

Secondo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
17 marzo 2017

Argomenti: continuità e calcolo differenziale per funzioni di più variabili, massimi e minimi.

Esercizio 1

Calcolare i gradienti delle seguenti funzioni definite su \mathbb{R}^N :

- a) $f(v) = |v|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$;
- b) $f(v) = g(|v|)$, essendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Esercizio 2

(Vedere anche Foglio 1, Esercizio 4.e) Studiare derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Esercizio 3

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

- a) $f(x, y) = 1 + (x^2 + y^2)|x|$;
- b) $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y < x^3 \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$;
- c) $f(x, y) = \begin{cases} e^x - e^y & \text{se } y \leq x \\ x - y & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Esercizio 4

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro positivo o nullo e si consideri

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{(\sin x)^2 + 2(\sin y)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Determinare l'insieme di definizione di f , stabilire per quali valori del parametro è continua e per quali valori è differenziabile.

Esercizio 5

- i.* Verificare che le seguenti classi di funzioni sono continue:
 - a) funzioni lipschitziane;
 - b) funzioni hölderiane;
 - c) funzioni affini.
- ii.* Verificare che le funzioni affini sono anche differenziabili. Che cosa si può dire del loro differenziale?

iii. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana; cosa si può dire della norma di ∇f nei punti in cui f è derivabile?

Esercizio 6

Calcolare i punti critici delle seguenti funzioni e tentare di stabilirne la natura:

- a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;
- b) $f(x, y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(\exp(-x^2 - y^2))$;
- c) $f(x, y, z) = \sin\left(\frac{xz}{y}\right)$;
- d) $f(x, y, z) = \log(y(x^2 + y^2))$;
- e) $f(x, y, z) = (x^2 - y) \cos(z^2)$.

Esercizio 7

Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire gli estremi inferiore e superiore dell'immagine quando le coordinate variano negli insiemi specificati. Qualora questi siano massimi o minimi, determinare i punti in cui sono assunti.

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ con $x \leq 0$, $y \leq 0$ e $x + y \geq -3$;
- b) $f(x, y) = 3x - 2y$ con $x \in [-\pi, \pi]$, $y \geq |\sin(x)|$ e $x^2 + y^2 \leq 25$;
- c) $f(x, y) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi xy}{x^2 + y^2 + 1}\right)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$;
- d) $f(x, y, z) = \log\left(\frac{y + z^2}{2x}\right)$ con $x \in [2, 3]$, $z \in [-7, 0]$ e $0 \leq y + z^2 \leq 4$;
- e) $f(v) = \exp\left(\frac{|v|^3}{5|v| - 8}\right)$ con $v \in \mathbb{R}^N$ e $|v| \leq \frac{8}{5}$.

Esercizio 8

Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire gli estremi inferiore e superiore dell'immagine. Qualora questi siano massimi o minimi, determinare i punti in cui sono assunti.

- a) $f(x, y) = \frac{\cos(2\pi x)}{1 + y^2}$;
- b) $f(x, y) = \exp\left(\frac{xy}{(xy)^2 + 4}\right)$;
- c) $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi z}{2(1 + x^2 + y^2 + x^2)}\right)$;
- d) $f(v) = -\log\left(\frac{|v|^2 - 1}{|v|^4 - 1}\right)$;
- e) $f(v) = \frac{\exp(-|v|^2)}{1 - \exp(-|v|^2)}$.