a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Cenni al metodo dei moltiplicatori di Lagrange

a cura di Valerio Pagliari
21 aprile 2017

Sommario: quanto segue è da intedersi come una breve lista di considerazioni che tentano di giustificare la tecnica per la ricerca di massimi e minimi di funzioni vincolate nota come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*. Si tratta perlopiú di osservazioni di carattere geometrico, proposte al lettore in forma di esercizi.

Il problema che affrontiamo è il seguente: date le funzioni di N variabili reali $f, v\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, individuare gli estremi assunti dalla restrizione di f all'insieme Z che è luogo di zeri di v; vogliamo cioè trovare i punti $\bar{x} \in \Omega$ tali che

$$f(\bar{x}) = \min\{f(x) : v(x) = 0\} \quad \text{oppure} \quad f(\bar{x}) = \max\{f(x) : v(x) = 0\}.$$

Esercizio 1

In questa prima parte mostriamo sotto opportune ipotesi la seguente proprietà geometrica: *il gradiente di una funzione di piú variabili è ortogonale agli insiemi di livello della funzione stessa*

Per facilitare la comprensione, distinguiamo il caso bidimensionale, in cui gli insiemi di livello sono curve, da quello multidimensionale, in cui essi sono invece ipersuperfici.

i. Sia $v\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili reali. Si consideri $s \in \mathbb{R}$ tale che la linea di livello $\Gamma_s = \{\,(x, y) \in \Omega : f(x, y) = s\,\}$ sia non vuota. Supponiamo che esista un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma_s$ con le seguenti proprietà:

- v è differenziabile in un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$;
- esistono $\delta > 0$ ed una funzione derivabile $\varphi\colon (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ tali per cui

$$v(x, \varphi(x)) = s \quad \text{per ogni } x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta),$$

ovvero tali per cui il grafico di φ coincida con un sottoisieme di Γ_s.

Mostrare che nei punti del tipo $(x, \varphi(x))$ con $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ il gradiente di v, se non nullo, è perpedicolare al vettore tangente al grafico di φ.

Suggerimento: derivare ambo i membri dell'identità di $v(x, \varphi(x)) = s$.

ii. Sia $v\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di N variabili reali. Si consideri $s \in \mathbb{R}$ tale che l'insieme di livello $\Gamma_s = \{\,(x_1, \ldots, x_N) \in \Omega : v(x_1, \ldots, x_N) = s\,\}$ sia non vuoto. Supponiamo che esista un punto $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N) \in \Gamma_s$ con le seguenti proprietà:

- v è differenziabile in un intorno di $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N)$;
- esistono una palla $B_\delta \subset \mathbb{R}^{N-1}$ di centro $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{N_1})$ e raggio $\delta > 0$ ed una funzione derivabile $\varphi\colon B_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ tali per cui

$$v(x_1, \ldots, x_{N-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{N-1})) = z \quad \text{per ogni } (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in B_\delta,$$

ovvero tali per cui il grafico di φ coincida con un sottoisieme di Γ_s.

Mostrare che nei punti del tipo $(x_1, \ldots, x_{N-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{N-1}))$ con $(x_1, \ldots, x_{N-1}) \in B_\delta$ in cui il gradiente di v non è nullo si ha

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, N-1.$$

Dedurre dalle uguaglianze precendenti che in tali punti il gradiente di v è ortogonale al sottospazio

$$T_{\bar{x}}\Gamma_s = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} y_i + y_N = 0 \right\}.$$

Osservazione: $T_{\bar{x}}\Gamma_s$ è lo spazio tangente a Γ_s in $\bar{x}$ e va euristicamente inteso come un piano affine che approssima Γ_s in un intorno di $\bar{x}$; si tratta di una nozione che estende al caso multidimensionale il concetto di vettore tantente ad una curva. Quanto appena mostrato si può dunque esprimere dicendo che il gradiente di v in $\bar{x}$ è ortogonale al piano tangente a Γ_s in $\bar{x}$.

Esercizio 2

Vogliamo ora concentrarci sul problema di trovare degli estremi vincolati assumendo l'ipotesi semplificatrice che il vincolo sia dato in termini di una parametrizzazione. Ancora una volta, miriamo a dimostrare una condizione geometrica: *nei punti di massimo o di minimo per una funzione vincolata ad una curva parametrica, il gradiente è ortogonale al vettore tangente alla curva.*

Siano dunque $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile di N variabili reali e $\Gamma\colon [t_0, t_1] \longrightarrow \Omega$ una curva regolare. Mostrare che se $\bar{x} = \Gamma(\bar{t})$ è un punto di massimo o di minimo per la restrizione di f al sostegno di Γ, allora

$$\nabla f(\bar{x}) \cdot \dot{\Gamma}(\bar{t}) = 0.$$

Esercizio 3

Da ultimo, trattiamo il caso generale: siano $f, v\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 di N variabili reali e si ponga $Z = \Gamma_0 = \{ x \in \Omega : v(x) = 0 \}$. Supponiamo che esista un sottoinsieme di Z che coincide con il grafico di una funzione φ, ovvero che sia verificata la seguente condizione:

(*) esistono un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N) \in Z$, una palla $B_\delta \subset \mathbb{R}^{N-1}$ di centro $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{N-1})$ e raggio $\delta > 0$ ed una funzione derivabile $\varphi\colon B_\delta \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\varphi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{N-1}) = \bar{x}_N$ e $v(x_1, \ldots, x_{N_1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{N-1})) = 0$ per ogni $(x_1, \ldots, x_{N-1}) \in B_\delta$.

i. Sfruttando le conclusioni dell'Esercizio 1, verificare che se $\bar{x}$ è un punto di massimo o di minimo locale per la restrizione di f a Z, allora esiste un numero reale λ (detto *moltiplicatore di Lagrange*) tale che

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla v(\bar{x}).$$

Intrepretare geometricamente la condizione precedente.

ii. Dedurre dal punto precendente il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*: in ipotesi di regolarità C^1 sulle funzioni f e v, massimi e minimi di f ristretta al vincolo $Z = \{ v = 0 \}$ vanno ricercati tra i punti critici della funzione $F(x, \lambda) = f(x) - \lambda v(x)$.

Osservazione: per applicare il metodo delineato sopra, di fatto, occorre sapere in quali ipotesi la condizione **(*)** è verificata. Tali ipotesi sono fornite dalla teoria di Dini che riguarda le cosiddette *funzioni implicite*. Da un punto di vista pratico, qui ci limitiamo a dire che affinché **(*)** valga è sufficiente che il gradiente di v sia non nullo in $\bar{x}$.