A.A. 2017-2018
Corso di Analisi matematica I
prof. Matteo Novaga

Primo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
3 ottobre 2017

Argomenti: basi di logica matematica e di teoria degli insiemi; principio di induzione; estremi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esercizio 1

Siano p, q ed r tre enunciati. Mostrare che le seguenti proposizioni sono tautologie:

$$\text{principio del terzo escluso: } p \vee \neg p; \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q);$$
$$\text{modus ponens: } (p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q; \quad \text{modus tollens: } (p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p;$$
$$\text{principio di contrapposizione: } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p);$$
$$\text{sillogismo ipotetico: } (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r);$$
$$\text{leggi di De Morgan: } \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad \text{e} \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

Esercizio 2

i. Si consideri l'insieme dei segmenti orientati nello spazio tridimensionale; diremo che due segmenti orientati sono *equipollenti* se uno dei due è sovrapponibile all'altro tramite una traslazione.

a) Verificare che l'equipollenza è una relazione di equivalenza. Le classi di equivalenza indotte sono chiamate *vettori*.

b) Stabilire se la relazione "la lunghezza di v è minore della lunghezza di w" costituisce un ordinamento dell'insieme dei vettori e, in caso positivo, dire se si tratta di ordine parziale o totale.

ii. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi; fissato $d \in \mathbb{Z}$, si introduca la relazione

$$n \equiv_d m \quad \text{se e solo se } n : d \text{ ed } m : d \text{ hanno lo stesso resto.}$$

Provare che $\equiv_d$ è una relazione di equivalenza e calcolare la cardinalità del quoziente $\mathbb{Z}/\equiv_d$.

Esercizio 3

i. Dimostrare che $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ hanno cardinalità uguale tra di loro e che questa è strettamente maggiore della cardinalità di ogni insieme del tipo $\{ 0, 1, \ldots, n \}$ con $n \in \mathbb{N}$.

ii. Dimostrare che l'intervallo $(0, 1)$ e la retta $\mathbb{R}$ hanno la stessa cardinalità.

iii. Dimostare il teorema di Cantor: per ogni insieme X, la cardinalità di X è strettamente minore della cardinalità del suo insieme delle parti.

Esercizio 4

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti relazioni:

i. somma dei cubi dei primi $n+1$ numeri naturali: $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

ii. somma di una progressione geometrica: per $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$;

iii. formula del binomio di Newton: per $x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

iv. disuguaglianza di Bernoulli: per $x > -1$, $1 + nx \leq (1+x)^n$;

v. $2^{n-1} \leq n!$;

vi. $2^n n! \leq n^n$ (con $n \geq 6$).

Esercizio 5

Si calcoli al variare di $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Esercizio 6

Provare i seguenti enunciati:

i. per ognin $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, $n^3 + 5n$ è divisibile per 6;

ii. dati $n \geq 2$ numeri positivi $x_1, \ldots, x_n$ tali che il loro prodotto sia uguale ad 1, la loro somma è maggiore od uguale ad n e vi è uguaglianza se e solo se $x_1 = \cdots = x_n = 1$;

iii. dati $n \geq 2$ numeri positivi $x_1, \ldots, x_n$ tali che la loro somma sia uguale ad n, il loro prodotto sia è minore od uguale ad 1 e vi è uguaglianza se e solo se $x_1 = \cdots = x_n = 1$;

iv. dati due numeri naturali n ed m tali che $m \geq n \geq 1$, esiste un'unica coppia di naturali q ed r tale che $m = qn + r$ e $r < n$;

v. date n rette nel piano in posizione generica (ovvero disposte in modo che ciascuna coppia ha un punto di intersezione, ma nessuna terna ha un punto comune), il piano stesso è diviso $(n^2+n+2)/2$ parti.

Esercizio 7

i. Stabilire in quale sottoinsieme della retta reale ciascuna delle seguenti disequazioni

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < \sqrt{x} + 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{x}, \quad |\ x+2\ | + |\ x+1\ | > |\ x-3\ |$$

è soddisfatta.

ii. Per ciascuno degli insiemi individuati al punto precedente, individuare estremo inferiore e superiore e discutere se si tratta di massimo o minimo.

Esercizio 8

In questo esercizio, si intende sempre $n \in \mathbb{N}$. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, determinare estremo inferiore e superiore e controllare se si tratta di massimo o minimo:

$$\bigcup_{n \neq 0,1} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n \neq 0} \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

$$\left\{\ x_n = n - \frac{n}{n+1}\ \right\}, \quad \left\{\ x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\ \right\}, \quad \left\{\ 1, -\frac{1}{2}, \ldots, n, -\frac{1}{n+1}, \ldots\ \right\}$$

$$\left\{\ x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\ \right\}, \quad \{\ x \in \mathbb{R} : x - |\ t\ | x \leq |\ t - 1\ | \forall t \in \mathbb{R}\ \}$$

Esercizio 9

i. Siano X ed Y due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Verificare che

$$\inf(-X) = -\sup(X), \quad \sup(-X) = -\inf(X)$$

$$\inf(X+Y) = \inf(X) + \inf(Y) \quad \text{e} \quad \sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y),$$

avendo posto $X \coloneqq \{\ -x : x \in X\ \}$ e $X + Y \coloneqq \{\ x + y : x \in X \text{ e } y \in Y\ \}$.

ii. Siano $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali. Mostrare che valgono le due disegua-glianze seguenti:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n + \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n) \quad \text{(superadditività)},$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (x_n + y_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} y_n \quad \text{(subadditività)}.$$