polari di z_n, cioè $z_n = \rho_n(\cos(\vartheta_n) + i\sin(\vartheta_n))$.)

iv. Studiare il comportamento asintotico delle successioni

$$z_n = \frac{\log(n) + i}{\sqrt[3]{n}}; \quad z_n = \frac{(3-i)^n}{n}; \quad z_n = \frac{\sin(n)}{n^2}\left[\cos\left(\frac{10n\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{10n\pi}{7}\right)\right].$$

Esercizio 8

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2-x}, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-7x}{2x^2-6x^5}, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\log(x)}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}}, \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{tg}(x)}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{x^2-1}},$$

$$\lim_{x\to 1^\pm}(x^2-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad \lim_{x\to 0^\pm}\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{1-\cos(\sqrt{x})}, \quad \lim_{x\to+\infty}\left[\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right].$$

Esercizio 9

Determinare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono continue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1 & \text{per } x > 0 \\ \alpha + \beta x & \text{per } x \le 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \alpha - \beta x^2 & \text{per } x > 0 \\ \alpha & \text{per } x = 0 \\ 1 - \cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1-2x)}{1-e^{-3x}} & \text{per } x < 0 \\ \alpha & \text{per } x = 0 \\ \beta(1+x) & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

Esercizio 10

i. Siano $\{ x_n \}$ una successione limitata ed $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dare almeno due dimostrazioni del fatto che da $\{ y_n = f(x_n) \}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente.

ii. Dimostrare la versione unidimensionale del teorema di punto fisso di Brouwer: se $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ è continua e la sua immagine è contenuta in $[-1,1]$ allora esiste $\xi \in [-1,1]$ tale che $f(\xi) = \xi$ e tale punto è unico se si aggiunge l'ipotesi che f sia lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1.