Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

3 giugno 2014

Esercizio 1. Si consideri l'operatore $T : L^1((0,1)) \to C^0([0,1])$ definito da

$$T(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, dt \qquad \text{per ogni } f \in L^1((0,1)).$$

i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.

ii) Vedere che T è a valori nel sottospazio $W^{1,1}((0,1))$.

iii) Calcolare gli autovalori di T e dedurne che T è iniettivo.

iv) Dire se T è surgettivo sul sottospazio $\{g \in W^{1,1}((0,1)) :\ g(0) = 0\}$.

v) Dire se T è compatto.

Esercizio 2. Sia X uno spazio vettoriale normato e sia C un sottoinsieme aperto e limitato di X che contiene l'origine ed è simmetrico rispetto ad essa (cioè $x \in C$ se e solo se $-x \in C$). Definiamo per ogni $T \in X'$

$$\|T\|_C = \sup_{y \in C} T(y).$$

i) Mostrare che $\| \, \|_C$ definisce una norma su X'.

ii) Mostrare che $(X', \| \, \|_C)$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 3. Sia $S : L^2((0,+\infty)) \to \ell^2$ l'operatore definito da

$$S(f)_n = \int_n^{n+1} f(t)\, dt\,.$$

i) Mostrare che S è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.

ii) Dire se S è iniettivo.

iii) Dire se S è surgettivo.

Soluzioni.

Soluzione Esercizio 1.

i)-ii) Per ogni $f \in L^1((0,1))$ la funzione $xf(x)$ appartiene a $L^1((0,1))$ per cui T è ben definito, inoltre $T(f)'(x) = xf(x) \in L^1((0,1))$ e quindi T ha valori in $W^{1,1}((0,1))$. T è lineare per la linearità dell'integrale. Vediamo che T è anche limitato: per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|T(f)(x)| \leq \int_0^x t|f(t)|\, dt \leq x \int_0^x |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

da cui segue $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$. Per calcolare la norma di T è necessario ottimizzare le disuguaglianze sopra. Cerco quindi f di segno costante (ad es. positiva) il cui supporto sia concentrato vicino a $t = 1$ e che abbia norma 1.

Presa per $n \in \mathbb{N}$, la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(t) = 0 \quad \text{ se } 0 \leq t \leq 1 - \frac{1}{n} \;\text{ e }\; f_n(t) = n \quad \text{ se } 1 - \frac{1}{n} < t \leq 1$$

ha che $\|f_n\|_{L^1} = 1$ e

$$T(f_n)(x) = 0 \quad \text{ se } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \;\text{ e }\; T(f_n)(x) = \frac{n}{2}(x^2 - 1) + 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{ se } 1 - \frac{1}{n} < x \leq 1.$$

Poiché $\|T(f_n)\|_\infty = 1 - 1/(2n)$, si conclude che $\|T\| = 1$.

iii) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ fissato e sia $f \in L^1((0,1))$ tale che $T(f) = \lambda f$. Visto che T è a valori in $W^{1,1}((0,1))$ e vale $T(f)'(x) = xf(x)$ si ottiene che f deve stare in $W^{1,1}((0,1))$ e verificare l'equazione

$$\lambda f'(x) = xf(x) \qquad x \in [0,1] \qquad f(0) = 0$$

in senso classico. A λ fissato la soluzione di questo problema è unica, essendo l'equazione soddisfatta da $f \equiv 0$ si ha che l'autovettore f deve coincidere con la funzione identicamente nulla, ossia nessun λ reale è autovalore. In particolare T è iniettivo.

iv) T non è surgettivo. Presa $g(x) = x$, analogamente a quanto visto sopra, l'equazione $T(f) = g$ equivale a

$$1 = g'(x) = xf(x) \qquad x \in [0,1] \qquad f(0) = 0$$

che non ha soluzione in $L^1((0,1))$.

v) T non è compatto. La motivazione è che, presa una qualsiasi successione di funzioni $\{f_n\}$ equilimitate in $L^1((0,1))$, si può soltanto dedurre che $\{T(f_n)\}$ è equilimitata in $W^{1,1}((0,1))$. Questo non basta ad assicurare che la successione sia anche equicontinua. Ad esempio presa $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(t) = 0 \quad \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \;\text{ o }\; \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \leq 1$$

e

$$f_n(t) = n \qquad \text{se } \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n},$$

si ha che $\|f_n\|_{L^1} = 1$ per ogni n, ma $T(f_n)$ converge puntualmente quasi ovunque a

$$f(t) = 0 \qquad \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \;\text{ e }\; f(t) = \frac{1}{2} \qquad \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1,$$

che non è una funzione continua.

Soluzione Esercizio 2.

i) Poiché C è limitato esiste $M > 0$ tale che $\|y\|_X \leq M$ per ogni $y \in C$, dove $\|\cdot\|_X$ denota la norma di X. Per ogni $T \in X'$, si ha allora

$$\|T\|_C = \sup_{y \in C} T(y) \leq \sup_{y \in C} |T(y)| \leq \sup_{y \in C} \|T\|_{X'} \|y\| \leq M \|T\|_{X'} < +\infty \qquad (*)$$

dove indichiamo con $\| \, \|_{X'}$ la norma duale standard di X' associata a $\|\cdot\|$.

Vediamo ora che $\|\cdot\|_C$ verifica tutte le proprietà di una norma su X':

a) Per ogni $T, S \in X'$ si ha che $\|T + S\|_C \leq \|T\|_C + \|S\|_C$.
Questo segue da

$$\|T + S\|_C = \sup_{y \in C} (T(y) + S(y)) \leq \sup_{y \in C} T(y) + \sup_{y \in C} S(y) \leq \|T\|_C + \|S\|_C.$$

b) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $T \in X'$ si ha $\|\lambda T\|_C \leq |\lambda| \|T\|_C$.
Fissati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $T \in X'$ se $\lambda \geq 0$ l'uguaglianza segue subito per omogeneità. Se $\lambda < 0$ invece

$$\|\lambda T\|_C = \sup_{y \in C} \lambda T(y) \leq \sup_{y \in C} |\lambda| T(-y) \leq |\lambda| \sup_{y \in C} T(y),$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che $C = -C$.

c) $\|T\|_C \geq 0$ e $\|T\|_C = 0$ se e solo se $T = 0$.
La prima affermazione segue subito dalla definizione di $\|T\|_C$ e dalla simmetria di C.
Assumiamo ora che $\|T\|_C \neq 0$. Poiché C è aperto e contiene lo zero si ha che esiste $r > 0$ tale che la palla di centro l'origine e raggio r è contenuta in C, i.e. $B(0, r) \subseteq C$. Ne segue che

$$\|T\|_C = \sup_{y \in C} T(y) \geq \sup_{y \in B(0,r)} T(y) = r \|T\|_{X'} \qquad (**)$$

da cui $\|T\|_C > 0$.

ii) Dalle disuguaglianze $(*)$, $(**)$ si ha che la norma $\|\cdot\|_C$ è equivalente alla norma $\|\cdot\|_{X'}$. Dato che, per la completezza di $\mathbb{R}$, $(X', \|\cdot\|_{X'})$ è uno spazio normato completo anche $(X', \|\cdot\|_C)$ lo è.

Soluzione Esercizio 3.

i) La linearità di S segue dalla linearità dell'integrale.
Per vedere che S è continuo, osserviamo che

$$\|S(f)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_n^{n+1} f(t)\, dt \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t)^2\, dt = \|f\|_{L^2}^2 \,. \tag{1}$$

per ogni $f \in L^2((0, +\infty))$. In particolare $\|S\|_{L(L^2,\ell^2)} \leq 1$. Per vedere che la norma è proprio uguale a 1 è suffuciente notare che la disuguaglianza in (1) diventa un'uguaglianza se la funzione f è costante su tutti gli intervalli del tipo $(n, n+1)$, con $n \in \mathbb{N}$.

ii) Verifichiamo che S non è iniettivo. Se consideriamo la funzione definita da

$$f(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{n} \qquad \text{per } t \in (n, n+1),$$

abbiamo $f \in L^2((0, +\infty))$ e $S(f)_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi l'operatore S non è iniettivo.

iii) Verifichiamo che S è surgettivo. Dato $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ consideriamo la funzione definita da $f(t) = x_n$ per $t \in (n, n+1)$. Si ha $S(f)_n = x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi l'operatore S è surgettivo.