a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Sesto foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
12 maggio 2017

Argomento: integrali multipli.

Esercizio 1
Calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, con $\Omega = [3,4] \times [1,2]$;

b) $\displaystyle\int_\Omega \frac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = [0,1] \times [0,1]$;

c) $\displaystyle\int_\Omega \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = [0,1] \times [1,2]$;

d) $\displaystyle\int_\Omega (x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = \{\,\text{triangolo di vertici } (0,0), (1,1), (2,-1)\,\}$;

e) $\displaystyle\int_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], x^2 \le y \le \sqrt{x}\,\}$;

f) $\displaystyle\int_\Omega e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], \frac{y}{2} \le x \le \min(y,1)\,\}$;

g) $\displaystyle\int_\Omega \frac{x\sqrt{|y|}}{1+\sqrt{|y|}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = [0,1] \times [-1,2]$;

h) $\displaystyle\int_\Omega |x+y|\, e^{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = \{\,\text{triangolo di vertici } (0,0), (1,1), (1,-2)\,\}$.

Esercizio 2
Sia $a > 0$ una costante data; utilizzare le coordinate polari per calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dove Ω è l'interesezione del cerchio di centro l'origine e raggio a con il semipiano di ordinate positive;

b) $\displaystyle\int_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dove Ω è l'interesezione del cerchio di centro $(\frac{a}{2}, 0)$ passante per l'origine con il semipiano di ordinate positive;

c) $\displaystyle\int_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, con $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 2, x \le -|y|\,\}$.

Esercizio 3

i. Calcolare l'area della parte di piano delimitata da una cardioide (per la definizione, vedere Esercizio 6.*iii* del primo foglio di esercizi).

ii. Dato un dominio piano Ω di misura finita e non nulla, si definisce baricentro di Ω il punto di coordinate

$$\bar{x} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \bar{y} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

avendo denotato con $|\Omega|$ la misura di Ω. Calcolare il baricentro di una cardioide.

Esercizio 4

i. In $\mathbb{R}^3$, esibire la matrice jacobiana della trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate sferiche e della trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche. Calcolare poi il determinante della matrice trovata.

ii. Siano h, r ed R tre costanti positive assegnate e si assuma $r < R$. Calcolare il volume del guscio sferico

$$G_{\mathrm{sf}} = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \,\}$$

e del guscio cilindrico

$$G_{\mathrm{cil}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq \frac{h}{2} \right\}.$$

Esercizio 5

Calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_\Omega (x - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, essendo Ω la piramide di vertici $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$;

b) $\displaystyle\int_\Omega e^{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, essendo Ω la piramide di vertici $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 0)$ e $D = (1, 1, 2)$.

c) $\displaystyle\int_\Omega |x| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ con $\Omega = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z^2 + 2, z \in [0, 3] \,\}$;

d) $\displaystyle\int_\Omega yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dove Ω è l'intersezione del cono $\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z \,\}$ e della sfera di centro l'origine e raggio 1;

e) $\displaystyle\int_\Omega z^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ con $\Omega = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 2, z \in (0, 1) \,\}$.

Esercizio 6

Si considerino il dominio

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq y, \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

e la funzione

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{\log(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

i. Si provi che l'applicazione $\Phi\colon \{\, x > 0, y > 0 \,\} \longrightarrow \{\, u > 0, v > 0 \,\}$ definita da $\Phi(x, y) = \left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2\right)$ è un diffeomorfismo da Ω in $\Phi(\Omega)$.

ii. Calcolare

$$\int_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Esercizio 7

Calcolare i seguenti integrali:

a) $\displaystyle\int_\Omega \frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dove $\Omega = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 3 \leq xy \leq 4 \,\}$.

b) $\displaystyle\int_{\Omega_{a,b}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy}$, dove, dati a e b positivi, $\Omega_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{a} \leq x + y \leq a, \frac{1}{b} \leq \frac{y}{x} \leq b \right\}$.