Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in INGEGNERIA DELL'ENERGIA e INGEGNERIA CHIMICA

(A.A. 2019/2020)

Prova scritta del 14 Dicembre 2019

Cognome:____,
Nome:____

Matricola:___________________________

Problema 1. *Sia* a, c *tali che*

$$c < 1, 1 + a - \frac{a^2}{2} > 0.$$

Studiare la continuitá e la differenziabilita della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{y^2 + \ln(1+ax) + ax^2 - \sin(ax - x^2 + cy^2)}, \quad se\ (x,y) \neq (0,0),$$

$$f(x,y) = 0 \quad se\ x = y = 0$$

nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Usando sviluppo in Taylor troviamo

$$y^2+\ln(1+ax)+ax^2-\sin(ax-x^2+cy^2) = \left(1 + a - \frac{a^2}{2}\right) x^2+(1-c)y^2+o(\|(x,y)\|^2).$$

Usando ipotesi

$$c < 1, 1 + a - \frac{a^2}{2} > 0$$

troviamo f é continua, ma non e differenziabile.

$\square$

Problema 2. a) *sia $a > 0$ e sia γ_1 la curva con equazione*

$$(x^2 + y^2)^{(3/2)} = axy, x > 0, y > 0$$

Calcolare la lunghezza della curva.

b) *sia $b > 0$ e sia γ_2 la curva con equazione*

$$(x^2 + y^2)^{(5/2)} = bx^2y^2, x > 0, y > 0$$

Calcolare

$$\int_{\gamma_2} \frac{(x + ky)^2 - 2kxy - (k^2 + 1)y^2}{x^2 + y^2} ds.$$

Soluzione. Abbiamo la relazione

$$\frac{(x + ky)^2 - 2kxy - (k^2 + 1)y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Usiamo coordinate polari

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Dalla equazione

$$(x^2 + y^2)^{(k+1/2)} = x^k y^k, x > 0, y > 0$$

troviamo

$$r^{2k+1} = r^{2k} \sin^k \theta \cos^k \theta$$

e quindi

$$r = r(\theta),$$

dove

$$r(\theta) = 2^{-k} \sin^k(2\theta).$$

Abbiamo la formula

$$ds = \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$$

$$= 2^{-k}\sin^{k-1}(2\theta)\sqrt{4k^2\cos^2(2\theta)+\sin^2(2\theta)} =$$

$$2^{-k}\sin^{k-1}(2\theta)\sqrt{1+(4k^2-1)\cos^2(2\theta)}.$$

Per $k = 1$ abbiamo

$$\int_{\gamma_1} ds = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\cos^2(2\theta)}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta}d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 s}ds = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 s}ds.$$

L'integrale

$$E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta$$

con $|k| < 1$ si chiama integrale ellittico (del secondo tipo) e non si puo esprimere con funzioni elementari. Si puo calcolare con la formula

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{k^2n}{1-2n}.$$

Per $k = 2$ troviamo

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \cos(2\theta)$$

e

$$\int_{\gamma_2}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}ds = \int_0^{\pi/2}2^{-2}\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sqrt{1+15\cos^2(2\theta)}d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2}2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt + \int_{\pi/2}^{\pi}2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt$$

e usando la relazione

$$\cos(\pi - s) = -\cos s, \quad \sin(\pi - s) = \sin s$$

troviamo

$$\int_{\pi/2}^{\pi} 2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt = -\int_0^{\pi/2} 2^{-3}\cos(s)\sin(s)\sqrt{1+15\cos^2(s)}ds$$

Cosi troviamo

$$\int_{\gamma_2} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} ds =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt - \int_0^{\pi/2} 2^{-3}\cos(t)\sin(t)\sqrt{1+15\cos^2(t)}dt = 0.$$

$\square$

Problema 3. a) *Sia $k > 1$. Trovare tutti massimi, minimi locali della funzione*

$$f(x,y) = x^2 + k^2y^2 - x^4 + k^4y^4$$

nel dominio $\{x^2+y^2 < 1\}$.

b) *Sia $k > 1$. Trovare minimo e massimo della funzione*

$$f(x,y) = x^2 + k^2y^2 - x^4 + k^4y^4$$

nel domimio $\{x^2+y^2 \leq 1\}$.

Soluzione. Il gradiente di f e

$$\partial_x f = 2x - 4x^3$$

$$\partial_y f = 2k^2y + 4k^4y^3$$

I punti critici sono

$$(0,0), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Tutti tre sono dentro il dominio. La matrice Hessiana é

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-6x^2) & 0 \\ 0 & 2(k^2+6k^4y^2) \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2k^2 \end{pmatrix}$$

e quindi $(0,0)$ e punto di minimo locale con $f(0,0) = 0$. Abbiamo inoltre

$$f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2k^2 \end{pmatrix}$$

e quindi i due punti

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

sono punti di sella.

Sulla frontiera

$$x^2 + y^2 = 1$$

possiamo utilizzare i molteplicatori di Lagrange e troviamo punti critici

$$2x - 4x^3 - 2\lambda x = 0,$$

$$2k^2 y + 4k^4 y^3 - 2\lambda y = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Se $xy \neq 0$, allora abbiamo

$$2 - 4x^2 - 2\lambda = 0,$$

$$2k^2 + 4k^4 y^2 - 2\lambda = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Sottraendo le primi due troviamo

$$2k^2 + 4k^4 y^2 - 2 + 4x^2 = 0$$

e quindi

$$2k^2 + 4k^4 y^2 - 2 + 4x^2 = 2k^2 + -24k^4 y^2 - 4y^2 + 4y^2 + 4x^2 =$$

$$= 2k^2 - 24k^4 y^2 - 4y^2 + 4 = 4(k^2 - 1)y^2 + 2$$

implica che non ci siano soluzioni. Se $xy = 0$ le soluzioni sono

$$x = \pm 1, y = 0, \lambda = -1$$

$$x = 0, y = \pm 1, \lambda = k^2 + k^4.$$

Abbiamo

$$f(\pm 1, 0) = 0, \; f(0, \pm 1) = k^2 + k^4$$

La conclusione

$$\min_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) = f(0, 0) = f(\pm 1, 0) = 0,$$

$$\max_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) = f(0, \pm 1) = k^2 + k^4.$$

$\square$