Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

7 luglio 2015

Esercizio 1. Sia X uno spazio di Banach, sia V un sottospazio di X' e sia $T \in X' \setminus V$.

i) Dimostrare che, se V è chiuso rispetto alla topologia debole$*$, esiste $x \in X$ tale che $T(x) \neq 0$ e $S(x) = 0$ per ogni $S \in V$.

ii) Dire se la proprietà precedente continua a valere se si assume solo che V sia chiuso rispetto alla topologia debole.

Esercizio 2. Sia X uno spazio di Banach riflessivo, sia Y uno spazio normato e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e continuo.

i) Dimostrare che $T(B_X)$ è chiusa dove $B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leq 1\}$.

ii) Assumendo che T sia compatto dimostrare che esiste $x \in B_X$ tale che $\|T(x)\| = \|T\|$.

iii) Dire se il punto precedente continua a valere se si rimuove l'ipotesi che T sia compatto.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore $T : C^0([0,1]) \to L^2((0,1))$ definito da

$$T(u)(x) = \int_0^x u(t)\, dt \,.$$

i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo e calcolarne la norma.

ii) Dire se T è compatto.

iii) Posto $B_1 = \{u \in C^0([0,1]) \,:\, \|u\|_{C^0} \leq 1\}$, dire se $T(B_1)$ è chiuso in $L^2((0,1))$.

Soluzione Esercizio 1.

i) L'insieme $X' \setminus V$ è un aperto nella topologia debole* di X'. Una base di aperti in questa topologia è data dagli insiemi del tipo

$$U = \{T \in X' : \ T(x_1) < a_1, \cdots T(x_n) < a_n\},$$

con $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots x_n \in X$ e $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$. Dato U come sopra tale che $T \in U \subset X' \setminus V$, si ha necessariamente $a_i < 0$ per ogni i, e quindi uno qualunque dei punti x_i soddisfa la proprietà richiesta.

ii) Se consideriamo $X = \ell^1$, $X' = \ell^\infty$ e $V = c_0$, abbiamo che V è un sottospazio debolmente chiuso ma debole* denso di X'. Pertanto, la condizione $S(x) = 0$ per ogni $S \in V$ implica $T(x) = 0$ per ogni $T \in X'$, quindi la proprietà non vale in questo caso.

Soluzione Esercizio 2.

i) Essendo X riflessivo, la palla B_X è debolmente compatta in X. Poiché T è continuo anche tra gli spazi X e Y muniti delle rispettive topologie deboli, otteniamo che $T(B_X)$ è debolmente compatta in Y. Ne segue che $T(B_X)$ è debolmente chiusa e quindi anche chiusa.

   Alternativamente, data una successione $y_n = T(x_n) \in T(B_X)$ tale che $y_n \to y$ in Y, vogliamo mostrare che $y \in T(B_X)$. Poiché B_X è anche sequenzialmente debolmente compatta, esiste $x \in B_X$ tale che $x_n \rightharpoonup x$, a meno di estrarre una sottosuccessione. Basta verificare che $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ per concludere $T(x) = y$ e quindi $y = T(x) \in T(B_X)$. Infatti data $F \in Y'$, poiché T è un operatore continuo tra X e Y si ha $F \circ T \in X'$. Ne deriva, per definizione di convergenza debole di x_n, $F \circ T(x_n) \to F \circ T(x)$. Per l'arbitrarietà di $F \in Y'$ si ha che $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$.

ii) Essendo T compatto, grazie al punto precedente l'insieme $T(B_X)$ è compatto in Y e quindi esiste $y = T(x) \in T(B_X)$ tale che $\|y\| \geq \|T(z)\|$ per ogni $z \in B_X$, cioè $\|y\| = \|T\|$.

iii) Sia $X = Y = \ell^2$ e sia T definito da $T(x)_n = (1 - 1/n)\, x_n$. È facile verificare che $\|T\| = 1$ ma $\|T(x)\| < 1$ per ogni $x \in \ell^2$ tale che $\|x\| \leq 1$.

Soluzione Esercizio 3.

i) La linearità di T segue subito dalla linearità dell'integrale. Dalla disuguaglianza $|T(u)(x)| \leq \|u\|_{C^0}\, x$ segue subito

$$\|T(u)\|_{L^2} \leq \|u\|_{C^0} \|x\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, \|u\|_{C^0}\,.$$

   Osservando che la disuguaglianza precedente è in effetti un'uguaglianza per $u \equiv 1$, otteniamo che T è continuo con $\|T\| = 1/\sqrt{3}$.

ii) Osservando che

$$T(B_1) = \{v \in C^1([0,1]) : v(0) = 0 \text{ e } \|v'\|_{C^0} \leq 1\},$$

la compattezza di T segue subito dal Teorema di Ascoli–Arzelà.

iii) Per quanto osservato nel punto precedente, si ha

$$\overline{T(B_1)} = \{v \in \mathrm{Lip}([0,1]) : v(0) = 0 \text{ e } \|v'\|_{L^\infty} \leq 1\},$$

quindi l'insieme $T(B_1)$ non è chiuso in $L^2((0,1))$.