

Quinto foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
28 aprile 2017

Argomento: equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio 1

i. Mostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non ammette soluzioni.

ii. Alla luce dell'esempio precedente, indicare una condizione necessaria sul campo di velocità f affinché un generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammetta soluzioni.

Esercizio 2

i. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3(x(t))^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}.$$

Mostrare che per ogni $\lambda \geq 0$ la funzione

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \lambda \\ (t - \lambda)^3 & \text{se } t \geq \lambda \end{cases}$$

risolve il problema dato.

ii. Perché il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy non si applica al problema precedente?

Esercizio 3

Trovare l'integrale generale dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{x} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ; \quad \text{c) } \begin{cases} \dot{x} = 2t \cos(x)^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ;$$

$$\text{d) } \begin{cases} \dot{x} = \cos(t)e^{t-x} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ; \quad \text{e) } \begin{cases} \dot{x} = \text{sign}(x)\sqrt{|x|} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ; \quad \text{f) } \begin{cases} \dot{x} = a(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{con } a \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}).$$

Esercizio 4

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = \frac{t}{1+t^2}x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{c) } \begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + te^t \\ x(1) = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\text{d) } \begin{cases} \dot{x} = \cos(t)e^{t^2} + 2tx \\ x(0) = 7 \end{cases} \quad ; \quad \text{e) } \begin{cases} \dot{x} + x = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} \\ x(1) = e \end{cases} \quad ; \quad \text{f) } \begin{cases} \dot{x} = \cos(t)x + e^{\sin t} \log t \\ x(0) = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 5

Disegnare dei grafici qualitativi per le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{a) } \dot{x} = (x^2 - 4x + 3)^3; \quad \text{b) } \dot{x} = -x^2 + t; \quad \text{c) } \dot{x} = -2tx; \quad \text{d) } \dot{x} = x \sin(x).$$