A.A. 2016-2017
CORSO DI ALGEBRA LINEARE E ANALISI MATEMATICA II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Nota su un esercizio svolto in aula

a cura di Valerio Pagliari
9 maggio 2017

Nel quesito a risposta multipla n. 8 proposto nel compito d'esame del 18 luglio 2016 si chiede di stabilire se per la funzione

$$f(x,y) = \det \begin{pmatrix} \sin(x) & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

il punto $(0,0)$ sia di minimo locale, di massimo locale, di sella oppure nessuna di queste.

In aula, la soluzione proposta è stata la seguente: dapprima si calcola il gradiente di $f(x,y) = \sin(x)y - 1$

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x)y, \sin(x))$$

e si osserva che $(0,0)$ è un punto critico, poi si considera la matrice hessiana

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)y & \cos(x) \\ \cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

e la si valuta nell'origine, ottenendo

$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché quest'ultima matrice è indefinita, concludiamo che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Come tentato di spiegare in aula, la stessa conclusione può ottenersi tramite il seguente ragionamento. Una volta verificato che $(0,0)$ è un punto critico per f, ci domandiamo se esiste $r > 0$ tale che nella palla di centro $(0,0)$ e raggio r privata del punto $(0,0)$ stesso una delle seguenti condizioni è verificata:

$$f(x,y) > f(0,0) = -1 \quad \text{oppure} \quad f(x,y) < f(0,0) = -1;$$

nel primo caso, nell'origine si ha un minimo locale, mentre nel secondo si ha un massimo locale e se, infine, nessuna delle due condizioni è soddisfatta, concludiamo che $(0,0)$ è un punto di sella.

In particolare, per concludere in favore della terza opzione, basta individuare due curve γ_1 e γ_2 passanti per l'origine tali per cui lungo la prima f abbia un massimo in $(0,0)$ e lungo la seconda abbia un minimo in $(0,0)$ (suggeriamo di esplicitare il motivo per cui ciò è sufficiente).

Stando alla definzione di f, come curve è conveniente considerare i grafici rispettivamente di $g_1(x) = -\sin(x)$ e $g_2(x) = \sin(x)$. In tal modo, otteniamo:

$$f(x, -\sin(x)) = -\sin^2(x) - 1 < -1 \quad \text{per } x \neq 0$$

e

$$f(x, \sin(x)) = \sin^2(x) - 1 > -1 \quad \text{per } x \neq 0,$$

come desiderato.