a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Settimo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
19 maggio 2017

Argomenti: forme differenziali lineari e campi vettoriali nel piano e nello spazio; formule di Gauss-Green, della divergenza, di Stokes.

Esercizio 1

Sono date le seguenti coppie di forme differenziali lineari e curve:

$$\omega_1(x,y) = (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y, \quad \gamma_1(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)),\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$
$$\omega_2(x,y) = \frac{\mathrm{d}x}{x+y} + (x^2+y^2)\mathrm{d}y, \quad \gamma_2(t) = (t, t^2),\ t \in [1,2];$$
$$\omega_3(x,y,z) = y\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z, \quad \gamma_3(t) = (t,t,t+1),\ t \in [0,1].$$

i. Calcolare l'integrale di ω_i lungo γ_i per $i = 1,2,3$.

ii. Quale tra le precedenti è una forma chiusa? Quale è esatta?

iii. Determinare, laddove siano ben definite, tutte le primitive.

Esercizio 2

i. Sia $\omega(x,y) = e^x\mathrm{d}x + (1 + xe^y)\mathrm{d}y$; calcolare il suo integrale lungo il grafico della funzione $y = x^2 + e^x\cos(x)$ per $x \in [0,1]$.

ii. Data $\omega(x,y,z) = (x-z)\mathrm{d}x + (1-xy)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$, calcolarne l'integrale lungo le curve $\gamma_1(t) = (t,t,t)$ e $\gamma_2(t) = (t,t^2,t^2)$. Cosa si può dedurre dai risultati?

Esercizio 3

Data

$$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

studiarne chiusura ed esattezza nell'insieme

$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0 \,\}.$$

Qualora possibile, calcolare tutte le primitive di ω in D.

Esercizio 4

i. Studiare l'esattezza della forma differenziale

$$\omega(x,y) = y^3\cos(xy)\mathrm{d}x + (y^\alpha x\cos(xy) + 2y\sin(xy) + 2y)\mathrm{d}y$$

al variare del parametro reale α. Calcolare esplicitamente, laddove possibile, le primitive.

ii. Determinare $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ affinché la forma differenziale $\omega(x,y) = yf(x)\mathrm{d}z + xf(y)\mathrm{d}y$ sia esatta in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5

i. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio e siano $g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ed $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ rispettivamente un campo scalare ed un campo vettoriale di classe C^2. Provare le seguenti identità:

a) $\operatorname{div}(gF) = \nabla g \cdot F + g\operatorname{div}(F)$;

b) per $N = 3$, $\operatorname{rot}(gF) = \nabla g \wedge F + g\operatorname{rot}(F)$, dove $\wedge$ denota il prodotto vettoriale;

c) $\operatorname{div}(\nabla g) = \operatorname{tr}(\mathrm{H}g)$, dove tr è la traccia e H è la matrice hessiana;

d) per $N = 3$, $\operatorname{rot}(\nabla g) = 0$ (cioè i gradienti sono sempre campi irrotazionali) e $\operatorname{div}(\operatorname{rot}F) = 0$ (i rotori hanno sempre divergenza nulla).

ii. Mostrare che in $\mathbb{R}^3$ i campi vettoriali conservativi (cioè che ammettono una primitiva) sono irrotazionali. Sotto quali condizioni un campo irrotazionale è conservativo? Cosa si può dire di campi vettoriali che hanno lo stesso rotore?

iii. Dato un campo vettoriale F su $\mathbb{R}^3$, stabilire una condizione necessaria affinché risulti $F = \operatorname{rot}(G)$ per qualche campo vettoriale G.

Esercizio 6

Si consideri il campo di forze

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 - y^2 + 4}, -\frac{y}{x^2 - y^2 + 4} \right).$$

i. In che sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ F è ben definito? Si calcoli la divergenza di F, si determini la forma differenziale lineare ω associata ad F e si stabilisca se essa è chiusa.

ii. Qual è il piú grande sottoinsieme del piano contentente il punto $(0,3)$ in cui F ammette una primitiva?

iii. Calcolare il lavoro del campo F lungo la circonferenza di centro $(0,3)$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

iv. Determinare il segno del flusso uscente di F rispetto al cerchio individuato dalla precedente circonferenza.

Esercizio 7

Calcolare il flusso:

a) del campo vettoriale $F(x,y,z) = (0, yz, x)$ uscente dalla regione

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^2, x^2 + y^2 + z^2 \le 2y, z \ge 0 \};$$

b) del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x+y, y+z, x^2 - y^2)$ attraverso la porzione di superficie laterale del cilindro circolare retto di raggio 2 ed asse di simmetria coincidente con l'asse z compresa tra i punti di quota $z = 0$ e $z = 3$;

c) del campo vettoriale $F(x,y,z) = (x, z - x, y^2 - z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0, x^2 + y^2 + 2z^4 = 4 \};$$

d) del campo vettoriale $F(x,y,z) = (y+z, y, x^2 - z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0, x^2 + y^2 + 3z^4 = 1 \};$$

e) del rotore di $F = (x+y, z, x^2)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0, x^2 + y^2 + z^2 = 5 \}.$$

Esercizio 8

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio con bordo di classe C^1 e siano $f, g \in C^1(\Omega)$ due funzioni. Supponiamo inoltre che g abbia supporto compatto in Ω, ovvero che esista K compatto contenuto nell'interno di Ω tale che $g(x) = 0$ quando $x \in \Omega \setminus K$. Spiegare perché la restrizione di g al bordo di Ω è zero e provare che per ogni $i = 1, \dots, N$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x.$$

Suggerimento: si utilizzi il teorema della divergenza in combinazione con l'identità a) dell'Esercizio 5.

Esercizio 9

i. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio di cui è nota una parametrizzazione regolare per la frontiera $\partial\Omega = \gamma$; si supponga che l'orientazione di γ sia positiva (informalmente: si supponga che percorrendo γ si abbia sempre l'interno di Ω alla propria sisnistra). Mostrare che allora la misura di Ω è data dalla formula

$$|\Omega| = \int_\gamma x \mathrm{d}x.$$

Suggerimento: far uso delle formule di Gauss-Green.

ii. Qualora la frontiera del dominio al punto precedente sia data in coordinate polari tramite la relazione $r = r(\vartheta)$ con $\vartheta \in [0, 2\pi)$, provare che

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [r(\vartheta)]^2 \, \mathrm{d}\vartheta.$$

iii. Utilizzare la formula precedente per calcolare l'area racchiusa dalla lemniscata definita della relazione $r(\vartheta) = a\sqrt{\cos(2\vartheta)}$, con $a > 0$.