a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Quarto foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
21 aprile 2017

Argomenti: massimi e minimi per funzioni di piú variabili; sviluppi di Taylor.

Esercizio 1
Stabilire con lo studio delle linee di livello se la funzione f ammette massimi o minimi assoluti in Ω nei casi elencati di seguito:

a) $f(x,y) = 2x - y$ in $\Omega = \{$ triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (3,2)\}$;
b) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 1$ in $\Omega = [-1,1] \times [3,6]$;
c) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ in $\Omega = \{$ disco chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{5}\}$;
d) $f(x,y) = x^2 - y$ in $\Omega = \{$ quadrilatero di vertici $(0,0), (1,1), (1,-2), (0,-2)\}$.

Esercizio 2
Stabilire mediante l'utilizzo di opportune parametrizzazioni se la funzione f ammette massimi o minimi assoluti nei casi elencati di seguito:

a) $f(x,y) = 3x^2 - y + 3$ in $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3 \}$;
b) $f(x,y) = 12x^2 + 2y^2 + \sqrt{6}xy - 4$ lungo l'ellisse $\mathscr{E}$ di centro l'origine, fuochi sull'asse y e semiassi $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{3}$;
c) $f(x,y) = x - 2y$ in $\Omega = \{$ disco chiuso di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}\}$;
d) $f(x,y) = \exp(1 - 2x^3 + y^2)$ lungo il grafico della funzione $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Esercizio 3
i. Per ciascuna delle seguenti coppie di funzioni ed insiemi, motivare l'esistenza di massimi e minimi per la restrizione della funzione al vincolo e determinarli con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (vedere in proposito la nota dedicata):
   a) $f(x,y) = (3x+2y)^2$, $Z = \{ 4x^2 + y^2 = 4 \}$;
   b) $f(x,y,z) = x^2 - 2y + 3xz$, $Z = \{ (x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 7 \}$;
   c) $f(x,y) = x - y$, $Z = \{ (x,y) : \operatorname{arctg}(x^2 + y^2 - 2) = 2 - x + y \}$.

ii. Quali tra i problemi al punto precedente potevano essere convenientemente risolti anche senza il ricorso ai moltiplicatori di Lagrange?

Esercizio 4
Data $f\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata dal basso, si provi che la funzione $\tilde{f}$ definita da

$$\tilde{f}(x) = f(x) + |x - x_0|^2$$

ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}^N$.

Esercizio 5
Date le funzioni $f(x,y) = x^2y^3$ e $g(x,y) = \cos(e^{2y} - \sin(x) - 1)$, scriverne lo sviluppo di Taylor del secondo ordine con il resto di Peano rispettivamente nel punto $(1,1)$ e nel punto $(0,0)$.

Esercizio 6

Ricorrendo ad opportuni sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 y^2}{\operatorname{arctg}(2x^2\sqrt{y})};$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 - \sin(xy^2)}{x^3y^6 + 1};$$

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^x - x\cos(y))}{x^2 + y^2};$$

d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^2 y) + 3xy}{x^4 y^2};$$

e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(e^{x^2 y} - x\sin(xy)) - 1}{(x^2 + y^2)^2}.$$