a.a. 2016-2017
Corso di Algebra lineare e Analisi matematica II
Modulo di Analisi matematica II
prof. Stefano Galatolo

Primo foglio di esercizi

a cura di Valerio Pagliari
10 marzo 2017

Argomenti: successioni e funzioni in $\mathbb{R}^N$, continuità per funzioni di piú variabili, curve, integrali curvilinei.

Esercizio 1

i. Siano x_0, y_0 e z_0 tre numeri reali assegnati e sia $v \in \mathbb{R}^N$. Stabilire il comportamento asintotico di ciascuna delle seguenti successioni e calcolare l'eventuale punto limite:

a) $(x_n, y_n) = \left(x_0 + \dfrac{n+1}{n}, \dfrac{y_0}{n^2} \right)$;

b) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\dfrac{\log(n)}{n} x_0, \cos(2\pi n y_0), \sin\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{n}} z_0 \right) \right)$;

c) $(x_n, y_n) = \left(x_0 + \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{n^2}{n+1} \right) \right), y_0 + \dfrac{\cos\left((-1)^n \pi \right)}{\sqrt[3]{n}} \right)$;

d) $(x_n, y_n, z_n) = r_n(\sin\vartheta_n \cos\psi_n, \sin\vartheta_n \sin\psi_n, \cos\vartheta_n)$, dove $r_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2} |v|$, $\vartheta_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{(-2)^n n}$ e $\psi_n = \dfrac{\pi n}{n+9}$;

e) $v_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2n} v$.

ii. Calcolare la norma delle successioni dei punti *d)* ed *e)* e stabilire il comportamento asintotico delle successioni numeriche cosí trovate.

iii. Cosa si può dire in generale del legame tra convergenza delle componenti di una successione e convergenza della successione? Qual è invece il legame con la convergenza delle norme di una successione?

Esercizio 2

Stabilire il comportamento asintotico della successione

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\log n} + (\alpha^2 - 3)\sin(n), \log\left(\frac{\alpha n^3 + 1}{(n+1)^3} \right) \right)$$

al variare del parametro reale α.

Esercizio 3

i. Determinare e disegnare il dominio delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y,z) = \dfrac{\log \sqrt[5]{z-y}}{x^2 - y}$;

b) $f(x,y) = \left(\sqrt{y^2 - 2y - x}, \dfrac{1}{\cos(2\pi x)} \right)$;

c) $f(x,y,z) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{y} \right), \operatorname{arctg}(x+z) \right)$;

d) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y^2 - z^2}, \log(1 - x^2 - y^2 - z^2), \operatorname{tg}(y) \right)$;

e) $f(v) = \dfrac{1}{|v - v_0| - 1}$, dove $v, v_0 \in \mathbb{R}^N$ con v_0 assegnato.

ii. Quali tra le funzioni precedenti sono iniettive? Quali suriettive?

Esercizio 4

Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{xy}$;

b) $f(x,y) = \dfrac{x + (x+y)^2}{2x + y - (x+y)^2}$;

c) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 z}{x^4 + y^2}$;

d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{se } x \neq 0 \\ y & \text{altrimenti} \end{cases}$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + |y|} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$;

f) $f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2 \leq y^2 + z^2 \\ \log(x^2 - y^2 - z^2) & \text{altrimenti} \end{cases}$;

g) $f(x,y) = \left(e^{y-x}, \dfrac{2y^2}{x^2 + y^2}\right)$;

h) $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x}, \dfrac{1}{z}, \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)\right)$.

Esercizio 5

Stabilire se esistono valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali per cui la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(y - \sin(x))}{e^{y - \sin(x)}} & \text{se } y > \sin(x) \\ \\ \alpha & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia continua da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 6

i. Che differenza c'è tra curve iniettive e curve semplici? Esistono curve chiuse iniettive?

ii. Stabilire se le seguenti curve:

a) strofoide: $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$ con $t \in \mathbb{R}$;

b) elica cilindrica: $\gamma(t) = (a\cos(2\pi t), a\sin(2\pi t), bt)$ con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $t \in [-1, 1]$;

c) $\gamma(t) = (a\cos(2\pi t), a\sin(2\pi t), b)$ con $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $t \in [-1, 1]$;

sono semplici, chiuse e/o di classe C^1.

iii. Ripetere il punto precedente per la cardioide $(x(t), y(t)) = r(t)(\cos(t), \sin(t))$ con $r(t) = a(1+\cos(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 7

Si considerino le curve:

a) $\gamma(t) = \left(t, t^{\frac{3}{2}}\right)$, $t \in \left[\dfrac{5}{9}, \dfrac{7}{9}\right]$;

b) $\gamma(t) = (1, t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

c) $\gamma(t) = (\sin^2(t), \cos(t)\sin(t))$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

d) spirale archimedea: $\gamma(t) = (a + bt)(\cos(t), \sin(t))$ con $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $t \in \left(-\frac{a}{b}, 2n\pi - \frac{a}{b}\right]$, $n \in \mathbb{N}$;

e) spirale logaritmica: $\gamma(t) = ae^{bt}(\cos(t), \sin(t))$ con $a \in \mathbb{R}$, $t \in [-n\pi, n\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Stabilire per quali valori del parametro t esse sono ben definite e per quali sono regolari. Calcolarne poi la lunghezza (se possibile) negli intervalli indicati.

Esercizio 8

Per $t \in [t_0, t_1]$, sia

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(t) \\ y(t) = r(t)\sin(t) \end{cases}$$

l'espressione in coordinate cartesiane di una curva piana γ. Verificare che γ è regolare se e solo se per ogni $t \in (t_0, t_1)$

$$r(t)^2 + r'(t)^2 > 0.$$

Esercizio 9

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a) $\int_\gamma x$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, a]$ con $a > 0$;

b) $\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

c) $\int_\gamma y^2$, $\gamma(t) = (t, e^t)$, $t \in [0, \log 2]$;

d) $\int_\gamma \sqrt{z}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$;

e) $\int_\gamma \frac{x^2 + z}{\sqrt{5 + 4y^2}}$, $\gamma(t) = (2t, t, t^2 + 4)$, $t \in [0, 2]$;

Esercizio 10

Siano $a, b > 0$; data l'ellisse

$$\mathscr{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

calcolare l'integrale curvilineo di $f(x, y) = xy$ lungo una curva γ che parametrizza il ramo di $\mathscr{E}$ che giace nella regione $\{ x > 0, y > 0 \}$.