

Math for Neuroscience: appunti, esercizi

VLADIMIR GEORGIEV

Dipartimento di Matematica,
Università di Pisa,
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127, Pisa, Italy.
E-mail: georgiev@dm.unipi.it

Contents

I	Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie	5
1	Richiami sulle Equazioni Ordinarie del corso di Analisi Matematica 1	7
1.0.1	Tabella delle primitive	8
1.1	Equazioni ordinarie lineari	10
1.2	Esercizi sulle equazioni ordinarie lineari del primo ordine . .	10
1.3	Equazioni particolari	11
1.4	Un'altro tipo di equazioni omogenee	12
1.5	Equazioni ordinarie di secondo ordine	13
2	Equazioni ordinarie di ordine $n \geq 1$.	15
2.1	Sistema di equazioni di ordine 1	16
2.2	Riduzione a sistema di equazioni di ordine 1	17
2.2.1	Teorema di esistenza e prolungamento della soluzioni	18
2.3	Principio di confronto	20
2.3.1	Applicazione del principio del confronto, lemma di Gronwall	22
2.3.2	Altri applicazioni del principio del confronto	22
2.4	Hints for qualitative study of ODE	24
2.5	Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti	29
2.6	Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie . . .	32
2.7	Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti	40
3	Teorema di esistenza e unicit� per un problema di Cauchy	47
3.1	Dimostrazione del Teorema di Cauchy	48

3.2	Varianti del lemma di Gronwall e unicit� della soluzione. Esercizi.	51
3.3	Dipendenza continua dei dati iniziali	54
3.4	Principio di prolungamento.	59
3.5	Risoluzione globale di un problema di Cauchy	63
3.6	Esercizi sul prolungamento della soluzioni	64
3.7	Esercizi sui sistema di biomatematica.	75
3.7.1	SIR model	79
3.8	Teorema di esistenza di Peano	79
3.9	Facoltativo: varie dimostrazioni del teorema di Peano . . .	81
4	Equazioni e sistemi lineari	87
4.1	Equazione lineare omogenea a coefficienti costanti	87
4.2	Sistemi di ordine uno e teorema di Liouville	88
4.3	Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine n	93
4.4	Wronskiano per equazioni di ordine n	94
4.5	Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine n	96
4.5.1	Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni lineari	97
4.6	Esercizi sulle equazioni lineari di ordine n : livello standard.	99
4.7	Esercizi sulle equazioni lineari di ordine n : livello elevato.	101
5	Stabilit� intorno di punto di equilibrio	109
5.1	Punti di equilibrio	109
5.2	Classificazione dei punti di equilibrio nel piano	109
5.3	Il caso di nodo; due radici reali con lo stesso segno	110
5.4	Il caso di sella; due radici reali con segno oposito	114
5.5	Il caso di fuoco; due radici complessi coniugati	117
5.5.1	I casi di degenerazione degli autovalori : stelle . . .	118
5.5.2	I casi di degenerazione degli autovalori: nodo de- genere	119
5.6	Studio di sistemi di equazioni differenziali intorno dei punti stazionari	121
5.7	Esercizi sui punti stazionari dei sistemi (2×2)	126
5.7.1	Assignment: classificazione punti di equilibrio . . .	129

5.8	Primi integrali e studio dei sistemi (2×2)	134
5.9	Esercizi sui integrali primi	136
5.10	Stabilità	142
5.11	Stabilità secondo Lyapunov	142
6	Richiami su algebra lineare	147
6.1	Applicazioni lineari e matrici	147
6.2	Autovalori e autovettori di una matrice	151
6.3	Endomorfismi diagonalizzabili	152
6.3.1	Esempi di matrici diagonalizzabili	153
6.4	Matrici simili	155
6.5	La forma canonica di Jordan	155
6.5.1	Matrice in forma canonica di Jordan	156
6.5.2	Autovettori generalizzati	158
6.6	Esponente di una matrice	164
6.7	Calcolo dell'esponente e^A con A diagonalizzabile	164
6.8	Calcolo dell'esponente e^A quando A non é diagonalizzabile	166
6.9	Calcolo di e^J con J blocco di Jordan	172
6.10	Esercizi: esponenziale di una matrice	173
7	Probabilità e statistica	179
7.1	Raccolta dei dati.	179
7.1.1	Media, mediana	180
7.1.2	Varianza e deviazione standard	182
7.1.3	Disequazione di Chebyshev	183
7.2	Idea di probabilità	183
7.2.1	Probabilità condizionale, indipendenza di eventi, formula di Bayes	184
7.3	Variabili aleatorie	185
7.3.1	Densità. Principali densità: Bernulliana, binomiale, ipergeometrica, di Poisson.	186
7.4	Definizione e calcolo di speranza e varianza.	186
7.5	Densità esponenziale. Il processo di Poisson. Densità Gaussiana, del chi quadro.	186
7.6	Idea della Legge dei Grandi Numeri, del Teorema Limite Centrale	186
7.7	Test. Generalità e principali test gaussiani.	186

Part I

Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Chapter 1

Richiami sulle Equazioni Ordinarie del corso di Analisi Matematica 1

L'equazione $y'(x) = f(y)$ é una equazione ordinaria. La soluzione si trova integrando:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx.$$

Se $F(y)$ é una primitiva di $1/f(y)$ allora $1/f(y) = F'(y)$ e tutti soluzioni $y(x)$ sono soluzioni di

$$F(y) = x + C.$$

Il problema di Cauchy

$$y'(x) = f(y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.0.1)$$

con $f(y_0) \neq 0$ ha unica soluzione $y = y(x)$ in un intorno di x_0 definita dalla equazione

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{f(t)} = x - x_0. \quad (1.0.2)$$

L'equazione

$$y'(x) = f(y)g(x),$$

é equazione a variabili separabili.

Il problema di Cauchy

$$y'(x) = f(y)g(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.0.3)$$

con $f(y_0) \neq 0$ ha unica soluzione $y = y(x)$ in un intorno di x_0 definita dalla equazione

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{f(t)} = \int_{x_0}^x g(s)ds. \quad (1.0.4)$$

Problema 1.0.1. *Trovare tutti soluzioni di*

$$y' = y^2, \quad y' = \sin y, \quad y' = 2y + 3.$$

Problema 1.0.2. *Risolvere le equazioni*

$$xy + (x+1)^2 y' = 0, \quad y' \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}.$$

Risp.

$$y = \frac{c}{x+1} e^{-1/(x+1)}, \quad y + \sqrt{1+y^2} = c(x + \sqrt{1+x^2}).$$

1.0.1 Tabella delle primitive

Funzione	Primitiva	Vincoli
x^a	$x^{a+1}/(a+1) + C$	$a \neq -1, a \in \mathbb{R}, C$ é costante
x^{-1}	$\log x + C$	C é costante .
$\sin x$	$-(\cos x) + C$	C é costante .
$\cos x$	$(\sin x) + C$	C é costante .
e^x	$e^x + C$	C é costante .
a^x	$a^x / (\log a) + C$	$a > 0$, e C é costante .
$1/\cos^2 x$	$(\tan x) + C$	$\tan x = (\sin x)/(\cos x)$, C é costante .
$1/\sin^2 x$	$(-\cot x) + C$	$\cot x = (\cos x)/(\sin x)$, C é costante .
$1/\sqrt{1-x^2}$	$(\arcsin x) + C$	C é costante .
$1/\sqrt{k^2-x^2}$	$(\arcsin(x/k)) + C$	$k > 0$, C é costante .
$1/\sqrt{1+x^2}$	$(\log x + \sqrt{1+x^2}) + C$	C é costante .
$1/\sqrt{k^2+x^2}$	$(\log x + \sqrt{k^2+x^2}) + C$	$k \neq 0$, C é costante .
$1/(1+x^2)$	$\arctan x + C$	$k \neq 0$, C é costante .
$1/(k^2+x^2)$	$k^{-1} \arctan(x/k) + C$	$k \neq 0$, C é costante .
$1/(k^2+(ax+b)^2)$	$(ak)^{-1} \arctan((ax+b)/k) + C$	$k \neq 0$, C é costante .

Quindi abbiamo le relazioni:

$$\int x^A dx = \frac{x^{A+1}}{A+1} + C, A \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

La sostituzione universale $u = \tan x/2$, soddisfa

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

Problema 1.0.3. Calcolare

$$\text{(a)} \int \frac{1}{\sqrt[n]{x}} dx, \text{(b)} \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx, \text{(c)} \int 3^x e^x dx$$

$$\text{(d)} \int \frac{\cos^2 x + \sqrt{1-x^2} \cos^2 x \sin x - \sqrt{1-x^2}}{\cos^2 x \sqrt{1-x^2}} dx$$

Problema 1.0.4. *Calcolare*

$$\int \frac{x^7 dx}{(1+4x^8)^4}.$$

1.1 Equazioni ordinarie lineari

L'equazione

$$y' = a(t)y(t) + b(t), \quad (1.1.5)$$

dove $t \in I$ e I e' un intervallo in \mathbb{R} si chiama equazione lineare. Se $b(t) = 0$ l'equazione si chiama omogeneo. Tutte le soluzioni di questa equazione si possono rappresentare come

$$y(t) = e^{A(t)} \left(c + \int b(s)e^{-A(s)} ds \right),$$

dove $A(t) = \int a(s)ds$ e' una primitiva di $a(t)$. Il problema di Cauchy

$$y' = a(t)y(t) + b(t), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.1.6)$$

ha unica soluzione definita da

$$y(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x b(s)e^{-A(s)} ds \right), \quad A(t) = \int_{x_0}^t a(s)ds.$$

1.2 Esercizi sulle equazioni ordinarie lineari del primo ordine

Problema 1.2.1. *Trovare tutti soluzioni di*

$$1) y' = 3t^2 y(t) + t^5, \quad 2) y' = y + \sin t, \quad 3) 2ty' + y = y^3 t^3 e^{2t}$$

Risp.

$$1) y(t) = ce^{t^3} - \frac{1}{3}(t^3 + 1), \quad 2) y(t) = ce^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

$$3) y^2(t) = ct - e^{2t} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} \right).$$

Problema 1.2.2. *Trovare tutti soluzioni della equazione di Riccati*

$$3t^2 y' + y^2 t^2 + 2 = 0,$$

Suggerimento. Una soluzione particolare e' del tipo $y(t) = a/t$, dove $a = 1, 2$. Dopo la sostituzione $y = x + 1/t$ otteniamo l'equazione di Bernoulli

$$3tx' + x^2 t + 2x = 0$$

Le soluzioni sono $x = 0$ o $x = (t + ct^{2/3})^{-1}$.

Problema 1.2.3. *Sia $f(t)$ e T -periodica e continua. Verificare che l'equazione $y'(t) = f(t)y(t)$ ha una soluzione periodica con periodo T se e solo se $\int_0^T f(t)dt = 0$.*

Problema 1.2.4. *Sia $f(t)$ e T -periodica e continua. Se l'equazione $y'(t) = f(t)y(t)$ ha una soluzione limitata allora $\int_0^T f(t)dt = 0$.*

Problema 1.2.5. *Sia $a(t)$ e T -periodica e continua. Verificare che l'equazione $y'(t) = a(t)y(t)$ ha una soluzione periodica con periodo T se e solo se $\int_0^T a(t)dt = 0$.*

Problema 1.2.6. *Sia $a(t), b(t)$ sono funzioni continui con periodo T e $\int_0^T a(t)dt \neq 0$. Quante soluzioni periodiche con periodo T ha l'equazione lineare $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$.*

Problema 1.2.7. (Peron) *Sia $a(t), b(t)$ sono funzioni continui in \mathbb{R} tali che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a_0 < 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = b_0$$

calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$, dove $y(t)$ e la soluzione di $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$.

Risp. b_0/a_0 .

1.3 Equazioni particolari

L'equazione di Bernoulli

$$z' = a(t)z(t) + b(t)z^k, \quad k \neq 0, 1, \quad (1.3.7)$$

si può trasformare in (1.1.5) con la trasformata

$$z^A = y,$$

dove il parametro A si sceglie in modo opportuno. Abbiamo le relazioni

$$\underbrace{Az^{A-1}z'}_{y'} = Az^{A-1}(az + bz^k) = Aay + Abz^{A-1+k},$$

quindi con $A = 1 - k$ deduciamo

$$y' = Aay + Ab.$$

L'equazione di Riccati

$$z' = a(t)z^2(t) + b(t)z + c(t), \quad (1.3.8)$$

non si può risolvere esplicitamente in generale. Se conosciamo una soluzione $z_0(t)$ usando la sostituzione

$$z(t) = u(t) - z_0(t)$$

possiamo ottenere una equazione (rispetto $u(t)$) tale che questa equazione è una equazione di Bernoulli.

1.4 Un'altro tipo di equazioni omogenee

Sia

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Allora si sostituisce $v = yt$ da cui

$$v'(t) = \frac{f(v) - v}{t}$$

e dunque

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log|t| + C.$$

Risostituendo e risolvendo rispetto a y si ottiene la soluzione cercata.

1.5 Equazioni ordinarie di secondo ordine

Problema 1.5.1. Se $y(t)$ soddisfa l'equazione

$$y''(t) = ay(t),$$

dove a è costante, allora l'energia

$$E(t) = \frac{|y'(t)|^2}{2} - a \frac{|y(t)|^2}{2}$$

è costante. Concludere che se $a < 0$, $y(t)$ soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$, allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Problema 1.5.2. Se $y(t)$ soddisfa l'equazione

$$y''(t) = ay(t),$$

dove a è costante, e $y(t)$ soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$, allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Problema 1.5.3. Se $y(t)$ soddisfa l'equazione

$$y''(t) = ay(t),$$

dove $a < 0$ è costante, allora esistono due costanti A, B tali che

$$y(t) = A \cos(\sqrt{-a} t) + B \sin(\sqrt{-a} t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Chapter 2

Equazioni ordinarie di ordine

$n \geq 1$.

Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \neq \emptyset$ un insieme aperto e connesso e $n \geq 1$ intero. Si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine n una relazione del tipo:

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.0.1)$$

dove con $u^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, n$ si indica la derivata j -esima della funzione $u(x)$.

Definizione 2.0.1. *Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} . Si definisce soluzione o integrale dell'equazione differenziale ordinaria una funzione $u = u(x)$ tale che:*

$$u(x) \in C^n(I) \quad F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale ordinaria si dice autonoma se F non dipende esplicitamente da x , cioè (2.0.1) diventa

$$F(u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.0.2)$$

L'equazione differenziale ordinaria (2.0.1) si dice scritta in forma normale se può essere esplicitata rispetto $u^{(n)}(x)$:

$$u^{(n)}(x) = G(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}). \quad (2.0.3)$$

Si dice inoltre che l'equazione differenziale ordinaria (2.0.1) è lineare se F è combinazione lineare di $u, u', \dots, u^{(n)}$, ovvero:

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = s(x) + b_0(x)u + b_1(x)u' + \dots + b_n(x)u^{(n)}$$

o, l'equazione (2.0.1) si può riscrivere come segue

$$u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)u^{(i)} + f(x)$$

dove:

$$f(x), a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x) \in C^0(I)$$

Il termine $f(x)$ è detto sorgente o forzante, e se è nullo l'equazione differenziale lineare si dice omogenea.

2.1 Sistema di equazioni di ordine 1

Sia $\mathbf{f}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\Omega \neq \emptyset$ un insieme aperto e connesso e $n \geq 1$ intero. Si definisce un sistema di equazioni differenziali ordinarie di ordine 1 in forma normale come segue

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) \quad (2.1.4)$$

Definizione 2.1.1. Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} e

$$\omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

con $\omega \neq \emptyset$ un insieme aperto, connesso e tale che

$$I \times \omega \subseteq \Omega.$$

Si definisce soluzione o integrale del sistema di equazioni (2.1.4) una funzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) : I \rightarrow \omega$$

tale che:

$$\mathbf{u}(x) \in C^n(I; \mathbb{R}^n) \quad \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \forall x \in I.$$

Remark 2.1.1. Ricordiamo la definizione dello spazio $C(I; X)$ dove I è intervallo in \mathbb{R} e X è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n . Lo spazio $C(I; X)$ è lo spazio di tutti funzioni

$$f : I \rightarrow X$$

tali che f è continua.

Se I è un intervallo aperto in \mathbb{R} e $k \geq 1$ è un intero, allora $C^k(I; X)$ è lo spazio di tutti funzioni

$$f : I \rightarrow X$$

tali che f è differenziabile fino ad ordine k in I e tutte le derivate fino ad ordine k sono continui in I .

Finalmente, se $[a, b]$ è un intervallo chiuso e $k \geq 1$, allora $C^k([a, b]; X)$ è lo spazio di tutti funzioni

$$f : [a, b] \rightarrow X$$

tali che esiste intervallo aperto $I \supset [a, b]$ ed una funzione

$$F \in C^k(I; X)$$

tale che

$$f(t) = F(t)$$

per ogni $t \in [a, b]$. La funzione F si chiama estensione di f nel intervallo $I \supset [a, b]$.

2.2 Riduzione a sistema di equazioni di ordine 1

Di particolare rilevanza è la riduzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale ad un sistema differenziale del primo ordine. Questa tecnica permette di semplificare notevolmente alcuni tipi di problemi. Sia:

$$u^{(n)}(x) = G(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

un'equazione differenziale di ordine n di tipo normale. Si definiscono:

$$u_j = u^{(j-1)}(x) \quad \mathbf{u} = (u_j) \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

in modo che

$$u'_j = u_{j+1}, j = 1, \dots, n-1,$$

e

$$u'_n = G(x, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

L'equazione differenziale é dunque equivalente al sistema:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \vdots \\ u'_{n-1} = u_n \\ u'_n = G(x, u_1, u_2, \dots, u_n) = G(x, \mathbf{u}) \end{cases}$$

Ponendo:

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ G(x, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$$

ovvero, detto in altri termini, si puo' sempre tradurre tutto in un'equazione di ordine 1.

2.2.1 Teorema di esistenza e prolungamento della soluzioni

Sia \mathbf{f} una funzione definita in un intorno del punto $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$\Omega = I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq b\}$$

con a, b reali positivi, e si ponga che f é almeno di classe C^0 in tale intorno. Si supponga inoltre f lipschitziana rispetto alla variabile u e uniformemente continua rispetto alla variabile x :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall t \in I \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in J \quad (2.2.5)$$

con $L > 0$ costante di Lipschitz.

Theorem 2.2.1. *Se f é uniformemente continua rispetto alla variabile t e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianità (2.2.5), allora esiste $T > 0$, tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & |t - t_0| < T; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}, \quad (2.2.6)$$

possiede una soluzione unica

$$\mathbf{u}(t) \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); J),$$

dove

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < b\}.$$

La dimostrazione sar  fatta nelle sezioni successivi.

Il seguente teorema di prolungamento ha un ruolo fondamentale nello studio qualitativo delle equazioni e sistemi di equazioni ordinarie.

La frontiera di Ω é

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2,$$

dove

$$S_1 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| = a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < b\},$$

$$S_2 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| = b\}.$$

Theorem 2.2.2. *(Prolungamento massimale a destra della soluzione del Problema di Cauchy) Sia*

$$f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 2.2.1 di esistenza ed unicit  locale. Allora ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (2.2.6) ha un unico prolungamento massimale a destra

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che abbiamo le due possibilit : o

$$T_{max} = A \quad (2.2.7)$$

o per ogni successione $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$, tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

abbiamo

$$u^* \in \{y; \|y - u_0\| = B\}. \quad (2.2.8)$$

2.3 Principio di confronto

Lemma 2.3.1. (*Principio di confronto*) Siano

$$y(t); Y(t) : [t_0, t_1] \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$$

funzioni derivabili,

$$f, F : [t_0, t_1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

funzioni continue, con

$$f(t, y) < F(t, y), \quad \forall (t, y) \in [t_0, t_1] \times V \quad (2.3.9)$$

tali che:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.10)$$

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.3.11)$$

Se

$$y(t_0) \leq Y(t_0) \quad (2.3.12)$$

allora

$$y(t) < Y(t) \quad (2.3.13)$$

per ogni $t \in (t_0, t_1)$.

Idea della dimostrazione. Sappiamo che $y(t_0) < Y(t_0)$ e quindi l'insieme

$$P = \{t; y(\tau) < Y(\tau), \forall \tau \in [t_0, t]\}$$

non é vuoto, P é chiuso ed é connesso. Se $P = [t_0, t^*]$ con $t^* < t_1$ allora abbiamo

$$y(t^*) = Y(t^*), y(t) < Y(t), \forall t \in [t_0, t^*]. \quad (2.3.14)$$

Abbiamo inoltre

$$y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) < Y'(t^*) = F(t^*, Y(t^*)) \quad (2.3.15)$$

visto che $y(t^*) = Y(t^*)$ e vale (2.3.9). Usando le disequazioni (2.3.14) troviamo

$$\frac{y(t^*) - y(t^* - h)}{h} \geq \frac{Y(t^*) - Y(t^* - h)}{h}$$

per ogni $h > 0$ abbastanza piccolo. Prendendo il limite $h \rightarrow 0$ si può scrivere

$$y'(t^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t^*) - y(t^* - h)}{h} \geq Y'(t^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(t^*) - Y(t^* - h)}{h}$$

e quindi

$$y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) \geq Y'(t^*) = f(t^*, Y(t^*)).$$

L'ultima disequazione contraddice (2.3.15). \square

La stessa dimostrazione funziona per la seguente variante del principio del confronto.

Lemma 2.3.2. (*Principio di confronto*) Siano

$$y(t); Y(t) : [t_0, t_1] \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$$

funzioni derivabili,

$$f : [t_0, t_1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

funzione continua, tali che

$$y'(t) < f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.16)$$

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (2.3.17)$$

Se

$$y(t_0) \leq Y(t_0) \quad (2.3.18)$$

allora

$$y(t) < Y(t) \quad (2.3.19)$$

per ogni $t \in (t_0, t_1)$.

2.3.1 Applicazione del principio del confronto, lemma di Gronwall

Adesso possiamo discutere lemma di Gronwall.

Lemma 2.3.3. *Sia I un intervallo chiuso del tipo $[a, \infty)$ o $[a, b]$ o $[a, b)$ con $a < b$. Sia*

$$f(t), u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni continui. Se u é differenziabile nella parte interna I° e soddisfa

$$u'(t) \leq f(t) u(t), \quad t \in I^\circ,$$

allora

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right)$$

per tutti $t \in I$.

Idea della Dimostrazione. Sia

$$v(t) = u(a) \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right), \quad t \in I.$$

Applichiamo il principio del confronto (vedi Lemma 2.3.2) e troviamo

$$u(t) \leq v(t).$$

□

2.3.2 Altri applicazioni del principio del confronto

Sia

$$f : \Omega = I \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 2.2.1 di esistenza ed unicita' locale. Supponiamo che esiste una funzione

$$H(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (2.2.6) abbiamo la disequazione

$$\|u(t)\| \leq H(T), \quad \forall t \in (0, T).$$

Allora esiste un unico prolungamento massimale della soluzione

$$\tilde{u}: (t_0 - T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che é soluzione del Problema di Cauchy (2.2.6).

Problema 2.3.1. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) = x^5 u - u^3, & x \in (0, \infty); \\ u(0) = 1 \end{cases}, \quad (2.3.20)$$

ha una soluzione (globale) in $C([0, \infty))$.

Suggerimento. Moltiplicazione dell'equazione per u implica

$$E'(x) \leq x^5 u^2(x), \quad E(x) = \frac{u^2(x)}{2}.$$

Cosí otteniamo

$$E'(x) \leq C x^5 E(x).$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall é concludere che

$$E(x) = \frac{u^2(x)}{2} \leq C e^{x^6/6}. \quad (2.3.21)$$

Il Teorema del prolungamento implica che abbiamo due possibilitá:
o esiste $T > 0$ e $u(t) \in C([0, T))$ soluzione del problema di Cauchy scritto nella forma integrale

$$u(t) = 1 + \int_0^t (s^5 u(s) - u^3(s)) ds, \quad (2.3.22)$$

tale

$$\lim_{t \nearrow T} |u(t)| = \infty \quad (2.3.23)$$

o esiste soluzione globale

$$u(t) \in C([0, \infty))$$

di (2.3.22). La disequazione (2.3.21) implca che la proprietá (2.3.23) non puo essere soddisfatta, quindi esiste soluzione globale. \square

2.4 Hints for qualitative study of ODE

We study ODE of type

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

where $(t_0, x_0) \in A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ is fixed, with A a given open set and $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuous.

Remark 2.4.1. *If A is a strip: $(a, b) \times \mathbb{R}^n$, then the condition*

$$\exists c_1, c_2 \geq 0 \text{ such that } \|f(t, x)\| \leq c_1 \|x\| + c_2, \quad \forall (t, x) \in A \quad (2.4.24)$$

together with the usual hypotheses of continuity and Lipschitz continuity, guarantees the existence of the maximal solution \tilde{y} in the whole interval $] (a, b)$.

We list the following hints for qualitative study of ODE.

1. Check the local existence and uniqueness, for instance verifying the Lipschitz hypothesis
2. Check the prolongability of the solutions, for instance using (2.4.24)
3. Observe that by uniqueness the graphs of the solutions cannot intersect each other.
4. Study the sign of f .
5. Study the limit $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t)$, when reasonable and possible. Here, we can use some known facts as, for instance: if a C^1 function g satisfies $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \ell \in \mathbb{R}$ then it cannot happen that $\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = \pm\infty$
6. Sometimes it may be useful to check whether there are some symmetries in the dynamics f , since this fact may help in the study. For instance, if f has the following symmetry (oddness with respect to the vertical axis $t = 0$)

$$f(t, x) = -f(-t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

then the behavior of the solutions on the second and third quadrants is specular with respect to the one in the first and fourth quadrants. Indeed, let $y : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ be a solution with $0 \leq a \leq b$, then the function

$$\psi :]-b, -a[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto y(-t)$$

is also a solution. This can be easily checked. Let us fix $\tau \in]a, b[$ and consider $x_0 = y(\tau)$. Then we have

$$y(t) = x_0 + \int_{\tau}^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in]a, b[$$

and hence, for all $t \in]-b, -a[$, via the change of variable $\xi = -s$

$$\begin{aligned} \psi(t) = y(-t) &= x_0 + \int_{\tau}^{-t} f(s, y(s)) ds = \\ &= x_0 + \int_{-t}^{\tau} f(-\xi, y(-\xi))(-d\xi) = x_0 + \int_{-t}^{\tau} f(\xi, \psi(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

which means that ψ is solution.

7. Sometimes it may be useful to study the sign of the second derivative y'' . This can be guessed just deriving the equation.

Problema 2.4.1. *Given the following scalar equation*

$$y'(t) = (t^2 - y) \frac{\log(1 + y^2)}{1 + y^2}$$

discuss existence, uniqueness, maximal interval of existence and draw a qualitative graph of the solutions.

1) Here we have

$$f(t, x) = (t^2 - x) \frac{\log(1 + x^2)}{1 + x^2}$$

which is of class C^1 in whole \mathbb{R}^2 , which is a strip. Hence, there is local existence and uniqueness for the Cauchy problem with any initial datum $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

2) since $\log(1 + x^2) \leq 1 + x^2$ for all $x \in \mathbb{R}$, then, for every $a > 0$ we have

$$|f(t, x)| \leq |x| + a^2 \quad \forall (t, x) \in [-a, a] \times \mathbb{R}$$

which, by Remark 2.4.1 guarantees the existence of the maximal solutions in the whole interval $] - a, a[$. By the arbitrary of $a > 0$ we get the existence of the maximal solution for all times $t \in \mathbb{R}$

3) The sign of f is given by

$$\begin{cases} f(t, x) > 0 & \text{if } x < t^2 \\ f(t, x) < 0 & \text{if } x > t^2 \end{cases}$$

This means that the solutions are decreasing if $y(t) > t^2$ and increasing if $y(t) < t^2$. Moreover, when the graph of a solution crosses the parabola $y = t^2$ at time \bar{t} , then, at that time, the solution has a relative extremum: a maximum if crosses in the second quadrant (where it can only pass from the increasing region to the decreasing region), and a minimum if crosses in the first quadrant.

4) since the null function $y \equiv 0$ is a solution, then all the solutions which sometimes have a strictly positive value (respectively: a strictly negative value) are strictly positive (respectively: strictly negative) for all times $t \in \mathbb{R}$

5) since the null function $y \equiv 0$ is a solution, then all the solutions which sometimes have a strictly positive value (respectively: a strictly negative value) are strictly positive (respectively: strictly negative) for all times $t \in \mathbb{R}$

6) Let us consider a solution y negative. We must have $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$. Indeed, since the negative solutions are all increasing, the alternative is $-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \ell < 0$. But this fact would imply that $\lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) \neq -\infty$, which is absurd since

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 - y(t)) \frac{\log(1 + y(t)^2)}{1 + y(t)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 - \ell \frac{\log(1 + \ell^2)}{1 + \ell^2} = +\infty \end{aligned}$$

In a similar way, we have $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$. Indeed, y is increasing and bounded above (by zero). Hence it must converge to a finite value ℓ . But, whenever $\ell \neq 0$ we get $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = +\infty$ which is an absurd. Now, let us consider a solution y positive. First of all, let us note that y must cross the parabola $y = t^2$ in the first quadrant, passing from the decreasing

region to the increasing one, and remaining on the latter for the rest of the times. Hence we have $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. Indeed y is increasing and hence the alternative is the convergence to a finite value $\ell > 0$, but also in this case, looking to the behavior of the derivative, we would get an absurd. Concerning the behavior in the second quadrant, we note that every solution must cross the parabola in that quadrant too. Indeed, if not, we would have $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty$ with $y(t) \geq t^2$ for all $t \leq 0$ and y decreasing. But this implies

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 - y(t)) \frac{\log(1 + y(t)^2)}{1 + y(t)^2} \geq \\ &\geq \lim_{t \rightarrow -\infty} -y \frac{\log(1 + y(t)^2)}{1 + y(t)^2} = 0 \end{aligned}$$

which is an absurd since, if it is true, we would not have $y(t) \geq t^2$ definitely for $t \rightarrow -\infty$. Hence, y must definitely belong to the increasing region and, as before, the only possibility is $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$. For this example, there are not evident symmetries and also we let drop point 6), since we already have sufficient information in order to draw a qualitative picture of the solutions. The drawing is left as an exercise.

Problema 2.4.2. *Vedere per quale valore del parametro $\alpha \in R$ il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} y'(t) &= (t^4 + y^2) \frac{\log(1 + y^2)}{1 + y^2} \\ y(0) &= \alpha \end{aligned}$$

ha soluzione globale nel intervallo $[0, +\infty)$.

Soluzione. Abbiamo la disequazione

$$t^4 + y^2 \leq (1 + t^4)(1 + y^2)$$

e

$$\ln(1 + y^2) \leq C(1 + |y|)$$

Usando il principio di confronto possiamo confrontare il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= (t^4 + y^2) \frac{\log(1 + y^2)}{1 + y^2} \\ y(0) &= \alpha \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

con

$$\begin{aligned} z'(t) &= F(t, z), \\ z(0) &= |\alpha| \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

dove

$$F(t, z) = (1 + t^4)(1 + |z|)$$

Possiamo usare il confronto ed il principio di confronto ci da

$$|y(t)| \leq z.$$

Visto che il problema (2.4.26) ha soluzione globale in $[0, \infty)$ concludiamo che il problema (2.4.25) ha soluzione globale in $[0, \infty)$.

□

Problema 2.4.3. *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{ty}{1+t^2+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Verificare che la soluzione esiste unica, e si dica se tale soluzione é prolungabile in $[0, +\infty)$

Soluzione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(t, y) &= \frac{ty}{1 + y^2 + t^2} \in C^0(\mathbf{R}^2) \\ f_y(t, y) &= \frac{t(1 + y^2 + t^2) - 2ty^2}{(1 + y^2 + t^2)^2} \in C^0(\mathbf{R}^2) \end{aligned}$$

Sono verificate le ipotesi del Teorema di Esistenza ed Unicitá. Osserviamo che la retta $y = 0$ é integrale particolare dell'equazione. Inoltre in

tutto il primo quadrante ($t > 0, y > 0$) $y' > 0$; la soluzione del problema di Cauchy assegnato é dunque monotona crescente per ogni $t > 0$. Proviamo ad applicare il Teorema di Prolungamento nella striscia

$$(t, y) \in (0, +\infty) \times \mathbf{R} = S$$

Utilizzando la disuguaglianza di Young¹ nella striscia S , otteniamo

$$\left| \frac{ty}{1+y^2+t^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{t^2+y^2}{1+y^2+t^2} \leq \frac{1}{2}$$

Il Teorema di Prolungamento puó dunque essere invocato essendo verificata la condizione (ii).

□

2.5 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti é un sistema

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), \quad (2.5.27)$$

dove A é una matrice $n \times n$ con elementi in \mathbb{R} o in \mathbb{C} .

Possiamo esprimere le soluzioni di questo sistema mediante l'esponenziale della matrice tA , ove t é numero reale.

L'esponenziale di matrici gode delle seguenti proprietà:

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} \quad \forall s, t \in \mathbb{R},$$

$$\det e^{tA} = e^{t \operatorname{tr}(A)}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Lemma 2.5.1 (Soluzione di un sistema di ordine 1 a coefficienti costanti).

Per ogni (vettore colonna) $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$, la funzione

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{u}_0$$

é soluzione dell (2.5.27) su tutto \mathbb{R} .

Example 2.5.1. If $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, the given coordinates are already decoupled: the equation $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ is just $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$ and $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$. Plug in initial condition $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$: the first column of e^{At} is $\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{bmatrix}$. Plug in initial condition $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: the second column is $\begin{bmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$. So

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Example 2.5.2. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Characteristic polynomial $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, so the eigenvalues are $\pm i$. Eigenvectors for $\lambda = i$ are in the kernel of $A - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$; for example $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. So the exponential solutions are given by

$$e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

and its complex conjugate. To find real solutions, take just the right linear combinations of these to get the real and imaginary parts:

$$\mathbf{u}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

These both parametrize the unit circle, just starting at different places. The corresponding exponent is

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Next we look for diagonalization of the matrix A to diagonal one Λ with complex numbers on the diagonal or to diagonalization with Jordan blocks on the diagonal, i.e. we need

$$A = S\Lambda S^{-1}, \tag{2.5.28}$$

so that

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}. \tag{2.5.29}$$

Example 2.5.3. Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. You can find the eigenvalues as roots of the characteristic polynomial, but you might as well remember that the eigenvalues of an upper (or lower) triangular matrix are the diagonal entries: here 1 and 3. Also an eigenvalue for 1 is easy: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. For the other, subtract 3 from the diagonal entries: $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ kills $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. So

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Il caso successivo è un autovalore doppio nel sistema (2 x 2).

Example 2.5.4. Consideriamo il sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti $X' = AX$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'integrale generale del sistema lineare $X' = AX$ è dato da

$$X(t) = e^{At}C, \quad \forall C \in \mathbb{R}^2$$

dove e^{At} è la matrice esponenziale di At . Calcoliamo gli autovalori di A . Si ha che

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità $m_1 = 2$. Determiniamo gli autovettori associati a λ_1 . Risolviamo il sistema lineare $(A - I)v = 0$. Posto $v = (x, y)$ si ottiene $y = 2x$. Quindi si ha $v = (x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_1 è 1. Quindi la matrice A deve poter essere diagonalizzata con blocchi di Jordan sul diagonale. Sia $v_1 = (1, 2)$ uno di questi autovettori.

Determiniamo ora un autovettore generalizzato associato a λ_1 . Risolviamo il sistema lineare $(A - I)v = v_1$. Posto $v = (x, y)$ si ottiene $x = 2y + 1$. Quindi gli autovettori generalizzati sono della forma $v = (2y + 1, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Sia quindi $v_2 = (1, 0)$ uno di questi autovettori.

I vettori v_1 e v_2 formano, nell'ordine, le colonne della matrice di passaggio S tale che $A = S\Lambda S^{-1}$, dove Λ è la matrice simile ad A siffatta:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi si ha

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Problema 2.6.1. *Trovare tutte le soluzioni del sistema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + y(t), \\ y'(t) &= \lambda y(t) \end{aligned} \tag{2.6.30}$$

e tracciare il ritratto di fase del sistema per $\lambda = 0$.

Soluzione. La soluzione è

$$y(t) = e^{\lambda t} C_2, \quad x(t) = e^{\lambda t} (C_1 + tC_2).$$

Il ritratto di fase è nella figura 2.1.

□

Problema 2.6.2. *Trovare tutte le soluzioni del sistema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + y(t), \\ y'(t) &= \lambda y(t) \end{aligned} \tag{2.6.31}$$

e tracciare il ritratto di fase del sistema per $\lambda = 2$.

Soluzione. La soluzione è

$$y(t) = e^{\lambda t} C_2, \quad x(t) = e^{\lambda t} (C_1 + tC_2).$$

Il ritratto di fase è nella figura 2.2.

□

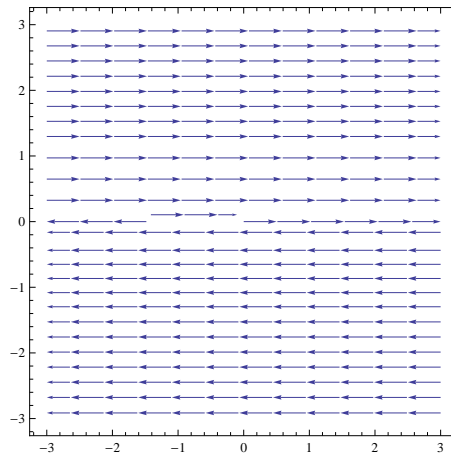


Figure 2.1: Il ritratto di fase del sistema (2.6.30).

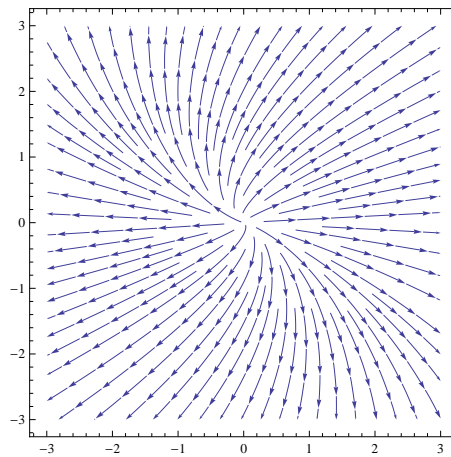


Figure 2.2: Il ritratto di fase del sistema (2.6.31).

Problema 2.6.3. *Trovare tutte le soluzioni del sistema*

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda x(t) + y(t), \\ y'(t) &= \lambda y(t) \end{aligned} \tag{2.6.32}$$

e tracciare il ritratto di fase del sistema per $\lambda = -2$.

Soluzione. La soluzione é

$$y(t) = e^{\lambda t} C_2, \quad x(t) = e^{\lambda t} (C_1 + t C_2).$$

Il ritratto di fase é nella Figura 2.3. □

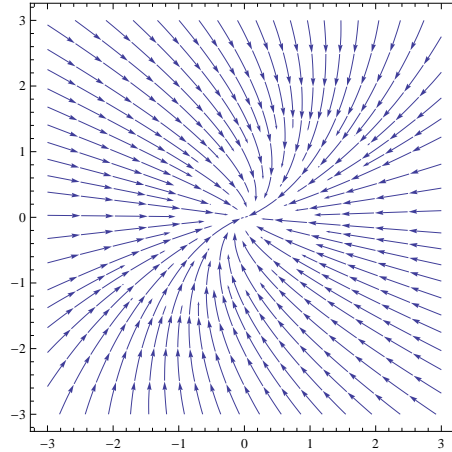


Figure 2.3: Il ritratto di fase del sistema (2.6.32).

Problema 2.6.4. Sia I un intervallo aperto in \mathbb{R} . Verificare che la condizione $u(t) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ é soluzione di (2.5.27) implica che

$$\mathbf{v}(t) = e^{-tA} \mathbf{u}(t)$$

soddisfa

$$\mathbf{v}'(t) = 0, \forall t \in I.$$

Il problema di Cauchy associato á (2.5.27) si puo descrivere come segue

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), & t \in I; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (2.6.33)$$

dove $t_0 \in I$ e I é un intervallo aperto in \mathbb{R} .

Problema 2.6.5. Sia I un intervallo aperto in \mathbb{R} . Verificare che la condizione $u(t) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ é soluzione di (2.6.33) implica che

$$\mathbf{v}(t) = e^{-tA} \mathbf{u}(t)$$

soddisfa

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{0}, \forall t \in I$$

e

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_0, \forall t \in I.$$

Problema 2.6.6. Verificare che il problema di Cauchy (2.6.33) ha unica soluzione

$$\mathbf{u}(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

definita con

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{u}_0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.6.7. Trovare le soluzioni del sistema

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.34)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 12/5 & 4/5 \\ -1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \quad (2.6.35)$$

Idea della soluzione. Le soluzioni del sistema (2.6.34) sono

$$u(t) = e^{At} u_0,$$

dove

$$u_0 = (C_1, C_2)^t = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica e

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \frac{12}{5}\right) \left(\lambda - \frac{8}{5}\right) + \frac{4}{25} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

e quindi abbiamo un autovalore di molteplicità (algebraica) 2. Abbiamo autovettore proprio

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_1 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

e un autovettore generalizzato

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t_1.$$

Sia

$$T = [t_1 t_2], S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

e

$$A = TJS, J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} e^{At} &= Te^{Jt}S, \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \\ e^{At} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 2t/5 & 4t/5 \\ -t/5 & 1 - 2t/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alla fine abbiamo

$$\begin{aligned} u(t) = e^{At}u_0 &= \frac{e^{2t}}{5} \begin{pmatrix} 5 + 2t & 4t \\ -t & 5 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{2t}}{5} \begin{pmatrix} 5C_1 + t(2C_1 + 4C_2) \\ 5C_2 - t(C_1 + 2C_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Problema 2.6.8. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \tag{2.6.36}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \tag{2.6.37}$$

Risposta. Abbiamo un autovalore $\lambda = 15$ doppio. Autovettore e

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'altro vettore generalizzato v_2 è soluzione della equazione

$$Av_2 - 15v_2 = v_1.$$

Possiamo scegliere

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Così

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

con blocco di Jordan

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

e

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Problema 2.6.9. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.38)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 13/5 & -4/5 \\ -4/5 & 7/5 \end{pmatrix} \quad (2.6.39)$$

Problema 2.6.10. *Sia*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Trovare le soluzioni del sistema

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.40)$$

dove

$$A = \sigma_1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2.$$

Problema 2.6.11. Sia

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare le soluzioni del sistema

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.41)$$

dove

$$A = \cos\theta\sigma_1 + \sin\theta\sigma_2.$$

Problema 2.6.12. Trovare le soluzioni del sistema

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.42)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -9/2 & 15 \end{pmatrix} \quad (2.6.43)$$

Risposte.

$$A = UJU^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -e^{12t}(-1+3t) & 2e^{12t}t \\ -(9/2)e^{12t}t & e^{12t}(1+3t) \end{pmatrix}$$

La curva definita dalle soluzioni

$$u_1 = u_1(t), \quad u_1(0) = v_0$$

si vede nella figura 2.4.

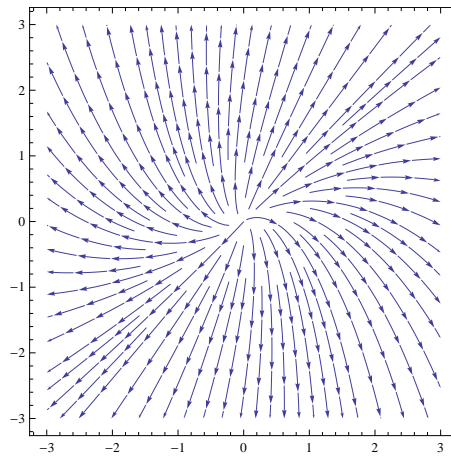


Figure 2.4: La curva $e^{At}v_0$.

Problema 2.6.13. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.44)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 2 \\ -9/2 & -9 \end{pmatrix} \quad (2.6.45)$$

Risposte.

$$A = UJU^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -e^{-12t}(-1+3t) & 2e^{-12t}t \\ -(9/2)e^{-12t}t & e^{-12t}(1+3t) \end{pmatrix}$$

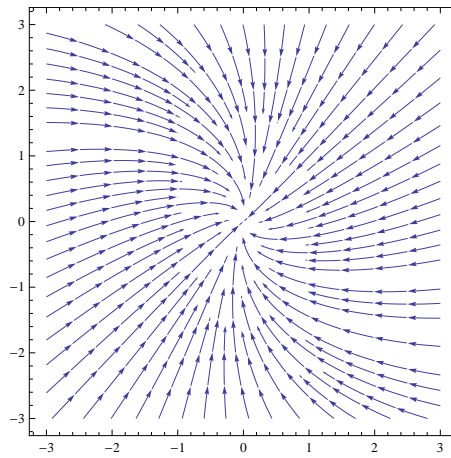
La curva definita dalle soluzioni

$$u_1 = u_1(t), \quad u_1(0) = v_0$$

si vede nella figura 2.5.

Problema 2.6.14. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (2.6.46)$$

Figure 2.5: La curva $e^{At}v_0$.

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.47)$$

Risposte.

$$A = UJU^{-1}, \quad J = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

La curva definita delle soluzioni

$$u_1 = u_1(t), \quad u_1(0) = v_0$$

si vede nella figura 2.6.

2.7 Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti

Un sistema lineare non omogeneo (a coefficienti costanti) di equazioni differenziali e' un sistema del tipo

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), \quad (2.7.48)$$

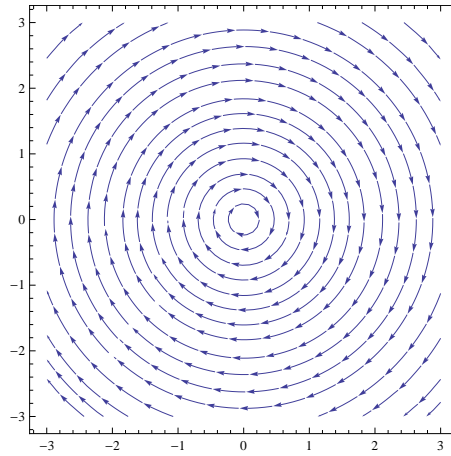


Figure 2.6: La curva $e^{At}v_0$.

Una soluzione particolare é definita dal

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds.$$

Il problema di Cauchy associato á (2.7.48)

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), & t \in I; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}, \quad (2.7.49)$$

dove $t_0 \in I$ e I é un intervallo aperto in \mathbb{R} .

Allora si ha che

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds$$

ovvero si somma alla soluzione generale del sistema omogeneo associato la soluzione particolare trovata in precedenza.

Problema 2.7.1. *Verificare che il problema di Cauchy (2.7.49) ha unica soluzione*

$$\mathbf{u}(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

definita con

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.7.2. *Risolvere*

$$\begin{cases} x' = -x - \cos t \\ y' = -y + x + \sin t. \end{cases}$$

con dati iniziali

$$x(0) = y(0) = 0.$$

Suggerimento. Ponendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

rescriviamo il problema nella forma

$$u'(t) = Au(t) + b(t),$$

dove

$$b(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

Usiamo la formula

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Usando la soluzione

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds \\ &= \begin{pmatrix} -\int_0^t e^{-t+s} \cos s ds \\ -\int_0^t (t-s) e^{-t+s} \cos s ds + \int_0^t e^{-t+s} \sin s ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dobbiamo calcolare

$$\int_0^t e^{t-s} \cos s ds, \int_0^t e^{t-s} \sin s ds$$

e

$$\int_0^t (t-s) e^{t-s} \cos s ds.$$

Si usano le formule

$$\int e^s \cos s ds = \frac{1}{2} e^s (\cos s + \sin s),$$

$$\int_0^t e^s \sin s ds = \frac{1}{2} e^s (-\cos s + \sin s)$$

e

$$\int se^s \cos s ds = \frac{1}{2} e^s (s \cos s + (-1 + s) \sin s).$$

Così troviamo

$$\begin{aligned} -\int_0^t e^{-t+s} \cos s ds &= -e^{-t} \int e^s \cos s ds = -\frac{e^{-t}}{2} (e^t (\cos t + \sin t) - 1) = \\ &= -\frac{1}{2} (\cos t + \sin t) + \frac{e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &-\int_0^t (t-s)e^{-t+s} \cos s ds + \int_0^t e^{-t+s} \sin s ds = \\ &e^{-t} \left(-t \int_0^t e^s \cos s ds + \int_0^t se^s \cos s ds \right) + \\ &\quad + e^{-t} \int_0^t e^s \sin s ds = \\ &= -\frac{te^{-t}}{2} [e^t (\cos t + \sin t) - 1] + \\ &\quad + \frac{e^{-t}}{2} e^t (t \cos t + (-1+t) \sin t) + \\ &\quad + \frac{e^{-t}}{2} [e^t (-\cos t + \sin t) + 1] = \\ &= -\frac{t}{2} (\cos t + \sin t) + \frac{te^{-t}}{2} + \frac{1}{2} (t \cos t + (-1+t) \sin t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (-\cos t + \sin t) + \frac{e^{-t}}{2} = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{te^{-t}}{2} + \frac{e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

In questo modo troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} (-\cos t - \sin t), \\ y(t) &= \frac{1}{2} t e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t. \end{aligned}$$

□

Problema 2.7.3. *Risolvere*

$$\begin{cases} x' = -x - 3 \\ y' = -y + \alpha x + 3 \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione. Sia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}$$

Si ricava $\det(A) = 1$ e $\lambda = -1$ autovalore doppio. Il punto critico di questo problema é $(-3, 3 - 3\alpha)$. Con la sostituzione

$$\begin{cases} u = x + 3 \\ v = y - 3(1 - \alpha) \end{cases}$$

ci si riconduce a studiare il sistema

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = \alpha u - v \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, l'autovalore $\lambda = -1$ é regolare ovvero é doppia la dimensione dell'autospazio associato. Siccome siamo in dimensione 2, ogni traiettoria rettilinea del piano uv passante dall'origine é una soluzione del problema.

Se $\alpha \neq 0$, l'autovalore non é regolare ed esiste solo una traiettoria rettilinea, data dalla direzione $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Le traiettorie sono tangenti alla direzione $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si puo anche osservare che le equazioni del sistema sono disaccoppiate, e dunque facili da integrare, infatti con i dati iniziali u_0, v_0 , si ricava

$$\begin{cases} u(t) = e^{-t} u_0 \\ v(t) = v_0 e^{-t} + \alpha u_0 t e^{-t} \end{cases}$$

Problema 2.7.4. *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t) + b(t), \quad (2.7.50)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7.51)$$

e

$$b(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}.$$

Proof. Abbiamo

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cosh(2t) & \sinh(2t) \\ \sinh(2t) & \cosh(2t) \end{pmatrix},$$

dove

$$\cosh(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \sinh(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2}.$$

Così troviamo

$$x(t) = \frac{1}{4} - \frac{t}{2} + C_1 \cosh(2t) + C_2 \sinh(2t),$$

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{t}{2} + C_1 \sinh(2t) + C_2 \cosh(2t).$$

□

Chapter 3

Teorema di esistenza e unicitá per un problema di Cauchy

Il teorema di esistenza e unicitá per un problema di Cauchy, noto anche teorema di Picard-Lindelöf, teorema di esistenza di Picard o teorema di Cauchy - Lipschitz, stabilisce le condizioni di esistenza e unicitá della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & t \in I; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}, \quad (3.0.1)$$

Sia \mathbf{f} una funzione definita in un intorno del punto $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq b\}$$

con a, b reali positivi, e si ponga che f é almeno di classe C^0 in tale intorno. Si supponga inoltre f lipschitziana rispetto alla variabile u e uniformemente continua rispetto alla variabile x :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall t \in I \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in J \quad (3.0.2)$$

con $L > 0$ costante di Lipschitz.

Theorem 3.0.1. *Se f é uniformemente continua rispetto alla variabile t e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianitá (3.0.2), allora esiste $T > 0$, tale che il*

problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & |t - t_0| < T; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (3.0.3)$$

possiede una soluzione unica

$$\mathbf{u}(t) \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); J),$$

dove

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < b\}.$$

Sotto l'ipotesi di continuit  della funzione e' possibile dimostrare l'equivalenza tra il problema di Cauchy e la seguente equazione integrale, detta equazione di Volterra:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad \forall t \in I_T,$$

dove:

$$I_T = (t_0 - T, t_0 + T).$$

3.1 Dimostrazione del Teorema di Cauchy

Sia

$$T < \min\left\{a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}\right\}$$

dove

$$M \geq \max\{|f(t, y)| : (t, \mathbf{y}) \in I \times J\}.$$

Si noti che $I \times J$   compatto ed il teorema di Weierstrass implica che \mathbf{f}   limitata, cos  $M \in \mathbb{R}$   ben definito. Ovviamente si pu  supporre $M > 0$.

Sia $I_T = [t_0 - T, t_0 + T]$. Si pu  considerare lo spazio di Banach

$$(X, \|\cdot\|_{C^0})$$

delle funzioni

$$\mathbf{y}: I_T \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continue con la norma dell'estremo superiore,

$$\|\mathbf{y}\|_{C^0} = \sup_{t_0-T \leq t \leq t_0+T} \|\mathbf{y}(t)\|.$$

Consideriamo la palla, definita da:

$$B = B(\mathbf{u}_0, R) = \{\mathbf{y} \in X : \|\mathbf{y} - \mathbf{u}_0\|_{C^0} \leq R\}.$$

Essendo lo spazio X completo, e $B \subseteq X$ chiuso, allora anche quest'ultimo risulta essere uno spazio completo rispetto alla norma indotta.

Si procede quindi definendo l'operatore

$$K : B(\mathbf{u}_0, R) \rightarrow X,$$

detto "operatore di Volterra", tale che

$$K(\mathbf{y})$$

e' definito da:

$$K\mathbf{y} = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds$$

Si nota innanzitutto che K é ben definito e abbiamo la proprietà

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{u}_0, b)$$

si ha

$$K(\mathbf{y}) \in B(\mathbf{u}_0, b).$$

Infatti:

$$\|K(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_0\|_{C^0} = \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right\|_{C^0} \leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\|_{C^0} ds \right|.$$

Ma per ipotesi $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq M$, da cui si deduce che:

$$\|K(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_0\|_{C^0} \leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\|_{C^0} ds \right| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq b.$$

Una volta assicurata la buona definizione di K é sufficiente dimostrare che questa e' una contrazione su B per $T > 0$ abbastanza piccolo. Il teorema delle contrazioni infatti ci assicura l'esistenza di un unico punto

fisso (o punto unito) di K in $B(\mathbf{u}_0, b)$, quindi nel nostro caso di una funzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in C^0(I_T; \mathbb{R}^n)$$

tale che $K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, cioè

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds.$$

definita sull'intervallo I_T , e risolvete dunque il problema di Cauchy (3.0.3). Tenendo conto delle ipotesi su \mathbf{f} (in particolare la lipschitzianità) si può scrivere:

$$\|K(\mathbf{y}_1) - K(\mathbf{y}_2)\|_{C^0} = \sup_{t \in I_T} \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s))] ds \right\| \leq \quad (3.1.4)$$

$$\leq \sup_{t \in I_T} \left| \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\| ds \right| \leq LT \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{C^0} \quad (3.1.5)$$

e quindi abbiamo

$$\|K(\mathbf{y}_1) - K(\mathbf{y}_2)\|_{C^0} \leq LT \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{C^0}$$

e poiché $LT < 1$, K è una contrazione.

Osservazione 3.1.1. *Un tipico esempio di un problema che non rispetta l'ipotesi di Lipschitzianità (3.0.2) è*

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{\frac{2}{3}}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione f non è localmente lipschitziana rispetto a y in nessun intorno dell'origine e infatti non si ha un'unica soluzione con questa condizione iniziale (anzi, se ne possono trovare infinite: è il fenomeno del pennello di Peano), quali ad esempio

$$y(t) = t^3, \quad y(t) = 0.$$

3.2 Varianti del lemma di Gronwall e unicità della soluzione. Esercizi.

Lemma 3.2.1. *Se $T > 0$ e*

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_j \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_j(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T, t_0 + T); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (3.2.6)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T).$$

Idea della Dimostrazione. La funzione

$$v(t) = \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|^2$$

soddisfa la disequazione

$$v'(t) \leq C v(t), v(t_0) = 0.$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall e concludere che $v(t) = 0$. \square

Problema 3.2.1. *Sia I un intervallo chiuso del tipo $[a, \infty)$ o $[a, b]$ o $[a, b)$ con $a < b$. Sia*

$$f(t), u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni continue. Se u soddisfa

$$u(t) \leq A + \int_a^t f(s) u(s) ds, \quad t \in I,$$

allora

$$u(t) \leq A \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right)$$

per tutti $t \in I$.

Problema 3.2.2. Sia $A > 0$, $I = [0, T)$, $T > 0$ e sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow (0, \infty)$$

due funzioni continui ed esiste $M > 0$ tale che

$$f(x) \leq M \quad t \in I$$

Se u soddisfa

$$u(t) \leq A + \int_a^t f(s) u(s) ds, \quad t \in I,$$

allora esiste costante $C = C(M, T, A) > 0$ tale che

$$u(t) \leq C \quad t \in I.$$

Una situazione dove si può applicare modificazione opportuna del lemma di Gronwall è la seguente.

Lemma 3.2.2. Sia $0 < \alpha < 1$, $I = [0, T)$, $T > 0$ e sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow [0, \infty)$$

due funzioni continui ed esiste $M > 0$ tale che

$$u(t) \in C^1(0, T), \quad f(t) \leq M, \quad t \in I, \quad \int_I f(t) dt \leq M$$

Se u soddisfa

$$u'(t) \leq f(t) u(t)^\alpha, \quad t \in I,$$

allora esiste costante $C = C(M, T, \alpha) > 0$ tale che

$$u(t) \leq C u(0) + C \quad t \in I.$$

Idea della dimostrazione. Integrando la disequazione differenziale, si ottiene

$$u(t) \leq u(0) + \int_0^t f(s) u(s)^\alpha ds. \quad (3.2.7)$$

Possiamo supporre che $u(t)$ è crescente. In fatti, ponendo

$$U(t) = \sup_{s \in [0, t]} u(s)$$

si applica (3.2.7) e si vede che

$$u(t) \leq u(0) + \int_0^t f(s) ds U(t)^\alpha$$

e quindi

$$U(t) \leq u(0) + \int_0^t f(s) ds U(t)^\alpha.$$

Usiamo la disequazione di Young

$$A^{1-\alpha} B^\alpha \leq (1-\alpha)A + \alpha B$$

é quindi abbiamo

$$U(t) \leq u(0) + (1-\alpha) \left(\int_0^t f(s) ds \right)^{1/(1-\alpha)} + \alpha U(t)$$

é alla fine abbiamo

$$U(t) \leq \frac{u(0)}{(1-\alpha)} + \left(\int_0^t f(s) ds \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (3.2.8)$$

□

Problema 3.2.3. Sia $0 < \alpha < 1$, $A > 0$, $I = [0, T]$, $T > 0$ e sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow (0, \infty)$$

due funzioni continui ed esiste $M > 0$ tale che

$$f(x) \leq M \quad t \in I$$

Se u soddisfa

$$u(t) \leq A + \int_a^t f(s) u(s)^\alpha ds, \quad t \in I,$$

allora esiste costante $= C(M, T, A, \alpha) > 0$ tale che

$$u(t) \leq C \quad t \in I.$$

Problema 3.2.4. Sia $\alpha > 1$, $T > 0$, $I = [0, T)$ e sia

$$f(t) : I \rightarrow (0, \infty)$$

una funzione continua tale che esiste $M > 0$ con

$$\inf_I f(x) \leq M \quad t \in I.$$

Allora si possono trovare $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, M) > 0$, e $C = C(\alpha, M)$ tale che la disequazione

$$u(t) \leq \varepsilon + \int_a^t f(s) u(s)^\alpha ds, \quad t \in I,$$

con $\varepsilon < \varepsilon_0$ implica

$$u(t) \leq C\varepsilon \quad t \in I.$$

Problema 3.2.5. Vedere se la costante C del Problema 3.2.4 dipende da T .

Problema 3.2.6. Se $T > 0$ e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_j \in C((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

con $j = 1, 2$ sono due soluzioni dell'equazione di Volterra

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)) dt, \quad t \in (t_0 - T, t_0 + T) \quad (3.2.9)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T).$$

3.3 Dipendenza continua dei dati iniziali

Sia $a > 0$, $b > 0$ e \mathbf{f} una funzione definita in un intorno del punto $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ della forma:

$$I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq b\}.$$

Theorem 3.3.1. *Se f é uniformemente continua rispetto alla variabile t e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianità (3.0.2), allora esistono $T > 0, \delta > 0$ ed una applicazione*

$$S : \{\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_0\| \leq \delta\} \rightarrow C([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R}^n), \quad (3.3.10)$$

tale che

a) $S(\mathbf{v}_0) = \mathbf{u}(t; \mathbf{v}_0)$ é soluzione dell'equazione

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T]; \quad (3.3.11)$$

b) l'applicazione (3.3.12) é Lipschiziana.

Dimostrazione. Supponiamo $t_0 = 0$ per semplicitá. Sappiamo (dal teorema di Cachy) che la scelta

$$T < \min \left\{ a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M} \right\}$$

dove

$$M \geq \max\{ |f(t, y)| : (t, \mathbf{y}) \in I \times J \}.$$

é sufficiente per applicare il teorema delle contrazione. Così l'esistenza della soluzione

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0)$$

del problema (3.3.11) é verificata.

Per la continuitá consideriamo due soluzioni

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0), \quad \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{v}}_0).$$

Allora

$$w(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0) - \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{v}}_0)$$

soddisfa

$$w(t) = \mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s, \mathbf{v}_0)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s, \tilde{\mathbf{v}}_0))] ds.$$

Possiamo procedere seguendo la dimostrazione dell'unicitá (Lemma 3.2.1) ponendo

$$v(t) = \|w(t)\|^2$$

e usando la disequazione

$$v'(t) \leq Cv(t), v(0) = \|\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0\|^2.$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall e concludere che

$$v(t) \leq C(T)\|\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0\|^2.$$

In questo modo otteniamo

$$\|\mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0) - \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{v}}_0)\|^2 \leq C(T)\|\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0\|^2.$$

□

Lemma 3.3.1. *Se f è uniformemente continua rispetto alla variabile t e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianità (3.0.2), e se $T > 0, \delta > 0$ sono definiti secondo Teorema 3.3.1, allora l'applicazione*

$$s \in (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow u(t; s, v) \quad (3.3.12)$$

tale che $u(t; s, v)$ è soluzione dell'equazione

$$u(t; s, v) = v + \int_s^t f(\sigma, u(\sigma; s, v))d\sigma, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T] \quad (3.3.13)$$

è Lipschiziana.

Dimostrazione. Si usa la disequazione di Gronwall come nella dimostrazione del Teorema 3.3.1. □

Lemma 3.3.2. *(unicità e dipendenza continua dei dati iniziali)*

Sia f uniformemente continua rispetto alla variabile t e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianità (3.0.2). Sia

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_k \nearrow t_0, \quad t_0 - T < t_1 < t_0.$$

Se

$$u(t) \in C((t_0 - T, t_0); \mathbb{R}^n), \quad \tilde{u}(t) \in C((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

sono soluzioni di

$$u(t) = u_k + \int_{t_k}^t f(s, u(s))ds, \quad t \in [t_0 - T, t_0), \quad (3.3.14)$$

$$\tilde{u}(t) = u^* + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad (3.3.15)$$

tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u^*, \quad (3.3.16)$$

allora

$$u(t) = u(t), \forall t \in (t_0 - T, t_0).$$

Dimostrazione. Usando Teorema 3.3.1 possiamo affermare che l'applicazione

$$v^* \rightarrow u(t; t^*, v^*)$$

dove $u(t; t^*, v^*)$ é soluzione di

$$u(t; t^*, v^*) = v^* + \int_{t^*}^t f(s, u(s; t^*, v^*)) ds$$

é Lipschiziana.

Possiamo scrivere

$$u(t) = u(t; t_k, u_k) \quad \tilde{u}(t) = u(t; t_0, u^*)$$

e

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \|u(t; t_k, u_k) - u(t; t_0, u^*)\| \leq \\ &\leq \|u(t; t_k, u_k) - u(t; t_k, u^*)\| + \|u(t; t_k, u^*) - u(t; t_0, u^*)\|. \end{aligned}$$

Per il primo termine usiamo la Lipschizianitá del Teorema 3.3.1 e scriviamo la disequazione

$$\|u(t; t_k, u_k) - u(t; t_k, u^*)\| \leq C \|u_k - u^*\|,$$

mentre per il Lemma 3.3.1 abbiamo

$$\|u(t; t_k, u^*) - u(t; t_0, u^*)\| \leq C |t_0 - t_k|.$$

In conclusione abbiamo

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq C \|u_k - u^*\| + C |t_0 - t_k|.$$

Fissando $t \in (t_0 - T, t_0)$ é prendendo il limite quando $k \rightarrow \infty$ deduciamo che

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| = 0.$$

□

Il Teorema 3.3.1 ci permette di definire l'applicazione

$$(s, v) \in I \times J \rightarrow u(t; s, v) \in C([s - T, s + T]; \mathbb{R}^n),$$

tale che $u(t; s, v)$ é soluzione dell'equazione

$$u(t; s, v) = v + \int_s^t \mathbf{f}(\sigma, u(\sigma; s, v)) d\sigma, \quad t \in [s - T, s + T]. \quad (3.3.17)$$

Problema 3.3.1. Se $f(t, u) = f(u)$ (caso autonomo), allora

$$u(t + \delta; s + \delta, v) = u(t; s, v).$$

per

$$t, t + \delta, s + \delta \in [s - T, s + T].$$

Idea della soluzione. La relazione (3.3.17) implica che

$$u(t; s + \delta, v)$$

$$u(t; s + \delta, v) = v + \int_{s+\delta}^t f(u(\sigma; s + \delta, v)) d\sigma$$

e quindi

$$u(t + \delta; s + \delta, v) = v + \int_{s+\delta}^{t+\delta} f(u(\sigma; s + \delta, v)) d\sigma$$

La sostituzione

$$\sigma = \theta + \delta$$

implica

$$u(t + \delta; s + \delta, v) = v + \int_s^t f(u(\theta + \delta; s + \delta, v)) d\theta$$

ed applicando il teorema di unicitá arriviamo alla conclusione. \square

3.4 Principio di prolungamento.

Sia

$$\Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

un aperto definito da

$$I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < A, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\}$$

La frontiera di Ω é

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2,$$

dove

$$S_1 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| = A, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\},$$

$$S_2 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < A, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| = B\}.$$

Theorem 3.4.1. (*Prolungamento massimale a destra della soluzione del Problema di Cauchy*) Sia

$$f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 3.0.1 di esistenza ed unicitá locale. Allora ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (3.0.3) ha un unico prolungamento massimale a destra

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che abbiamo le due possibilitá: o

$$T_{max} = A \tag{3.4.18}$$

o per ogni successione $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$, tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

abbiamo

$$u^* \in \{y; \|y - u_0\| = B\}. \tag{3.4.19}$$

Idea della dimostrazione. (prolungabilità a destra della soluzione di un problema di Cauchy)

Sia

$\mathcal{T} = \{T_1 \in (0, A); \exists u \in C((t_0 - T, t_0 + T_1); J) \text{ soluzione del Problema di Cauchy}\}$

con

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\}.$$

Ovviamente $T \in \mathcal{T}$ e \mathcal{T} non è vuoto ed è un insieme limitato. Sia

$$T_{max} = \sup_{T_1 \in \mathcal{T}} T_1.$$

Usando Lemma di Gronwall si può vedere che

Lemma 3.4.1. Se

$$0 < T_1 < T_2, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{T}$$

e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_j(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T, t_0 + T_j); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (3.4.20)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T_1).$$

Così abbiamo unica soluzione

$$u(t) \in C([t_0 - T, t_0 + T_{max}); \mathbb{R}^n)$$

che è soluzione di

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma$$

per

$$t \in [t_0 - T, t_0 + T_{max}).$$

Se esiste successione $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$, tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

e $(t_0 + T_{max}, u^*)$ é un punto interno di Ω allora possiamo definire

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*)$$

come l'unica soluzione locale del problema

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*) = u^* + \int_{t_0 + T_{max}}^t f(\sigma, \tilde{u}(\sigma; t_0 + T_{max}, u^*)) d\sigma$$

e usando il Lemma 3.3.2 concludiamo che

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*) = u(t),$$

per $t < t_0 + T$ e t vicino a $t_0 + T_{max}$.

Allora

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é prolungabile a destra di $t_0 + T_{max}$ che é in contraddizione con la definizione di T_{max} .

Così la traiettoria

$$\{(t, u(t)); t \in (t_0 - T, t_0 + T_{max})\}$$

deve avere punto di accumulazione sulla frontiera

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2.$$

□

Theorem 3.4.2. (*Prolungamento massimale a sinistra della soluzione del Problema di Cauchy*) Sia

$$f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 3.0.1 di esistenza ed unicitá locale. Allora ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (3.0.3) ha un unico prolungamento massimale a sinistra

$$u : (t_0 - T_{max}, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che abbiamo le due possibilità: o

$$T_{max} = A \quad (3.4.21)$$

o per ogni successione $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$, tale che

$$t_k \searrow t_0 - T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

abbiamo

$$u^* \in \{y; \|y - u_0\| = B\}. \quad (3.4.22)$$

Idea della dimostrazione. (prolungabilità a destra della soluzione di un problema di Cauchy)

Sia

$\mathcal{S} = \{T_1 \in (0, A); \exists u \in C(t_0 - T_1, t_0 + T) \text{ soluzione del Problema di Cauchy}\}$.

Ovviamente $T \in \mathcal{S}$ e \mathcal{S} non è vuoto ed è un insieme limitato. Sia

$$T_{max} = \sup_{T_1 \in \mathcal{S}} T_1.$$

Usando Lemma di Gronwall si può vedere che

Lemma 3.4.2. Se

$$0 < T_1 < T_2, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{S}$$

e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T_j, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_j(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T_j, t_0 + T); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (3.4.23)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T_1, t_0 + T).$$

Per comodità poniamo:

$$t_0 - T_{max} = a^+.$$

Se

$$\lim_{t \searrow a^+} u(t) = y_1$$

e

$$(a^+, y_1)$$

é un punto interno di Ω , allora possiamo procedere come prima e concludere che

$$u : (a^+, t_0 + T) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e' prolungabile a sinistra di a^+ .

Così la traiettoria

$$\{(t, u(t)); t \in (a, t_0 + T)\}$$

deve avere punto di accumulazione sulla frontiera

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2.$$

□

3.5 Risoluzione globale di un problema di Cauchy

Vediamo ora le condizioni sufficienti per la risoluzione globale in un intervallo (α, β) assegnato a priori.

Theorem 3.5.1. *(di esistenza ed unicità globale della soluzione di un Problema di Cauchy):*

Sia

$$f : [(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n] \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che

1. f sia continua in $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$;
2. f sia localmente lipschitziana rispetto a y , uniformemente rispetto a t ;

3.

$$\|f(t, y)\| \leq A(t) + B(t)\|y\|,$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ siano funzioni continue in (α, β) .

Allora

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \forall y^0 \in \mathbb{R}^n$$

esiste un'unica soluzione globale del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y^0 \end{aligned}$$

ossia esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy definita su tutto (α, β) .

Ci sono due casi tipici.

(a) Sempre assumendo che valgano le (1) e (2) si richiede (al posto dell'ipotesi (3)) che f sia limitata su

$$(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n.$$

$$\|f(t, y)\| \leq A(t)$$

ovvero la limitatezza di f .

(b) Si richiede la funzione f sia continua nel suo insieme di definizione, ossia che valga l'ipotesi (1) e che essa sia globalmente lipschitziana.

3.6 Esercizi sul prolungamento della soluzioni

Stime a priori ed esistenza globale

Problema 3.6.1. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t + 2 + e^{-2u}, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.24)$$

ha una soluzione (globale).

Problema 3.6.2. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t - e^{-u^2}, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.25)$$

ha una soluzione (globale).

Problema 3.6.3. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t^2 + \sqrt{1+u^2} \sin u, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.26)$$

ha una soluzione (globale).

Problema 3.6.4. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(t) = -u - u^3, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.27)$$

ha una soluzione (globale).

Problema 3.6.5. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + e^{t-y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (3.6.28)$$

a) *ha una soluzione (globale);*

b) *se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "esponenziale"*

$$y(t) \leq Ce^t;$$

c) *(parte pi' u difficile) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "polinomiale"*

$$y(t) \leq C(1+t)^N.$$

Problema 3.6.6. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = e^{1/(1+t)-1/y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (3.6.29)$$

a) *ha una soluzione (globale);*

b) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "esponenziale"

$$|y(t)| \leq C(1+t).$$

Problema 3.6.7. Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ye^{1/(1+t)-1/y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad (3.6.30)$$

ha una soluzione (globale).

Problema 3.6.8. Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^3 + y^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.31)$$

ha una soluzione (globale) in $t \in (-\infty, 0]$.

Problema 3.6.9 (Difficoltà: *). Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2+t^4} - y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.32)$$

ha una soluzione (globale) in $t \in [0, +\infty)$.

Suggerimento. Applicare il principio di confronto (Lemma 2.3.1) e dimostrare che

$$y(t) > 0.$$

□

Problema 3.6.10 (Difficoltà: *). Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)^4} - e^{t^4}, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.33)$$

ha una soluzione (globale) in $t \in [0, +\infty)$.

Suggerimento. Applicare il principio di confronto (Lemma 2.3.1) usando il fatto che $y_{\pm}(t) = \pm t$ sono soluzioni di

$$y'_+(t) > e^{y_+(t)^4} - e^{t^4}.$$

$$y'_-(t) < e^{y_-(t)^4} - e^{t^4}.$$

□

Problema 3.6.11 (Difficoltà: *). *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - (t + y(t))^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.34)$$

ha una soluzione (globale) in $t \in [0, +\infty)$.

Esplosione della soluzione

Problema 3.6.12. *(La buccia di banana) Studiare il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Risp. Il problema di Cauchy ha un'unica soluzione massimale (e non globale) data da

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

□

Problema 3.6.13. *Sia $a > 0$. Studiare il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y'(t) = (1+t)^a y^2 \\ y(0) = A > 0 \end{cases}.$$

Risp. Integrando l'equazione a variabili separate, troviamo

$$-\frac{1}{y(t)^2} + \frac{1}{y(0)} = \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}$$

e quindi

$$\frac{1}{y(t)^2} = 1 - \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}.$$

Ovviamente la funzione

$$\varphi(t) = 1 - \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}$$

é decrescente e ha unico zero t^* tale che

$$\varphi(t^*) = 0 \implies \lim_{t \nearrow t^*} y(t) = \infty.$$

La soluzione

$$y(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$$

esiste in $[0, t^*)$ e

$$\lim_{t \nearrow t^*} y(t) = \infty.$$

significa che $[0, t^*)$ é l'intervallo massimale di esistenza, la soluzione "esplode" in t^* . \square

Problema 3.6.14. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$y' = ty^4 + \frac{1}{2 + \cos y^4} - \frac{t \sin(y^4)}{2}, \quad y(0) = 1$$

ha soluzione globale in $[0, +\infty)$.

Soluzione. Abbiamo la disequazione

$$\sin y^4 < y^4$$

e quindi

$$\frac{1}{2 + \cos y^4} + ty^4 - \frac{t \sin(y^4)}{2} \geq \frac{1}{2 + \cos y^4} + ty^4 - \frac{ty^4}{2} = \frac{1}{2 + \cos y^4} + \frac{ty^4}{2} > \frac{ty^4}{2}$$

e quindi possiamo applicare il principio di confronto con

$$z' = \frac{tz^4}{2}, \quad z(0) = 1$$

Il principio di confronto ci da

$$y(t) > z(t).$$

Possiamo risolvere l'equazione per z e vedere che z esplose.

$$-\frac{1}{3z^3(t)} + \frac{1}{3} = \frac{t^2}{4}$$

e quindi

$$\frac{1}{3} - \frac{t^2}{4} = \frac{1}{3z^3(t)}$$

la soluzione esiste solo per

$$0 \leq t < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

□

Problema 3.6.15. *Studiare l'esistenza della soluzione*

$$u(t) \in C^2([0, \infty))$$

della equazione

$$u''(t) - u^5(t) = (1+t)^{-3} u'(t)^3 \quad (3.6.35)$$

con dati iniziali

$$u(0) = 0, u'(0) = a \quad (3.6.36)$$

al variare del parametro $a > 0$.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che esiste una soluzione

$$u(t) \in C^2([0, \infty))$$

della equazione (3.6.35) con dati iniziali (3.6.36). Abbiamo l'identità

$$E'(t) = (1+t)^{-3} u'(t)^4,$$

dove

$$E(t) = \frac{|u'(t)|^2}{2} - \frac{|u(t)|^6}{6}.$$

Usando i dati iniziali

$$E(0) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

si trova

$$E(t) \geq E(0) > 0.$$

Le disequazioni

$$|u'(t)|^2 - \frac{|u(t)|^6}{3} > 0$$

e

$$u'(0) > \frac{u(0)^3}{\sqrt{3}} = 0$$

implicano

$$u'(t) > \frac{u(t)^3}{\sqrt{3}}, \forall t > 0, \quad (3.6.37)$$

e quindi

$$u(t) > 0, \forall t > 0.$$

La disequazione (3.6.38) ed il principio del confronto implicano

$$u(t) \geq v(t),$$

dove $v(t)$ é la soluzione di

$$v'(t) = \frac{v(t)^3}{\sqrt{3}}, \forall t \geq \delta, \quad (3.6.38)$$

con dati iniziali

$$v(\delta) = u(\delta) > 0.$$

Usando la relazione

$$\left(\frac{1}{v^2(t)} \right)' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ed integrando in (δ, t) troviamo

$$\frac{1}{v^2(t)} - \frac{1}{v^2(\delta)} < -\frac{t-\delta}{\sqrt{3}}$$

e prendendo il limite, $t \rightarrow \infty$, otteniamo contraddizione. \square

Problema 3.6.16. Sia $a < 0$. Studiare l'esistenza della soluzione globale del problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (1+t)^a y^2 \\ y(0) &= A > 0 \end{aligned}$$

al variare del parametro $a < 0$.

Problema 3.6.17. Sia $a < 0, b > 1$. Studiare l'esistenza della soluzione globale del problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (1+t)^a y^b \\ y(0) &= A > 0 \end{aligned}$$

al variare dei parametri $a < 0, b, A$.

Problema 3.6.18. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = (t+y)^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.39)$$

ha una soluzione (globale) in $t \in [0, \infty)$.

Suggerimento. Dopo la sostituzione $t + y = u$ abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u'(t) &= u^3 + 1 \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.40)$$

Si può dimostrare che la traiettoria

$$(t, u(t)); t \in [0, T)$$

non può intersecare la retta $u = 1$ perché $u_1(t) = 1$ è una soluzione del problema

$$u'(t) = u^3 - 1.$$

Quindi abbiamo la disequazione

$$u(t) < 1, t \in [0, T), \quad (3.6.41)$$

dove $T > 0$ è tale che

$$\forall t \in (0, T), u'(t) < 0.$$

Così otteniamo

$$\forall t \in (0, T), u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau) d\tau < 0.$$

Otteniamo la disequazione

$$u(t) = \int_0^t (-1 + u^3(\tau)) d\tau < -t.$$

La disequazione

$$u(t) < \int_0^t (u^3(\tau)) d\tau$$

mostra che

$$u(t) < u_2(t)$$

dove

$$u_2'(t) = u^3(t), u_2(0) = 0, u_2(t) < 0$$

é una soluzione che esplode cioè

$$\lim_{t \nearrow T} u_2(t) = -\infty.$$

□

Problema 3.6.19. *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t - y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (3.6.42)$$

ha una soluzione (globale) in $t \in [0, +\infty)$.

Problema 3.6.20. *Si consideri il Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|1 - y^2|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

i) (5 punti) Provare che esiste un'unica soluzione locale e calcolarla ii) (3 punti) Descrivere l'insieme di tutte le soluzioni $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema. Calcolare la soluzione superiore e quella inferiore.

Soluzione. i) Nell'intervallo $(-1, 1)$ la funzione $f(y) = \sqrt{|1 - y^2|} = \sqrt{1 - y^2}$ é di classe C^∞ . In particolare é localmente Lipschitziana. Dal Teorema di esistenza e unicitá locale segue l'esistenza di un'unica soluzione $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$, per qualche $\delta > 0$, del Problema di Cauchy Alternativamente, esistenza e unicitá locale sono conseguenza del metodo di separazione delle variabili. Integriamo l'identitá

$$1 = \frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}}$$

su un intervallo $(0, x)$ con $|x| < \delta, \delta > 0$ da determinare:

$$x = \int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{1 - y(t)^2}} dt =$$

$$[= \arcsin(y(t))]_{t=0}^{t=x} = \arcsin(y(x)) - \arcsin(y(0)) = \arcsin(y(x))$$

avendo usato il dato iniziale $y(0) = 0$. Invertendo la relazione ottenuta si ottiene $y(x) = \sin(x)$, $|x| < \delta$. L'intervallo massimale in cui i conti precedenti sono giustificati é $(-\pi/2, \pi/2)$, ovvero $\delta = \pi/2$ ii) Per $x = \pm\pi/2$ la soluzione locale trovata verifica $y(x)^2 = 1$ e la separazione delle variabili diventa problematica. Dobbiamo prolungare la soluzione locale ad una soluzione globale $y \in C^1(\mathbb{R})$. Discutiamo il caso $x \geq \pi/2$. Il caso $x \leq -\pi/2$ sar  analogo (si ottiene ad es. per simmetria dispari) Osserviamo preliminarmente che le funzioni costanti $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni dell'equazione differenziale. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale che verificano $y > 1$. Il caso $y < -1$ sar  analogo. Integriamo l'identit 

$$1 = \frac{y'}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

con integrali indefiniti. Si ottiene

$$x - \beta = \operatorname{arccosh}(y(x)), \quad \text{da cui} \quad y(x) = \cosh(x - \beta)$$

dove $\beta \in \mathbb{R}$   una costante. Ricordiamo che $\cosh(x - \beta) = 1$ se e solo se $x = \beta$. Inoltre la soluzione y deve essere crescente, e quindi abbiamo la restrizione $x \geq \beta$ (implicita anche nell'inversione della relazione precedente). Sulla base delle considerazioni precedenti, scegliamo due parametri $-\infty \leq \alpha \leq -\pi/2$ $\pi/2 \leq \beta \leq \infty$ e definiamo le funzioni $y_{\alpha\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} -\cosh(x - \alpha) & x \leq \alpha \\ -1 & \alpha < x \leq -\pi/2 \\ \sin(x) & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \pi/2 \leq x < \beta \\ \cosh(x - \beta) & x \geq \beta \end{cases}$$

Le funzioni $y_{\alpha\beta} \in C^1(\mathbb{R})$ sono tutte le soluzioni globali del problema di Cauchy. Con la scelta $\alpha = -\infty$ e $\beta = \pi/2$ si ottiene la soluzione superiore. Con la scelta $\alpha = -\pi/2$ $\beta = \infty$ si ottiene la soluzione inferiore.

□

Problema 3.6.21. Sia

$$f(x, y) = \arctan(x - y)e^{-x^2 - \sin^2 y}.$$

Calcolare estremo superiore ed estremo inferiore della funzione f nel piano, cio é

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f(x, y), \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f(x, y)$$

e trovare tutti punti di massimo o minimo locale di f nel dominio

$$U = \{(x, y); x \geq 2y > 0\}.$$

Breve soluzione . Abbiamo le disequazioni

$$0 < e^{-x^2 - \sin^2 y} \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan(x - y) < \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$-\frac{\pi}{2} < f(x, y) < \frac{\pi}{2}.$$

Scegliendo

$$x_n = 0, y_n = -n\pi$$

si vede che

$$f(x_n, y_n) = \arctan(n\pi) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Così si deduce che

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \frac{\pi}{2}.$$

In modo simile con

$$x_n = 0, y_n = n\pi$$

troviamo

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = -\frac{\pi}{2}.$$

Punti critici sono determinati dal sistema $\nabla f = 0$ abbiamo

$$\partial_x f = \left(-2x \arctan(x - y) + \frac{1}{1 + (x - y)^2} \right) e^{-x^2 - \sin^2 y}$$

e

$$\partial_y f = \left(-2 \sin y \cos y \arctan(x - y) - \frac{1}{1 + (x - y)^2} \right) e^{-x^2 - \sin^2 y}$$

e quindi i punti critici devono soddisfare il sistema

$$\begin{aligned} -2x \arctan(x-y) + \frac{1}{1+(x-y)^2} &= 0, \\ -2 \sin y \cos y \arctan(x-y) - \frac{1}{1+(x-y)^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.43)$$

Così troviamo

$$(x + \sin y \cos y) \arctan(x-y) = 0.$$

Abbiamo due possibilità

$$\arctan(x-y) = 0$$

in questo caso siamo fuori del dominio U . L'altra possibilità è

$$x = -\sin y \cos y$$

in questo caso le disequazioni

$$-\sin y \cos y \leq |-\sin y \cos y| \leq |\sin y| \leq |y|$$

mostrano che le soluzioni in questo caso sono di nuovo fuori di U . In conclusione non ci sono punti di massimo o minimo locale di f nel dominio

$$U = \{(x, y); x \geq 2y > 0\}.$$

□

3.7 Esercizi sul sistema di biomatematica.

Le equazioni di Lotka - Volterra si possono scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A - By)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (Cx - D)y \end{aligned} \quad (3.7.44)$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{ll} y, & \text{é la popolazione della specie predatore;} \\ x, & \text{é la popolazione della specie preda;} \\ t, & \text{é il tempo;} \\ A, B, C, D, & \text{sono i parametri positivi di interazione tra le specie.} \end{array} \right.$$

Problema 3.7.1. Sia $A = B = C = D = 1$ nel sistema di Lotka - Volterra. Se $I \subseteq \mathbb{R}$ é un intervallo aperto con $0 \in I$ e

$$(x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$$

é una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2 \end{aligned} \quad (3.7.45)$$

allora la traiettoria rimane sempre nel primo quadrante.

Suggerimento. Vedere che ogni traiettoria

$$(x(t), y(t))$$

che é soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= x_0, y(0) = y_0 \end{aligned} \quad (3.7.46)$$

con punto di partenza

$$(x_0, y_0) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x, 0 < y\}$$

rimane sempre in U . Infatti, se t_1 é tale che

$$(x(t_1), y(t_1))$$

é sulla frontiera, possiamo supporre per esempio

$$x(t_1) = 0, 0 < y(t_1) = y^*.$$

Adesso possiamo usare il fatto che

$$\tilde{x}(t) = 0, \tilde{y}(t) = Ce^{-t}$$

é una soluzione del

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(t_1) &= 0, y(t_1) = y^*.\end{aligned}\tag{3.7.47}$$

Le due soluzioni

$$(x(t), y(t)), (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy (3.7.47), ovviamente questo é assurdo perche il Teorema di Cauchy afferma che la soluzione é unica. La contraddizione dimostra che la curva $(x(t), y(t))$ rimane sempre nel I quadrante. \square

Problema 3.7.2. (*modello Rosenzweig - Macarthur*) Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= u_1(1-u_1) - \frac{u_1 u_2}{1+u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 \frac{u_1 u_2}{1+u_1}.\end{aligned}\tag{3.7.48}$$

con dati iniziali

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

rimane sempre nel I quadrante.

Problema 3.7.3. (*modello Rosenzweig - Macarthur*) Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= u_1(1-u_1) - \frac{u_1 u_2}{1+u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 + \frac{u_1 u_2}{1+u_1}.\end{aligned}\tag{3.7.49}$$

con dati iniziali

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

rimane sempre nel I quadrante ed esiste costant $C > 0$ tale che

$$u_1(t) + u_2(t) \leq C.$$

Suggerimento. Supponiamo che per ogni $C > 0$ la traiettoria interseca il segmento aperto

$$u_1 + u_2 = C, 0 < u_1 < C,$$

cioé esiste (il primo) t_1 tale che

$$u_1(t_1) + u_2(t_1) = C, u_1'(t_1) > 0, u_2'(t_1) > 0. \quad (3.7.50)$$

Prendendo la somma delle equazioni in (3.7.51), si orriene

$$u_1'(t_1) + u_2'(t_1) = u_1(t_1)(1 - u_1(t_1)) - u_2(t_1) = u_1(t_1)(1 - u_1(t_1)) - C + u_1(t_1).$$

Ponendo

$$G(u) = u(2 - u)$$

si vede che la funzione é limitata superiormente

$$G(u) \leq G(1) = 1.$$

Se $C > 1$ otteniamo

$$u_1'(t_1) + u_2'(t_1) < 1 - C < 0$$

e questo é in contraddizione con (3.7.50).

□

Problema 3.7.4. (*modello Rosenzweig - Macarthur*) Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1 - u_1) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 + \frac{u_1 u_2}{1 + u_1}. \end{aligned} \quad (3.7.51)$$

con dati iniziali

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

ha soluzione globale?

Problema 3.7.5. Sia $A = B = C = D = 1$ nel sistema di Lotka - Volterra. Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2 \end{aligned} \quad (3.7.52)$$

ha una soluzione

$$x(t), y(t) \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$$

globale ?

3.7.1 SIR model

We aim at analyzing in the sequel shortly a standard-SIR model. The total population equals to a reservoir of mainland China with $N = 1.4 \cdot 10^9$ inhabitants. The export of the disease to other countries is not taken into account. Due to the short time horizon of not more than 1 month, effects of birth and natural death are excluded from the model. The time scale is measured in days, the recovery rates is assumed to be $\sigma = 14^{-1}$ implying a recovery period of 14 days.

This model was for the first time proposed by O. Kermack and Anderson Gray McKendrick as a special case of what we now call Kermack – McKendrick theory, and followed work McKendrick had done with Ronald Ross.

Let I and R denote the currently infected and recovered individuals. The susceptible individuals are given by $S = N - I - R$. The standard SIR-model without demographic terms leads to the two coupled ODEs

$$\frac{d}{dt}I = \theta(N - I - R) \cdot I - \sigma I \quad (3.7.53)$$

$$\frac{d}{dt}R = \sigma I \quad (3.7.54)$$

where

$$\theta = \frac{\beta}{N}.$$

3.8 Teorema di esistenza di Peano

Sia D un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sia

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione continua e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad (t, y(t)) \in D \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (3.8.55)$$

dove $(t_0, y_0) \in D$. L'esistenza di una soluzione

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n, y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$$

di (3.8.55) é equivalente all'esistenza della soluzione

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n, y \in C(I; \mathbb{R}^n)$$

dell'equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I. \quad (3.8.56)$$

Theorem 3.8.1. (teorem di Peano) Sia D un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, sia

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione continua e si consideri l'equazione integrale (3.8.56) Allora esiste un intervallo I aperto tale che $x_0 \in I$ e l'equazione (3.8.56) possiede una soluzione locale

$$v: I \rightarrow \mathbb{R}^n, v \in C(I; \mathbb{R}^n).$$

La soluzione puo' non essere unica, in quanto lo stesso valore iniziale (t_0, y_0) puo' dare origine a diverse soluzioni v .

Idea della dimostrazione. Il problema di Cauchy si puo' riscrivere come equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (3.8.57)$$

Sia

$$I = (t_0 - T, t_0 + T)$$

con $T > 0$ piccolo. Si può costruire una successione di funzioni che soddisfa il problema di Cauchy (con "ritardo" e "anticipo")

$$v_n(t) = \begin{cases} y_0, & \text{se } |t - t_0| \leq \frac{T}{n}; \\ y_0 + K_+(v_n)(t), & \text{se } t_0 + T/n \leq t \leq t_0 + T. \\ y_0 + K_-(v_n)(t), & \text{se } t_0 - T \leq t \leq t_0 - T/n. \end{cases} \quad (3.8.58)$$

dove

$$K_+(v_n)(t) = \int_{t_0}^{t-T/n} f(s, v_n(s)) ds, \quad t_0 + T/n \leq t \leq t_0 + T,$$

$$K_-(v_n)(t) = - \int_{t+T/n}^{t_0} f(s, v_n(s)) ds, \quad t_0 - T \leq t \leq t_0 - T/n.$$

Per la successione si applica il Teorema di Arzella - Ascoli. \square

3.9 Facoltativo: varie dimostrazioni del teorema di Peano

Dimostrazione, variante uno, "congelare t, y ". La funzione f è continua in un intorno di (t_0, y_0) quindi esiste $a > 0$ tale che f è continua in

$$Q := I \times J := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq a\}. \quad (3.9.59)$$

Sia $M = \max_Q |f(t, y)|$ (il massimo esiste perché f è continua e Q è compatto). Sia

$$\alpha := \frac{a}{M}$$

Sappiamo che $y = y(t)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se soddisfa l'equazione integrale (3.8.56).

La continuità uniforme di F sul compatto Q significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

$$|t - \hat{t}| < \delta, \|y - \hat{y}\| < \delta$$

implica

$$\|f(t, y) - f(\hat{t}, \hat{y})\| < \epsilon$$

per ogni $(t, y), (\hat{t}, \hat{y}) \in Q$. Scegliamo

$$\epsilon = \epsilon_n = \frac{1}{n}, \delta = \delta_n.$$

Si possano trovare punti $t_j^{(n)}$ tali che

$$t_0^{(n)} = t_0, t_{k(n)} = t_0 + \alpha, 0 \leq j \leq k(n)$$

e

$$|t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| \leq \frac{\delta_n}{M}.$$

Scegliamo una successione (approssimazione della soluzione vera) y_n definita in $[t_0, t_0 + \alpha]$ con $y_n(t_0) = y_0$ e

$$y_n'(x) = f(t_0, y_0), t_0 \leq t \leq t_1^{(n)}.$$

Sia

$$y_1^{(n)} = y_n(t_1^{(n)}).$$

Si va avanti con la procedura iterativa scegliendo $y_n'(t) = f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})$ per $t_j^{(n)} \leq t \leq t_{j+1}^{(n)}$. Ovviamente ϕ_n è C^1 a tratti e continua. Sia

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} y_n'(t) - f(t, y_n(t)), & t_j^{(n)} < t < t_{j+1}^{(n)} \\ 0, & t = t_j^{(n)} \end{cases}$$

Abbiamo

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t y_n'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y_n(s)) + \Delta_n(s)] ds$$

Abbiamo inoltre $|\Delta_n(t)| < \frac{1}{n}$ e

$$y_n'(t) = f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)}), t \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$$

Allora

$$\|\Delta_n(t)\| = \|f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)}) - f(t, y_n(t))\|, t \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$$

e quindi

$$|t - x_j^{(n)}| \leq |x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}| \leq \delta_n$$

$$\begin{aligned} \|y_j^{(n)} - \phi_n(t)\| &\leq \|y_j^{(n)} - y_{j+1}^{(n)}\| \leq M |t_j^{(n)} - t_{j+1}^{(n)}| \\ &\leq \delta_n. \end{aligned}$$

Da qui deduciamo

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \epsilon_n = \frac{1}{n}.$$

Il teorema di Ascoli-Arzelà implica che esiste una sottosuccessione di $\{y_n\}$ uniformemente convergente a

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}(t), \quad t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

Così abbiamo

$$y_{n_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y_{n_k}(s)) + \Delta_{n_k}(s)] ds$$

e concludiamo con

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

□

Dimostrazione, variante due. : Usiamo la definizione di Q in (3.9.59), Di nuovo, sia

$$M := \max_Q \|f(t, y)\|, \quad \alpha := \frac{a}{M}.$$

La successione di approssimazione $\Psi_n, n = 1, 2, \dots$ si definisce come segue:

$$\Psi_n(t) := \begin{cases} y_0, & t \leq t_0 \\ y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n})) ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha \end{cases}$$

Abbiamo

$$s - \frac{\alpha}{n} \leq t_0 \implies \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n}) = y_0$$

quindi

$$\Psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n})) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds$$

é ben definita in $[t_0, t_0 + \frac{\alpha}{n}]$.

In modo simile sia

$$I_k = \left[t_0, t_0 + \frac{k\alpha}{n} \right], 1 \leq k \leq n$$

e supponiamo che $\Psi_n(t)$ é ben definita in I_k . Ponendo

$$y_n(t) = \Psi_n(t - \frac{\alpha}{n}),$$

otteniamo

$$s \in I_{k+1} \implies s - \frac{\alpha}{n} \in I_k \implies \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n}) = y_n(s)$$

e $y_n(t)$ é ben definita in I_{k+1} . In questo modo deduciamo

$$\Psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n})) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

é ben definita in I_{k+1} . Applicando il principio di induzione rispetto k vediamo che $\Psi_n(t)$ é ben definita in $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Applichiamo il teorema di Ascoli - Arzela per la successione $\{\Psi_n(t)\}$ definita nel intervallo $[t_0, t_0 + \alpha]$ e troviamo una sottosuccessione di $\{\Psi_n(t)\}$ uniformemente convergente. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\{\Psi_n(t)\}$ converge uniformemente e tenda a $\Psi(t)$. Abbiamo

$$\Psi_{n_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_{n_k}(s - \frac{\alpha}{n_k})) ds$$

e

$$\Psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(s)) ds.$$

□

Dimostrazione, variante tre, approccio topologico. Si cerca punto fisso dell'equazione

$$K(u)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

L'operatore $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, where

$$\mathcal{X} := C(I; \mathbb{R}^n), \quad I = [t_0, t_0 + \alpha]$$

dove

$$\alpha = \frac{a}{M}, \quad M = \max_Q \|f(x, y)\|.$$

Lo spazio \mathcal{X} ha la norma

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \max_{t \in I} \|u(t)\|$$

La convergenza della successione $u_n \rightarrow u$ in \mathcal{X} implica

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Sia $B \subset \mathcal{C}$ definito come segue

$$B := \{u \in \mathcal{X} : \|u(t) - y_0\| \leq a, \|u(t_1) - u(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|, \text{ for all } t, t_1, t_2 \in I\}.$$

L'insieme A é chiuso in \mathcal{X} , B é convesso (segue della disequazione triangolare)

$$u, v \in B \implies w = tu + (1-t)v \in B, \forall 0 \leq t \leq 1$$

Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà si deduce che B sia compatto. L'operatore soddisfa la proprietà

$$K : B \rightarrow B$$

(si veda come nel teorema di Cauchy).

L'esistenza del punto fisso segue adesso dal teorema seguente.

Theorem 3.9.1. (*Teorema di Schauder-Tychonoff*) Sia X un spazio di Banach, sia $K : X \rightarrow X$ una applicazione continua e sia $A \subset X$ un sottospazio convesso e compatto in X tale che

$$K(A) \subset A,$$

allora K ha un punto fisso in A .

□

Chapter 4

Equazioni e sistemi lineari

4.1 Equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

Si consideri l'equazione lineare omogenea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (4.1.1)$$

dove a_j sono costanti.

Per trovare le soluzioni si devono trovare le radici dell'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0$$

Se le radici λ_j sono tutte distinte allora le soluzioni sono della forma:

$$y = e^{\lambda_j \cdot x}$$

Se una radice, ad esempio λ_1 , è soluzione multipla di molteplicità s , allora affinché le sue soluzioni siano indipendenti devono avere la forma:

$$e^{\lambda_1 \cdot x} \quad x e^{\lambda_1 \cdot x} \quad x^2 e^{\lambda_1 \cdot x} \quad \dots \quad x^{s-1} e^{\lambda_1 \cdot x}$$

Se una radice è unica ed è la complessa coniugata di un'altra, ovvero

$$\lambda_{1,2} = c \pm id,$$

allora:

$$e^{cx} \cos(dx), e^{cx} \sin(dx)$$

Se la radice complessa coniugata

$$\lambda = c \pm id$$

é multipla con molteplicita' r si ha:

$$e^{cx} \cos(dx) \quad xe^{cx} \cos(dx) \quad x^2 e^{cx} \cos(dx) \quad \dots \quad x^{r-1} e^{cx} \cos(dx)$$

$$e^{cx} \sin(dx) \quad xe^{cx} \sin(dx) \quad x^2 e^{cx} \sin(dx) \quad \dots \quad x^{r-1} e^{cx} \sin(dx)$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene determinando il valore delle n costanti di integrazione che appaiono nella soluzione dell'omogenea.

Problema 4.1.1. *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 7y'' - 6y' + 2 = 0$$

Suggerimento. L'equazione caratteristica é

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0.$$

Abbiamo l'identita

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Le soluzioni sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^t \sin t, e^t \cos t.$$

□

4.2 Sistemi di ordine uno e teorema di Liouville

Nel caso di un sistema lineare non autonomo

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{4.2.2}$$

in cui la matrice $A(t)$ dei coefficienti dipende dal tempo,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

abbiamo il seguente.

Lemma 4.2.1. *Sia $a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R})$. Per ogni vettore $u_0 \in \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

ha una unica soluzione

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n).$$

Idea della dimostrazione. Rescriviamo il problema di Cauchy nella forma integrale

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(s)u(s)ds. \tag{4.2.4}$$

L'esistenza della soluzione locale

$$u(t) \in C(-T, T; \mathbb{R}^n)$$

segue dal Teorema di Cauchy. Per prolungare la soluzione usiamo lemma di Gronwal per la funzione

$$E(t) = \|u(t)\|^2.$$

Abbiamo la disequazione

$$E'(t) = 2\langle u(t), u'(t) \rangle = 2\langle u(t), A(t)u(t) \rangle \leq 2\|A(t)\|\|u(t)\|^2 = 2A(t)E(t).$$

Lemma di Gronwall implica

$$E(t) \leq E(0)e^{a(t)}, \quad a(t) = \int_0^t 2\|A(s)\|ds.$$

Il principio di prolungamento completa la dimostrazione. \square

Se e_1, \dots, e_n é una base canonica in \mathbb{R}^n , il Lemma 4.2.1 garantisce l'esistenza delle soluzioni

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

tali che

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= A(t)f_j(t) \\ f_j(0) &= e_j \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Per vedere che

$$f_1(t), \dots, f_n(t)$$

sono linearmente indipendenti, ci servono due lemmi del campo di algebra lineare.

Lemma 4.2.2. *Se A é una matrice $n \times n$ allora abbiamo l'identita*

$$\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon)$$

per $\varepsilon \searrow 0$.

Lemma 4.2.3. *Se A é una matrice $n \times n$ allora abbiamo l'identita*

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A},$$

dove

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

é la traccia di A .

Idea della dimostrazione. Nella identita

$$e^A = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (I + \varepsilon A)^{1/\varepsilon}$$

scegliamo

$$\varepsilon = \frac{1}{k}$$

e usando Lemma 4.2.2 troviamo

$$\det\left(I + \frac{A}{k}\right)^k = \left(\det\left(I + \frac{A}{k}\right)\right)^k = \left(1 + \frac{\operatorname{tr} A}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

quindi

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\text{tr} A}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right)^k = e^{\text{tr} A}.$$

□

Il Wronskiano é il determinate della matrice

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\},$$

cioé

$$W(t) = \det \Phi(t),$$

dove f_1, \dots, f_n sono considerati come vettori colonna.

Vale il seguente Lemma di Liouville

Lemma 4.2.4. Sia $a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R})$ e

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

allora abbiamo

$$W'(t) = \text{tr} A(t) W(t).$$

Idea della dimostrazione. Sviluppando in serie per $t \sim t_0$ la soluzione di $f_j'(t) = A(t)f_j(t)$ si ottiene

$$f_j(t) = f_j(t_0) + f_j'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|) = f_j(t_0) + A(t_0)(t - t_0)f_j(t_0) + o(|t - t_0|),$$

ottenendo cosí anche lo sviluppo della matrice di $W(t)$

$$\Phi(t) = (I + A(t_0)(t - t_0)) \Phi(t_0) + o(|t - t_0|)$$

Calcolando il Wronskiano e usando Lemma 4.2.2 si ottiene

$$W(t) = (1 + \text{tr} A(t_0)(t - t_0)) W(t_0) + o(|t - t_0|)$$

Dunque per un generico t_0

$$W'(t_0) = \text{tr} A(t_0) W(t_0).$$

□

Così abbiamo il seguente

Lemma 4.2.5. *Sia*

$$\Phi(0) = \{e_1, \dots, e_n\}.$$

Allora

$$W(t) = \det \Phi(t)$$

soddisfa

$$W(t) = W(0)e^{a(t)}, \quad a(t) = \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds$$

e dunque

$$W(t) \neq 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Possiamo concludere che

$$f_1(t), \dots, f_n(t)$$

sono linearmente indipendenti per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.2.6. *Ogni soluzione del problema*

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{4.2.6}$$

si può presentare nella forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(t),$$

dove

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= A(t)f_j(t) \\ f_j(0) &= e_j \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

e e_1, \dots, e_n è una base canonica in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Per ogni soluzione

$$u'(t) = A(t)u(t) \quad (4.2.8)$$

possiamo trovare c_1, \dots, c_n tali che

$$u(0) = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n. \quad (4.2.9)$$

Allora

$$U(t) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(t)$$

é una soluzione di (4.4.14) tale che

$$U(0) = u(0).$$

Il teorema di unicitá della soluzione implica

$$U(t) = u(t).$$

□

4.3 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine n

Lemma 4.3.1. *Ogni soluzione del problema*

$$u'(t) = A(t)u(t) + F(t) \quad (4.3.10)$$

si puo presentare nella forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) f_j(t),$$

dove

$$\mathbf{c}'(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t))$$

é soluzione del sistema lineare

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = F(t), \quad (4.3.11)$$

$\Phi(t)$ é la matrice Wronskiana

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\},$$

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= A(t)f_j(t) \\ f_j(0) &= e_j \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

e e_1, \dots, e_n é una base canonica in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sum_{j=1}^n c_j'(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^n c_j(t)f_j'(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j'(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^n A(t)c_j(t)f_j(t) = \sum_{j=1}^n c_j'(t)f_j(t) + A(t)u(t) \end{aligned}$$

e quindi (4.3.10) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^n c_j'(t)f_j(t) = F(t).$$

□

4.4 Wronskiano per equazioni di ordine n

Nel caso di equazioni di ordine n :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0$$

si pone

$$u(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

e

$$u'(t) = A(t)u(t),$$

dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Il wronskiano é definito come segue.

Definizione 4.4.1. Dato un insieme di n funzioni y_1, \dots, y_n , il Wronskiano $W(y_1, \dots, y_n)(t)$ é definito come:

$$W(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

ovvero come il determinante della matrice costruita mettendo le funzioni nella prima riga, la derivata prima di ogni funzione nella seconda riga, e cosi' fino alla derivata $n - 1$, formando cosi' una matrice quadrata chiamata anche matrice fondamentale.

Sia e_1, \dots, e_n una base canonica in \mathbb{R}^n . Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y_j^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y_j^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y_j(t) &= 0 & (4.4.13) \\ (y_j(0), y_j'(0), \dots, y_j^{(n-1)}(0)) &= e_j, \end{aligned}$$

Lemma 4.4.1. Ogni soluzione del problema

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0 \quad (4.4.14)$$

si puo' presentare nella forma

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(t),$$

dove

$$y_1(t), \dots, y_n(t) \in C^n(\mathbb{R})$$

sono soluzioni del problema di Cauchy (4.4.13).

In una equazione differenziale lineare del secondo ordine, il wronskiano puo' essere calcolato facilmente con l'identita' di Abel.

4.5 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine n

Nel caso di equazioni di ordine n :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = f(t)$$

si considerano le n soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea e si cerca una soluzione particolare dell'equazione nella forma:

$$\tilde{y} = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$$

Si risolve quindi il sistema lineare nelle n incognite $c'_i(t)$:

$$\begin{cases} c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) + \dots + c'_n(t)y_n(t) = 0 \\ c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) + \dots + c'_n(t)y'_n(t) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c'_1(t)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ c'_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-1)}(t) = f(t). \end{cases} \quad (4.5.15)$$

Il determinante di questo sistema viene detto determinante wronskiano e, si puo' dimostrare che e' sempre non nullo a partire dall'indipendenza delle soluzioni dell'equazione omogenea. Si determinano le funzioni incognite integrando gli n termini soluzioni del sistema di cui sopra, per ricavare l'integrale generale dell'equazione.

Nello specifico, data un'equazione ordinaria lineare non omogenea:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)}(t) = b(t)$$

sia $y_1(t) \dots, y_n(t)$ un sistema fondamentale di soluzioni della corrispondente equazione omogenea:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)}(t) = 0$$

Allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e' data da:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)y_i(t)$$

dove $c_i(t)$ sono funzioni differenziabili che si assume soddisfino le condizioni:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) y_i^{(j)}(t) = 0 \quad j = 0, \dots, n-2$$

Considerando la soluzione particolare dell'equazione omogenea, differenziando ripetutamente e utilizzando le condizioni precedenti:

$$y_p^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i^{(j)}(t) \quad j = 0, \dots, n-1$$

Con un'ultima differenziazione si ha:

$$y_p^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n c'_i(t) y_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i^{(n)}(t)$$

Sostituendo quindi la soluzione particolare nell'equazione di partenza e applicando le ultime due relazioni si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t) y_i^{(n-1)}(t) = b(t)$$

Questa equazione e la precedente sono sistemi lineari che possono essere risolti con la regola di Cramer:

$$c'_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} \quad i = 1, \dots, n$$

dove $W(t)$ e' il wronskiano del sistema fondamentale di soluzioni e $W_i(t)$ e' il wronskiano del sistema fondamentale con l'i-esima colonna rimpiazzata da $(0, 0, \dots, b(t))$.

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea puo' essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^n y_i(t) \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dx.$$

4.5.1 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni a coefficienti costanti di ordine n

Si consideri l'equazione lineare non - omogenea

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t) \quad (4.5.16)$$

dove a_j sono costanti reali.

Nella sezione 4.1 abbiamo studiato le soluzioni del problema omogeneo (4.1.1), partendo dalle soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (4.5.17)$$

Possiamo trovare soluzioni del problema omogeneo usando l'approccio basato sulla soluzione del sistema (4.5.15).

In alcuni casi si può trovare un metodo più veloce per costruire una soluzione.

Il caso $f(t) = P_m(t)$.

Sia:

$$f(t) = P_m(t),$$

dove $P_m(t)$ è un polinomio di grado m . In questo caso si cerca una soluzione particolare del tipo

$$u(t) = Q_m(t),$$

dove $Q_m(t)$ è un polinomio formale di grado m . Se $\lambda = 0$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità r , allora si deve cercare una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r P_m(t).$$

Il caso $f(t) = A \cdot e^{\alpha t}$.

Sia:

$$f(t) = A \cdot e^{\alpha t}$$

dove A è una costante data. Se α non è una radice dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = B \cdot e^{\alpha t},$$

dove B è una costante da determinare. Nel caso α sia radice dell'equazione caratteristica di molteplicità r si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r \cdot B \cdot e^{\alpha t}.$$

Il caso $f(t) = P_m(t) \cdot e^{\alpha t}$.

Sia:

$$f(t) = P_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

dove $P_m(t)$ é un polinomio di grado m . Se α non é una radice dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = Q_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

dove Q_m é un polinomio di grado m . Nel caso α sia radice di molteplicitá r si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r \cdot Q_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

Il caso $f(t) = P_m(t) \cos(\beta t) e^{\alpha t} + Q_m(t) \sin(\beta t) e^{\alpha t}$

Se f possiede una delle seguenti espressioni:

$$f(x) = P_m(t) \cos(\beta t) e^{\alpha t} + Q_m(t) \sin(\beta t) e^{\alpha t},$$

dove $P_m(t)$ e $Q_m(t)$ sono polinomi di grado m , allora se $\alpha + i\beta$ non é una radice dell'equazione caratteristica si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = R_m(t) \cos(\beta t) e^{\alpha t} + S_m(t) \sin(\beta t) e^{\alpha t}$$

dove $R_m(t)$ e $S_m(t)$ sono polinomi di grado m da determinare. Nel caso $\alpha + i\beta$ sia radice di molteplicitá r si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r R_m(t) \cos(\beta t) e^{\alpha t} + t^r S_m(t) \sin(\beta t) e^{\alpha t}$$

4.6 Esercizi sulle equazioni lineari di ordine n : livello standard.

Problema 4.6.1. Risolvere l'equazione

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = e^{3t}. \quad (4.6.18)$$

Idea della soluzione. Prima consideriamo l'equazione omogenea

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = 0. \quad (4.6.19)$$

L'equazione caratteristica é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0. \quad (4.6.20)$$

Abbiamo

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Tutte le soluzioni del problema omogeneo (4.6.19) sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^{2t}$$

Siccome 3 non é soluzione del (4.6.20) una soluzione del (4.6.22) deve avere la forma

$$y_0(t) = Ae^{3t}.$$

Sostituzione in (4.6.22) da

$$A = \frac{1}{4}$$

e tutte le soluzioni di (4.6.22) sono

$$y(t) = y_0(t) + C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t} = \frac{e^{3t}}{4} + C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t}.$$

□

Problema 4.6.2. Risolvere l'equazione

$$y'''(t) - 2y''(t) + 4y'(t) - 8y(t) = e^{2t} \sin(2t). \quad (4.6.21)$$

Problema 4.6.3. Vedere se per ogni soluzione dell'equazione

$$y''(t) + 9y(t) = e^{-t} \log(2 + t^4) \quad (4.6.22)$$

esistono due costanti C_1, C_2 tali che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t) = 0.$$

4.7 Esercizi sulle equazioni lineari di ordine n : livello elevato.

Trasformata di Liouville

Problema 4.7.1. *Sia*

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_2(t) y(t) = 0. \quad (4.7.23)$$

Usando la sostituzione

$$t = t(x), u(x) = A(x)y(t(x)),$$

scegliere

$$t(x), A(x)$$

in modo tale che (4.7.23) si trasforma in

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + W(x)u(x) = 0. \quad (4.7.24)$$

Suggerimento. *Sia*

$$v(x) = y(t(x)).$$

Abbiamo le relazioni

$$v'(x) = \frac{d}{dx}(y(t(x))) = t'(x) \frac{dy}{dt}(t(x)),$$

$$v''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(y(t(x))) = t''(x) \frac{dy}{dt}(t(x)) + (t'(x))^2 \frac{d^2 y}{dt^2}(t(x))$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(A(x)v(x)) = A'(x)u(x) + A(x)t'(x) \frac{dy}{dt}(t(x)),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(u(x)) &= \frac{d^2}{dx^2}(A(x)v(x)) = A''(x)v(x) + 2A'(x)v'(x) + A(x)v''(x) = \\ &= A''(x)y(t(x)) + 2A'(x)t'(x) \frac{dy}{dt}(t(x)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A(x) \left(t''(x) \frac{dy}{dt}(t(x)) + (t'(x))^2 \frac{d^2y}{dt^2}(t(x)) \right) = \\
& A''(x)y(t(x)) + (2A'(x)t'(x) + A(x)t''(x)) \frac{dy}{dt}(t(x)) + \\
& + A(x) (t'(x))^2 \frac{d^2y}{dt^2}(t(x)).
\end{aligned}$$

Confrontando con (4.7.23), si vede che

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t(x)) + a_1(t(x)) \frac{dy}{dt}(t(x)) + a_2(t(x))y(t(x)) = 0. \quad (4.7.25)$$

si trasforma in

$$u''(x) - W(x)u(x) = 0$$

se e' solo se

$$2A'(x)t'(x) + A(x)t''(x) = A t'(x) a_1(t(x)).$$

Moltiplicando per A troviamo

$$\frac{d}{dx} (A(x)^2 t'(x)) = A^2(x) t'(x) a_1(t(x))$$

Ponendo

$$z(x) = A(x)^2 t'(x)$$

si puo scrivere

$$z'(x) = a_1(x) z_1(x).$$

Scegliamo

$$z(x) = e^{\int_0^x a_1(t(s)) ds}.$$

Se per esempio

$$t(x) = x$$

e

$$A(x) = e^{\int_0^x a_1(s) ds/2}$$

abbiamo (4.7.24). □

Problema 4.7.2. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_2(t)y(t) + \lambda b(t)y(t) = 0, \quad (4.7.26)$$

dove $b(t) > 0$. Usando la sostituzione

$$t = t(x), u(x) = A(x)y(t(x)),$$

scegliere

$$t(x), A(x)$$

in modo tale che (4.7.26) si trasforma in

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + W(x)u(x) + \lambda u(x) = 0. \quad (4.7.27)$$

Suggerimento. Scegliere

$$t'(x(t)) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{\sqrt{b(t)}},$$

cioé

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{b(s)} ds.$$

Seguire la soluzione del Problema 4.7.1. □

Problema 4.7.3. Sia A una matrice $(n \times n)$ e $f \in \mathbb{R}^n$. Si considerano $y(t), z(t)$ due soluzioni dei due sistemi

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t) \\ y(0) &= f \end{aligned} \quad (4.7.28)$$

$$\begin{aligned} z'(t) &= A^* z(t) \\ z(0) &= f \end{aligned} \quad (4.7.29)$$

Provare che la condizione

$$\|y(t)\| + \|z(t)\| \leq C(1+t)^{-2}, \quad \forall t \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}^n,$$

implica

- esiste una matrice S definita positiva tale che

$$\int_0^{\infty} \langle y(t), z(t) \rangle dt = \langle f, Sf \rangle;$$

- vale l'identità

$$AS + SA^* = -I.$$

Soluzione. Abbiamo le relazioni

$$y(t) = e^{At} f, \quad z(t) = e^{A^*t} f.$$

L'ipotesi

$$\|y(t)\| + \|z(t)\| \leq C(1+t)^{-2}, \quad \forall t \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}^n,$$

implica

$$\lambda \in sp(A) \implies \operatorname{Re} \lambda < 0$$

e quindi esiste $\delta > 0$, tale che

$$\|e^{At}\| + \|e^{A^*t}\| \leq ce^{-\delta t} \quad \forall t \geq 0.$$

La matrice S é definita con

$$S = \int_0^{\infty} e^{At} e^{A^*t} dt.$$

Abbiamo le relazioni

$$AS + SA^* = \int_0^{\infty} Ae^{At} e^{A^*t} + e^{At} e^{A^*t} A^* dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{At} e^{A^*t}) dt = -I.$$

□

Problema di Sturm

Problema 4.7.4. Considerare il problema

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0, \pi) \tag{4.7.30}$$

dove $\lambda > 0$. Vedere che ogni soluzione

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi])$$

tale

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4.7.31}$$

é identicamente zero.

Problema 4.7.5. Considerare il problema

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0, \pi) \quad (4.7.32)$$

Vedere per quali valori del parametro $\lambda > 0$ esiste soluzione

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi])$$

del problema (4.7.32), tale che

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (4.7.33)$$

Problema 4.7.6. Verificare che il problema di Sturm

$$y''(x) + y(x) = 0, x \in (0, \pi) \quad (4.7.34)$$

con dati al bordo

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (4.7.35)$$

ha unica soluzione

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi])$$

definita con

$$y(x) = \sin x.$$

Equazione di Bessel

Problema 4.7.7. Costruire una soluzione dell'equazione di Bessel

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - N^2) y(x) = 0,$$

dove $N \geq 1$ è numero naturale usando la sostituzione

$$y(x) = x^N f(x),$$

dove

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Risposta.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!(k+N)!}.$$

□

Problema 4.7.8. *Costruire una soluzione dell'equazione di Bessel*

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0,$$

dove $\nu \geq 0$ é numero reale usando la sostituzione

$$y(x) = x^\nu f(x),$$

dove

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Risposta.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)},$$

dove la funzione $\Gamma(z)$ é la funzione Gamma definita come segue

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Se $\operatorname{Re} z > 0$ l'integrale converge assolutamente. Ricordiamo che usando l'integrazione per parti, si può dimostrare che:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

□

La funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}, \quad (4.7.36)$$

é nota come funzione di Bessel.

Problema 4.7.9. Costruire due soluzioni dell'equazione di Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

dove $\nu > 0$ è numero reale. usando la sostituzione

Risposta.

$$J_\nu(x), J_{-\nu}(x).$$

□

Problema 4.7.10. Sia

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

l'operatore di Laplace in \mathbb{R}^2 . Usando i coordinati polari

$$x + iy = re^{i\varphi}$$

costruire soluzione del problema

$$\Delta u(x, y) = -u(x, y)$$

usando la sostituzione

$$u(x, y) = f(r)e^{ik\varphi},$$

dove $k \geq 0$ è un numero intero.

Suggerimento. L'operatore di Laplace in coordinati polari si può rappresentare nella forma

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2.$$

Usando l'ansatz

$$u(x, y) = f(r)e^{ik\varphi},$$

troviamo

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{k^2}{r^2}f(r) = -f(r). \quad (4.7.37)$$

Soluzione è

$$f(r) = J_k(r),$$

dove J_ν è la funzione di Bessel del problema 4.7.8.

□

Problema 4.7.11. *Trovare una soluzione del problema*

$$y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + by(x) = 0$$

usando rescalamento

$$y(x) = \lambda^A v(\lambda x),$$

dove $\lambda > 0$ e $A \in \mathbb{R}$ devono essere scelti in modo opportuno.

Suggerimento. Prima si fa la sostituzione

$$y(x) = x^\alpha z(x), \alpha = \frac{1-a}{2}.$$

La funzione $z(x)$ soddisfa

$$z''(x) + \frac{1}{x}z'(x) + bz(x) - \frac{\nu^2}{x^2}z(x) = 0, \nu = \alpha.$$

Usare rescalamento

$$z(x) = \lambda^A v(\lambda x),$$

dove $\lambda > 0$ e $A \in \mathbb{R}$ devono essere scelti in modo opportuno. □

Soluzioni rappresentati con serie di potenze

Problema 4.7.12. *Sia*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

serie di potenze con raggio di convergenza 1. Verificare che il problema di Cauchy

$$y'' - W(x)y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (4.7.38)$$

ha soluzione

$$y(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k$$

con raggio di convergenza 1.

Chapter 5

Stabilità intorno di punto di equilibrio

5.1 Punti di equilibrio

Definizione 5.1.1. *Il punto di equilibrio per sistema autonomo*

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t))$$

é un punto u^* tale che $f(u^*) = 0$. Questa condizione implica infatti che $\frac{d}{dt}u(t) = 0$ e quindi, integrando, otteniamo

$$u(t) = \text{costante}$$

indipendentemente dal tempo t .

Un punto d'equilibrio può essere semplicemente stabile o asintoticamente stabile.

5.2 Classificazione dei punti di equilibrio nel piano

Consideriamo il sistema di equazioni ordinarie nel piano

$$u'(t) = f(u)$$

nel caso $f(u) = Au$, dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Scriveremo le equazioni per $x(t)$, $y(t)$ nella forma

$$x'(t) = ax(t) + by(t), \quad y'(t) = cx(t) + dy(t). \quad (5.2.1)$$

L'equazione per trovare autovalori di A si scrive nella forma

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}A\lambda + \det A = 0 \quad (5.2.2)$$

dove $\operatorname{tr}A$ é la somma degli elementi diagonali della matrice, e $\det A = ad - bc$ é il determinante. Trattandosi di un'equazione di secondo grado sappiamo che occorre tener conto del segno del discriminante

$$D = (\operatorname{tr}A)^2 - 4 \det A. \quad (5.2.3)$$

Dovremo dunque discutere separatamente i tre casi:

$$D > 0, \text{ due radici reali e distinte;} \quad (5.2.4)$$

$$D < 0, \text{ due radici reali e distinte;} \quad (5.2.5)$$

$$D = 0, \text{ il caso degenere di due radici reali e coincidenti.} \quad (5.2.6)$$

5.3 Il caso di nodo; due radici reali con lo stesso segno

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda_1 x(t), \quad y'(t) = \lambda_2 y(t). \quad (5.3.7)$$

con

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Se e_1, e_2 é la base canonica, tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2,$$

cioé

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t},$$

$$y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}.$$

Si puo vedere nella figura 5.1 il comportamento delle soluzioni.

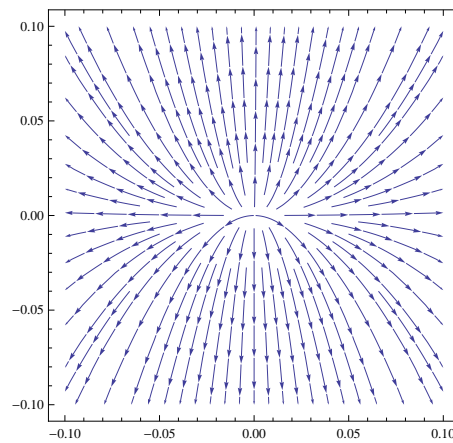


Figure 5.1: Il caso di nodo instabile

Esempio 5.3.1. Consideriamo il sistema

$$x'(t) = 2x(t) + 1y(t), \quad y'(t) = 2x(t) + 3y(t). \quad (5.3.8)$$

Autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sono

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,$$

Autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} f_1 + C_2 e^t f_2,$$

cioé

$$x(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^t,$$

$$y(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^t,$$

Si può vedere nella figura 5.2 il comportamento del nodo (instabile).

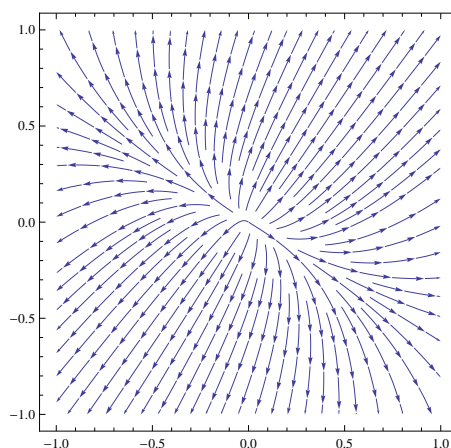


Figure 5.2: Il caso di nodo instabile

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda_1 x(t), \quad y'(t) = \lambda_2 y(t). \quad (5.3.9)$$

con

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0.$$

Se e_1, e_2 é la base canonica, tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2,$$

cioé

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t},$$

$$y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}.$$

Si puo vedere nella figura 5.3 il comportamento delle soluzioni.

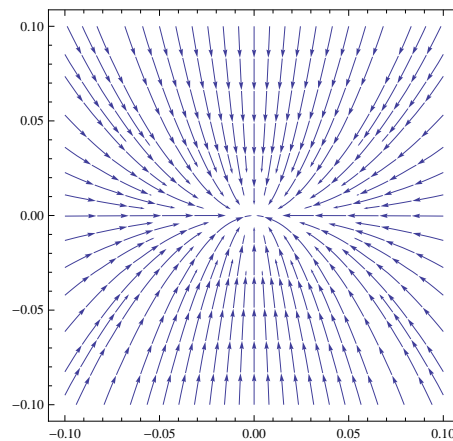


Figure 5.3: Il caso di nodo stabile

Esempio 5.3.2. Consideriamo il sistema

$$x'(t) = -2x(t) + 1y(t), \quad y'(t) = 2x(t) - 3y(t). \quad (5.3.10)$$

Autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sono

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1,$$

Autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} f_1 + C_2 e^{-t} f_2,$$

cioé

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \\ y(t) &= 2C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \end{aligned}$$

Si può vedere nella Figura 5.4 il comportamento delle soluzioni.

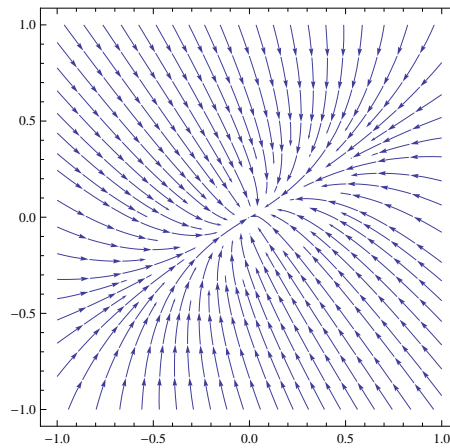


Figure 5.4: Il caso di nodo stabile

5.4 Il caso di sella; due radici reali con segno opposto

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda_1 x(t), \quad y'(t) = \lambda_2 y(t). \quad (5.4.11)$$

con

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0.$$

Se e_1, e_2 é la base canonica, tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2,$$

cioé

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t},$$

$$y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}.$$

Si puo vedere nella figura 5.5 il comportamento delle soluzioni.

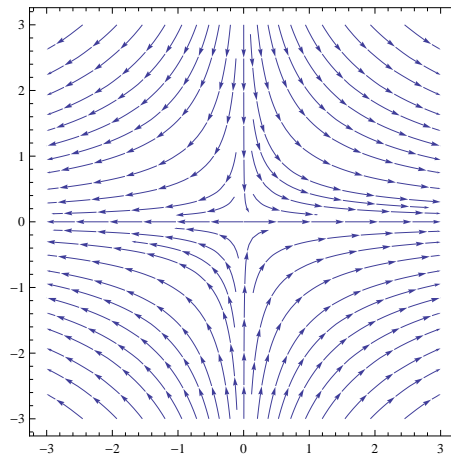


Figure 5.5: Il caso di sella

Esempio 5.4.1. Consideriamo il sistema

$$x'(t) = -x(t) + y(t), \quad y'(t) = 5x(t) + 3y(t). \quad (5.4.12)$$

Autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

sono

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2,$$

Autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} f_1 + C_2 e^{-2t} f_2,$$

cioé

$$x(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t},$$

$$y(t) = 5C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t},$$

Si può vedere nella Figura 5.6 il comportamento delle soluzioni vicino alla sella.

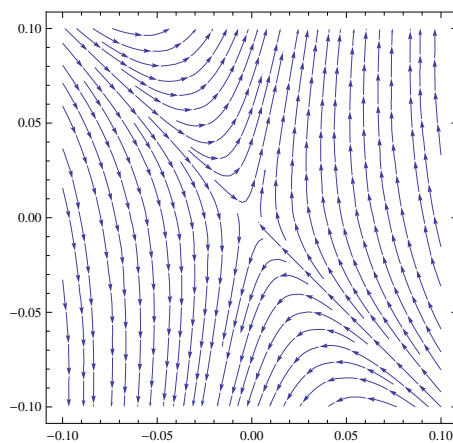


Figure 5.6: Il caso di sella

5.5 Il caso di fuoco; due radici complessi coniugati

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \mu x(t) + \omega y(t), \quad y'(t) = -\omega x(t) + \lambda y(t). \quad (5.5.13)$$

con

$$\omega > 0.$$

Ponendo

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

si vede che (5.5.13) si può riscrivere come

$$z'(t) = \lambda z(t), \quad \lambda = \mu - i\omega. \quad (5.5.14)$$

Tutte le soluzioni si possono presentare con

$$z(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C = C_1 + iC_2,$$

così deduciamo

$$x(t) = \operatorname{Re}z(t) = C_1 e^{\mu t} \cos(\omega t) - C_2 e^{\mu t} \sin(\omega t),$$

$$y(t) = \operatorname{Im}z(t) = C_1 e^{\mu t} \sin(\omega t) + C_2 e^{\mu t} \cos(\omega t).$$

Moltiplicando la prima equazione in (5.5.13) con $x(t)$ e la seconda con $y(t)$ si ottiene

$$E'(t) = 2\mu E(t), \quad E(t) = x^2(t) + y^2(t) = |z(t)|^2.$$

In questo modo abbiamo dimostrato il seguente.

Lemma 5.5.1. *Abbiamo la relazione*

$$E(t) = E(0)e^{2\mu t}.$$

Se $\mu = 0$, un primo integrale è $E(t)$.

Se $\mu > 0$ la traiettoria si allontana dall'origine, il nodo è instabile.

Si può vedere nella figura 5.7 il comportamento del fuoco instabile.

Se $\mu < 0$ la traiettoria si avvicina all'origine, il nodo è stabile.

Si può vedere nella figura 5.8 il comportamento del fuoco stabile.

Se $\mu = 0$ la traiettoria è circonferenza, abbiamo un centro.

Si può vedere nella figura 5.9 il comportamento quando abbiamo un centro.

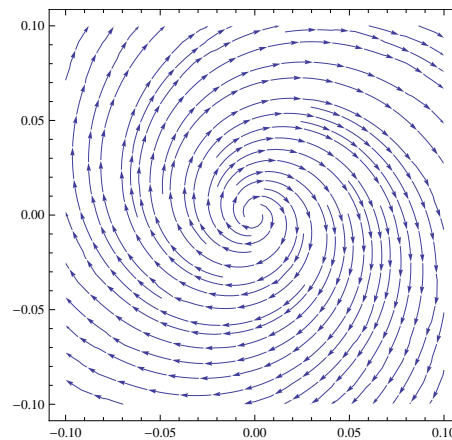


Figure 5.7: Il caso di fuoco instabile

5.5.1 I casi di degenerazione degli autovalori con molteplicitá algebrica e geometrica 2 : stelle

Un caso tipico e' autovalore reale doppio con molteplicitá algebrica e geometrica 2.

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad y'(t) = \lambda y(t). \quad (5.5.15)$$

con

$$\lambda \neq 0.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Se $\lambda > 0$ le traiettorie partono dal origini é vanno al infinito, abbiamo stella instabile

Si puo vedere nella figura 5.10 il comportamento delle soluzioni.

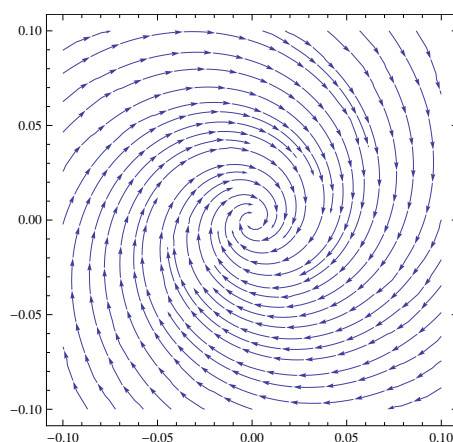


Figure 5.8: Il caso di fuoco stabile

Se $\lambda < 0$ le traiettorie convergono all'origine, abbiamo stella stabile.

Si può vedere nella figura 5.11 il comportamento delle soluzioni come stella stabile.

5.5.2 I casi di degenerazione degli autovalori : autovalore reale, molteplicità algebrica 2, molteplicità geometrica 1 - nodo degenere

Un altro caso di degenerazione è autovalore reale doppio con molteplicità algebrica 2, molteplicità geometrica 1

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda x(t) + y(t), \quad y'(t) = \lambda y(t). \quad (5.5.16)$$

con

$$\lambda \neq 0.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 t e^{\lambda t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Se $\lambda > 0$ le traiettorie partono dall'origine e vanno all'infinito, abbiamo nodo degenere instabile

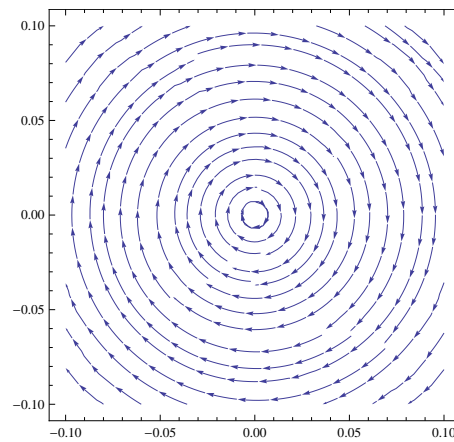


Figure 5.9: Il caso di centro

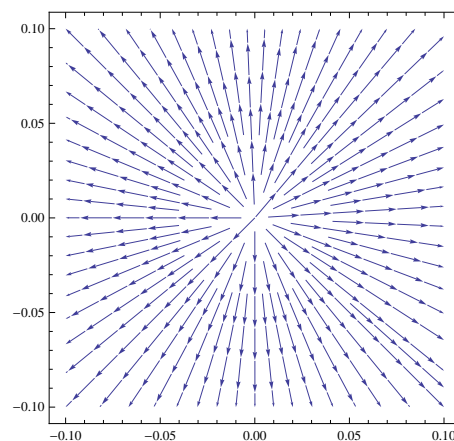


Figure 5.10: Il caso di stella instabile

Si può vedere nella figura 5.12 il comportamento delle soluzioni.

Se $\lambda < 0$ le traiettorie convergono all'origine, abbiamo un nodo degenere stabile.

Si può vedere nella figura 5.13 il comportamento delle soluzioni come stella stabile.

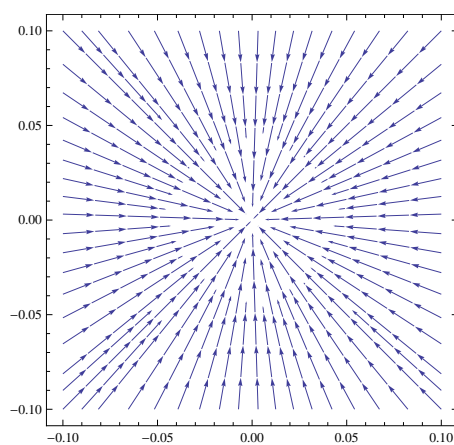


Figure 5.11: Il caso di stella stabile

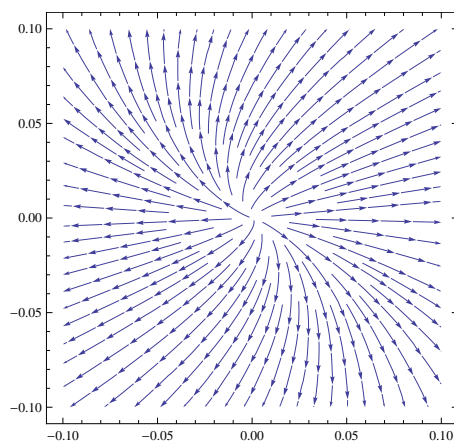


Figure 5.12: Il caso di nodo degenere instabile

5.6 Studio di sistemi di equazioni differenziali intorno dei punti stazionari

Esempio 5.6.1. *Se si cerca di trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -6u_1(t) - 5u_2(t) \\ u_2'(t) &= -2u_1(t) - 3u_2(t). \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

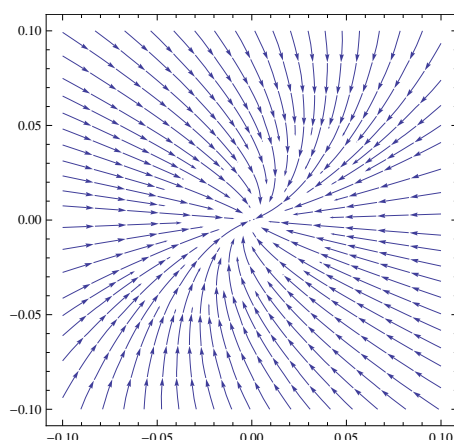


Figure 5.13: Il caso di nodo degenerare stabile

e tracciare le curve integrali (le traiettorie delle soluzioni) intorno dei punti stazionari, possiamo procedere come segue. Il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} -6x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.6.18)$$

ha unica soluzione $(x_1, x_2) = (0, 0)$. L'unico punto stazionario é $(0, 0)$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ha due autovalori

$$\lambda_1 = -8, \lambda_2 = -1.$$

Gli autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo punto di nodo stabile, vedi la Figura 5.14.

In alcuni casi é utile a stabilire le curve isocline, cioé le curve sulle quali la pendenza di tutte le curve integrali che le attraversano é la stessa. In questo caso se abbiamo il sistema

$$u' = Au$$

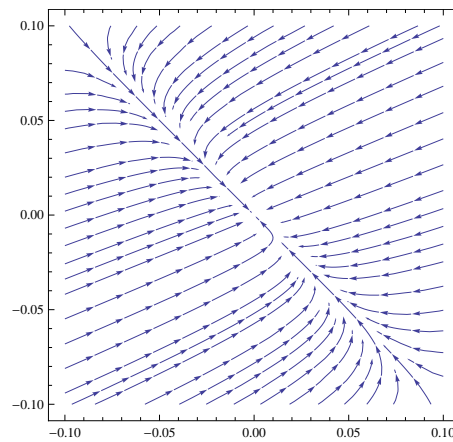


Figure 5.14: Il caso di nodo stabile

e f_1 é autovettore di A con autovalore λ_1 , allora le curve

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} f_1$$

sono curve isocline. Viceversa, si puo vedere che ogni curva isocline é del tipo

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} f_1$$

Nel esempio (5.6.1) le due isocline sono parametrizzati (vedi Figura 5.14) come segue

$$u_1(s) = 5s, u_2(s) = 2s,$$

$$u_1(s) = -s, u_2(s) = s.$$

Problema 5.6.1. *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$u_1'(t) = 3u_1(t) - 2u_2(t) \tag{5.6.19}$$

$$u_2'(t) = 4u_1(t) - 6u_2(t).$$

e tracciare le curve integrali (le traiettorie delle soluzioni) intorno dei punti stazionari.

Risposta. L'unico punto stazionario é $(0,0)$, perche autovalori sono $(-5, 2)$. Il punto stazionario é sella.

Per un sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(u) \\ u_2'(t) &= f_2(u) \end{aligned} \quad (5.6.20)$$

prima si devono trovare tutti punti stazionari, cioè dobbiamo risolvere il sistema Il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} f_1(u_1, u_2) &= 0 \\ f_2(u_1, u_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6.21)$$

Se

$$u^* = (u_1^*, u_2^*)$$

é una soluzione del sistema (5.6.21) (un punto stazionario) usiamo lo sviluppo di Taylor

$$f(u) = f(u^*) + f'(u^*)(u - u^*) + o(\|u - u^*\|)$$

Abbiamo il seguente risultato che ci permette di studiare (vicino al punto stazionario u^*) il comportamento della soluzione del sistema generico (5.6.21) studiando le soluzioni del problema

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay, \\ A &= f'(u^*). \end{aligned} \quad (5.6.22)$$

Lemma 5.6.1. *Sia*

$$U \subseteq \mathbb{R}^2$$

un aperto, $u^ \in U$ un punto stazionario per (5.6.20) e $f \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$. Esiste $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ tale che per ogni*

$$y \in V_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u - u^*\| < \varepsilon\}$$

la soluzione $u(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u(t)), \quad |t| < T, \\ u(0) &= y, \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

e la soluzione $u_0(t)$ del problema "linearizzato"

$$\begin{aligned} u_0'(t) &= Au_0, \quad A = f'(u^*) \quad |t| < T, \\ u(0) &= y, \end{aligned} \quad (5.6.24)$$

sono "vicini" cioè

$$\|u(t) - u_0(t)\| \leq 2\varepsilon$$

per ogni t tale che $|t| \leq T$.

Idea della dimostrazione. Ponendo

$$E(t) = \frac{\|u(t) - u_0(t)\|^2}{2},$$

si ottiene

$$E'(t) \leq \varepsilon^2 + CE(t).$$

Lemma di Gronwall ci da

$$E(t) \leq E(0)e^{Ct} < 4\varepsilon^2$$

se $|t| \leq T$ e T è piccolo. □

Problema 5.6.2. Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_1(t) + u_2(t) \\ u_2'(t) &= u_1(t) - 2u_2(t) - 5. \end{aligned} \quad (5.6.25)$$

Idea della soluzione. Il punto di equilibrio è soluzione del sistema

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 &= 0 \\ u_1 - 2u_2 &= 5. \end{aligned} \quad (5.6.26)$$

La soluzione è

$$(u_1^*, u_2^*) = (1, -2).$$

La matrice Jacobiana è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

con due autovalori $\pm\sqrt{5}$. Il punto $(1, -2)$ è sella.

5.7 Esercizi sui punti stazionari dei sistemi (2 × 2)

Problema 5.7.1. *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2(t) & (5.7.27) \\ u_2'(t) &= u_1^2(t) - u_2^2(t) - 1. \end{aligned}$$

e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

Idea della soluzione. I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} 2u_2 &= 0 & (5.7.28) \\ u_1^2 - u_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono $v_1 = (1, 0)$, e $v_2 = (-1, 0)$. la funzione

$$f(u) = \begin{pmatrix} 2u_2 \\ u_1^2 - u_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

é differenziabile in v_1, v_2 e'

$$f'(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

con due autovalori ± 2 e

$$f'(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con due autovalori complessi e coniugati ($\pm i2$) Il punto $(1, 0)$ è sella, mentre $(-1, 0)$ è fuoco(centro).

Problema 5.7.2. *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2(t) + 10u_2^4 & (5.7.29) \\ u_2'(t) &= u_1^2(t) - u_2^2(t) - 4. \end{aligned}$$

e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

Problema 5.7.3. *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= u_1^2 + u_2^2 - 2 \\ u_2'(t) &= u_1 - u_2.\end{aligned}\tag{5.7.30}$$

e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

Risposta. Punti stazionari sono del problema $u' = f(u)$ con

$$f_1(u) = u_1^2 + u_2^2 - 2, \quad f_2(u) = u_1 - u_2$$

sono

$$P_1(1, 1), P_2(-1, -1).$$

Abbiamo

$$f'(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

In P_1 abbiamo punto di sella. Abbiamo

$$f'(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{2}, \lambda_2 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$$

In P_2 abbiamo punto di fuoco stabile.

Problema 5.7.4. a) *Studiare la stabilità dei punti stazionari nel I quadrante $x > 0, y > 0$ del sistema*

$$x'(t) = x(2 - x - y),\tag{5.7.31}$$

$$y'(t) = y(4x - x^2 - 3)\tag{5.7.32}$$

b) *Vedere se esiste curva chiusa nel I quadrante che è traiettoria del sistema (5.7.31).*

Soluzione a). L'unico punto stazionario è (1, 1). con

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

$$f_1(x, y) = x(2 - x - y), f_2(x, y) = y(4x - x^2 - 3).$$

La matrice

$$A = f'(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha autovalori

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

e quindi abbiamo nodo stabile. □

Soluzione del punto b). Sia

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{xy}.$$

La funzione é ben definita nel I quadrante e abbiamo

$$\partial_x(\varphi f_1) + \partial_y(\varphi f_2) = -\frac{(1-x)^2 + y}{xy} < 0$$

per $x, y > 0$. Se esiste una curva γ integrale chiusa, possiamo chiamare U il dominio interno e abbiamo le relazioni

$$\int_U \underbrace{(\partial_x(\varphi f_1) + \partial_y(\varphi f_2))}_{F(x,y)} dx dy = \int_\gamma -\varphi f_2 dx + \varphi f_1 dy$$

se la curva é chiusa e $(x(t), y(t))$ soddisfa (5.7.31) allora abbiamo

$$\int_\gamma -\varphi f_2 dx + \varphi f_1 dy = \int_\gamma \varphi(-f_2 x'(t) + f_1 y'(t)) dt = 0.$$

Siccome $F(x, y) < 0$ in U siamo arrivati alla contraddizione e quindi curva integrale periodica non esiste. □

Problema 5.7.5. *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_1 + u_2^2 - 1 \\ u_2'(t) &= 6u_1 - u_2^2 + 1. \end{aligned} \quad (5.7.33)$$

e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

Risp. Nel punto $(0, 1)$ la matrice Jacobiana ha autovalori ± 4 , abbiamo punto di sella.

Nel punto $(0, -1)$ la matrice Jacobiana ha autovalori complessi con parte reale uguale a 2, abbiamo punto di fuoco instabile.

Problema 5.7.6. *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1 u_2 \\ u_2'(t) &= 2 + u_2 - u_1^2. \end{aligned} \quad (5.7.34)$$

e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

Risposta. Nel punto $(0, -2)$ la matrice Jacobiana ha autovalori $(-2, 1)$ abbiamo punto di sella. Nel punto $(\pm\sqrt{2}, 0)$ la matrice Jacobiana ha autovalori complessi con parte reale uguale a $1/2$, abbiamo punto di fuoco instabile.

Problema 5.7.7. *(modello Rosenzweig - Macarthur) Trovare i punti stazionari del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1 - u_1) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2'(t) &= -c u_2 + \frac{u_1 u_2}{1 + u_1}. \end{aligned} \quad (5.7.35)$$

dove $c < 1/2$ e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

5.7.1 Assignment: classificazione punti di equilibrio

Problema 5.7.8. *Trovare i punti stazionari del sistema*

$$\frac{dx}{dt} = (y - x)(x - 1), \quad \frac{dy}{dt} = (3 + 2x - x^2)y$$

e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.

Solution. The stationary solutions satisfy

$$0 = (y - x)(x - 1), \quad 0 = (3 + 2x - x^2)y = (3 - x)(1 + x)y$$

The first of these equations implies $y = x$ or $x = 1$.

First, if $y = x$ then the second equation becomes $0 = (3 - x)(1 + x)x$, which implies $x = 3$, $x = -1$, or $x = 0$. Hence, the thread from $y = x$ leads to the stationary solutions $(3, 3)$, $(-1, -1)$, and $(0, 0)$. On the other hand, if $x = 1$ then the second equation becomes $0 = 4y$, which implies $y = 0$. Hence, the thread from $x = 1$ leads to the stationary solution $(1, 0)$. By collecting the results from each thread, we have found the four stationary solutions $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 3)$.

Near the point $(-1, -1)$ we make the substitution $x = 1 + u$, $y = 1 + v$ and obtain the system

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2u - 2v + o(\|(u, v)\|), \\ v'(t) &= -4u + o(\|(u, v)\|). \end{aligned}$$

For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

the eigenvalues are $4, -2$ so we have saddle point and the eigenvectors are

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

With the help of the eigenvectors we draw the picture on Figure 5.19.

Near the point $(0, 0)$ we make the substitution $x = u$, $y = v$ and obtain the system

$$\begin{aligned} u'(t) &= u - v + o(\|(u, v)\|), \\ v'(t) &= 3v + o(\|(u, v)\|). \end{aligned}$$

For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

the eigenvalues are $3, 1$ so we have instable node and the eigenvectors are

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

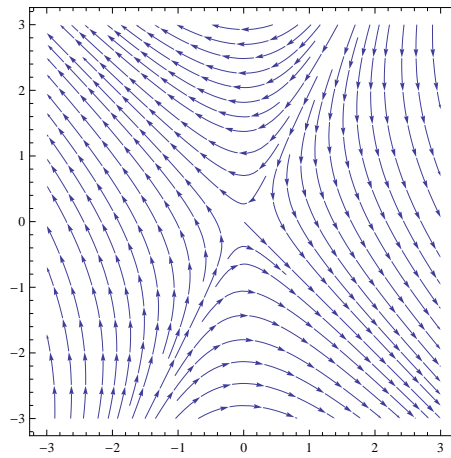


Figure 5.15: The phase portrait near $(-1, -1)$

With the help of the eigenvectors we draw the picture on Figure 5.16. Near the point $(1,0)$ we make the substitution $x = 1 + u, y = v$ and ob-

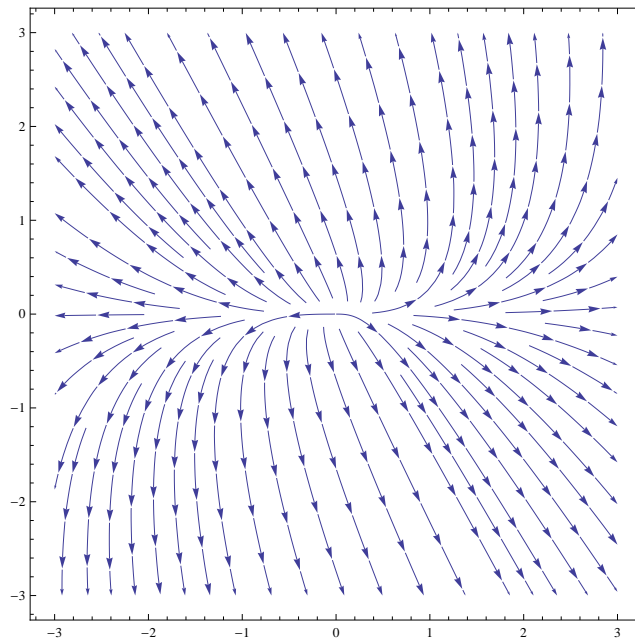


Figure 5.16: The phase portrait near $(0,0)$

tain the system

$$\begin{aligned}u'(t) &= -u + o(\|(u, v)\|), \\v'(t) &= 4v + o(\|(u, v)\|).\end{aligned}$$

For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

the eigenvalues are $4, -1$ so we have saddle point and the eigenvectors are

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

With the help of the eigenvectors we draw the picture on Figure 5.17.

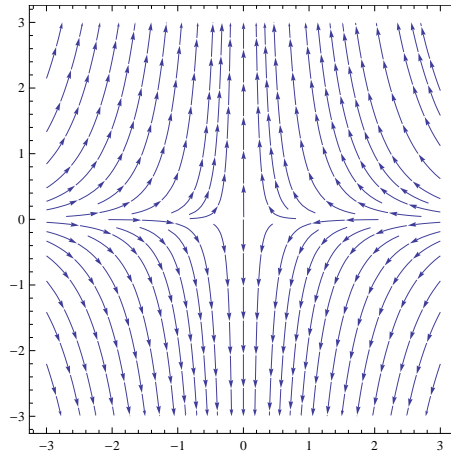


Figure 5.17: The phase portrait near $(1, 0)$

Near the point $(3, 3)$ we make the substitution $x = 3 + u, y = 3 + v$ and obtain the system

$$\begin{aligned}u'(t) &= -2u + 2v + o(\|(u, v)\|), \\v'(t) &= -12u + o(\|(u, v)\|).\end{aligned}$$

For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

the eigenvalues are two complex numbers $\lambda, \bar{\lambda}$ with

$$\operatorname{Re}\lambda = -1$$

so we have hyperbolic critical point (fuoco) that is stable. Then we draw the picture on Figure 5.18.

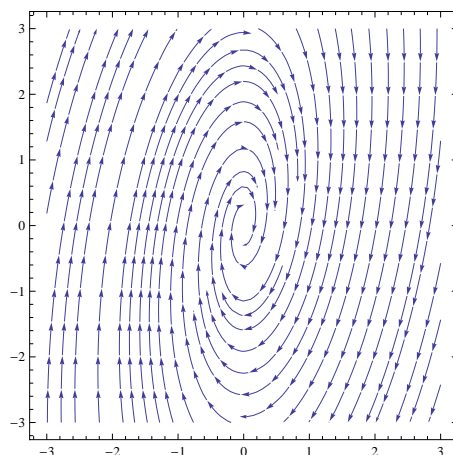


Figure 5.18: The phase portrait near $(3,3)$

Problema 5.7.9. *Trovare i punti stazionari (di equilibrio) del sistema*

$$\frac{dx}{dt} = y + 2 \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = (\sin x)^2 y - y^3 - (\sin x)^2 + y^2,$$

che si trovano nel dominio

$$A = \{(x, y); -\frac{\pi}{2} < x < 0\}$$

e stabilire per ogni punto di equilibrio in A il tipo, tracciando il ritratto di fase, vicino ai punti di equilibrio in A .

Soluzione. L'equazione

$$(\sin x)^2 y - y^3 - (\sin x)^2 + y^2 = 0$$

si può riscrivere come

$$(\sin^2 x - y^2)(y - 1) = 0$$

e quindi ha soluzioni

$$y = 1, \quad y = \pm \sin x.$$

Sostituendo nella equazione $y + 2 \sin x = 0$ troviamo

$$y = 1, \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

L'unica soluzione in A è $x = -\pi/6$. Sviluppando

$$(\sin x)^2 y - y^3 - (\sin x)^2 + y^2$$

in Taylor vicino a $x = -\pi/6, y = 1$ troviamo

$$(\sin x)^2 y - y^3 - (\sin x)^2 + y^2 = -\frac{3}{4}v + o(\|(u, v)\|)$$

dove

$$x = -\frac{\pi}{6} + u, \quad y = 1 + v.$$

Abbiamo inoltre

$$2 \sin x + y = \sqrt{3}u + v + o(\|(u, v)\|).$$

□

5.8 Primi integrali e studio dei sistemi (2×2)

Definizione 5.8.1. *Siano*

$$J \subseteq \mathbb{R}^n, \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

aperti e sia

$$f \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$$

un campo vettoriale. Si consideri il problema differenziale del primo ordine dato da:

$$y'(t) = f(y(t)). \quad (5.8.36)$$

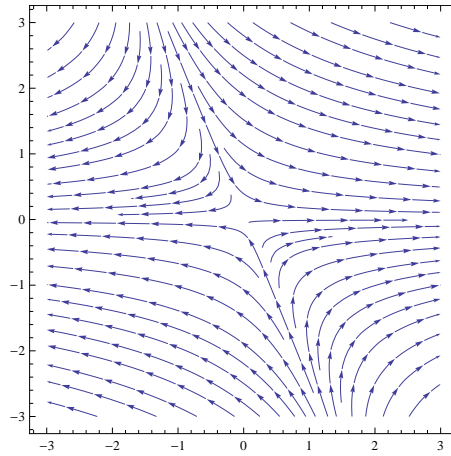


Figure 5.19: The phase portrait near $(1, -\pi/6)$

L'integrale primo associato al problema é una qualsiasi funzione reale $H \in C^1(U; \mathbb{R})$ tale che per una qualunque soluzione

$$y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$$

del problema (5.8.36) risulti:

$$H(y(t)) = c \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I.$$

Si tratta cioe' di una qualsiasi quantita' che si conserva lungo le soluzioni del problema.

Lemma 5.8.1. Una funzione H é integrale primo di (5.8.36) se e soltanto se il suo gradiente é ortogonale al campo vettoriale f . Ovvero, H é integrale primo del problema se e solo se si verifica:

$$\langle \nabla H(y), f(y) \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k}(y) f_k(y) = 0 \quad \forall y \in J.$$

Idea della dimostrazione. Si supponga che H é integrale primo del problema (5.8.36). Grazie alla regolarita' del campo vettoriale sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy, che garantisce esistenza ed unicita' locale della soluzione. Fissato quindi $y \in J$, esiste I e un unico $u : I \rightarrow J$ con

$$u'(t) = f(u), t \in I \quad u(0) = y.$$

Per la definizione di integrale primo risulta:

$$0 = \frac{d}{dt}H(u(t)) \quad \forall t \in I.$$

In particolare, quindi:

$$0 = \frac{dH \circ u}{dt}(0) = \langle \nabla H(u(0)), u'(0) \rangle = \langle \nabla H(y), f(y) \rangle$$

e dall'arbitrarietà di y segue l'implicazione diretta.

Viceversa, si supponga che il gradiente di H é ortogonale a f , e si consideri una generica soluzione

$$u: I \rightarrow J.$$

Per ogni $t \in I$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dH \circ u}{dt}(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k}(u(t)) u'_k(t) = \langle \nabla H(u(t)), u'(t) \rangle = \\ &= \langle \nabla H(u(t)), f(u(t)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

e questo prova l'asserto. □

5.9 Esercizi sui integrali primi

Problema 5.9.1. (Lotka Volterra) Sia $A = B = C = D = 1$ nel sistema di Lotka - Volterra Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2 \end{aligned} \tag{5.9.37}$$

ha un primo integrale

Suggerimento. La soluzione del problema (3.7.1) ci dice che la soluzione rimane sempre nel I quadrante. Così possiamo scrivere

$$\frac{(x(t))'}{x(t)} = 1 - y(t).$$

$$\frac{(y(t))'}{y(t)} = x(t) - 1.$$

Moltiplicando la prima equazione per $x(t) - 1$ la seconda per $y(t) - 1$ e sommando, otteniamo

$$\frac{(x(t) - 1)(x(t))'}{x(t)} + \frac{(y(t) - 1)(y(t))'}{y(t)} = 0$$

e usando la relazione

$$\frac{(x(t) - 1)(x(t))'}{x(t)} = (x(t))' - \frac{(x(t))'}{x(t)} = (x(t) - \log x(t))'$$

troviamo

$$I'(t) = 0, I(t) = x(t) + y(t) - \log x(t) - \log y(t) = x(t) + y(t) - \log(x(t)y(t)).$$

Il primo integrale (nel I quadrante è definito come segue

$$I(x, y) = x + y - \log(xy).$$

Le curve di livello rappresentano le traiettorie del sistema di Lotka - Volterra, si può vedere Figura 5.20 dove le curve di livello sono tracciate.

□

L'equazione del pendolo è

$$\theta''(t) = \sin \theta(t).$$

si può riscrivere come un sistema

Problema 5.9.2. (*modello del pendolo*) Vedere se il sistema

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} = \sin u_1(t) \tag{5.9.38}$$

$$\tag{5.9.39}$$

ha un primo integrale.

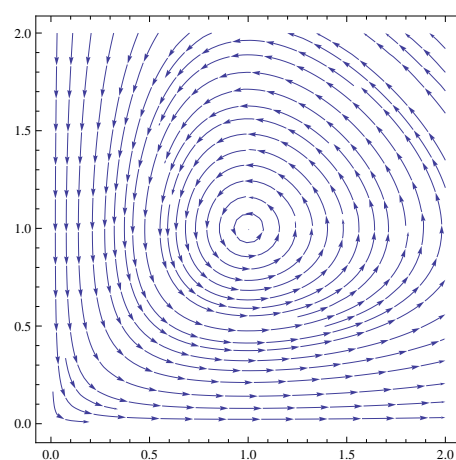


Figure 5.20: Il caso di nodo stabile

Suggerimento. Per tutti equazioni autonomu

$$y'' = f(y)$$

abbiamo u n sistema del tipo (5.9.40).

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2(t), \\ \frac{du_2}{dt} &= f(u_1(t)) \end{aligned} \tag{5.9.40}$$

$$\tag{5.9.41}$$

Il primo integrale é

$$H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} - F(u_1),$$

dove $F'(u) = f(u)$, cioè F é la primitiva di f . Nel caso del pendolo abbiamo

$$H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} + 1 - \cos(u_1).$$

Si puo vedere Figura 5.21 dove le curve di livello sono tracciati. Alcuni delle curve di livello rappresentano le soluzioni periodiche .

□

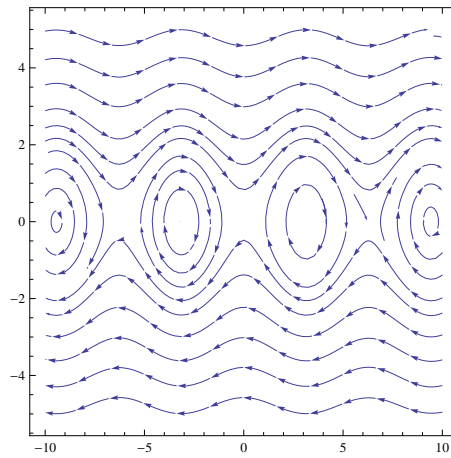


Figure 5.21: Il caso di pendolo

Problema 5.9.3. a) *Trovare il massimo della funzione*

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - axy, \quad a = \sqrt{6}$$

nel dominio

$$U = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

b) *Trovare il massimo della funzione f del punto a) su $\gamma \cap U$ dove γ é la curva $x = x(t), y = y(t), t > 0$, definita della soluzione del problema di Cauchy*

$$x'(t) = -y(t) - \frac{x(t)y(t)}{100 + y(t)^2 + x(t)^2}$$

$$y'(t) = +x(t) + \frac{x(t)^2}{100 + y(t)^2 + x(t)^2}$$

con dati iniziali $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Soluzione. a) Abbiamo

$$\partial_x f = 2x - ay,$$

$$\partial_y f = 4y - ax.$$

Il sistema

$$\begin{aligned} 2x - ay &= 0, \\ -ax + 4y &= 0 \end{aligned} \quad (5.9.42)$$

ha unico punto critico $x = y = 0$ (se $a \neq 2\sqrt{2}$) che é sulla frontiera di U .
Quindi dobbiamo studiare

$$\sup_{\partial U} f.$$

La frontiera ha due segmenti OA , OB dove

$$O = (0, 0), A = (1, 0), B = (0, 1)$$

e l'arco $\widehat{AB} = \{x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$. Su OA abbiamo $f(x, 0) = x^2$ e quindi

$$\max_{OA} f = 1.$$

Abbiamo inoltre

$$\max_{OA} f = 2 = f(0, 1).$$

Sul arco usiamo

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + y^2 - axy = 1 + y^2 - axy$$

Ponendo

$$g(x, y) = y^2 - 3xy$$

troviamo

$$\max_{\widehat{AB}} f = 1 + \max_{\widehat{AB}} g$$

il moltiplicatore di Lagrange

$$F(x, y) = g(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Troviamo il sistema

$$\begin{aligned} -ay &= 2\lambda x, \\ -ax + 2y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5.9.43)$$

Le primi due equazioni danno

$$-2\lambda(2-2\lambda) - a^2 = 0$$

o

$$4\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0$$

o

$$\lambda = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Cerchiamo $\lambda < 0$ perché nel dominio U x, y sono positivi. Così $\lambda = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

$$x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}-1}y$$

e quindi

$$y^2 \left(\frac{6}{8-2\sqrt{7}} + 1 \right) = 1$$

implica

$$y = \frac{\sqrt{4-\sqrt{7}}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{7-\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{7}}}{\sqrt{7-\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{7}\sqrt{\sqrt{7}-1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{7}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{7}}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}-1}y = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}-1} \frac{\sqrt{\sqrt{7}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}\sqrt{\sqrt{7}-1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{7}+1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{7}}.$$

Allora

$$y^2 = \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}}, xy = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}\sqrt{\sqrt{7}-1}} \frac{\sqrt{\sqrt{7}-1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}.$$

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - axy = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{7} - 1 - 6}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}-7}{2\sqrt{7}} < f(0, 1) = 2.$$

Così troviamo

$$\sup_U f = \sup_{\partial U} f = 2 = f(0, 1).$$

b) È sufficiente osservare che il sistema ha legge di conservazione (primo integrale)

$$x^2 + y^2 = \text{cost}$$

e la scelta dei dati iniziali implica

$$\gamma \cap U = \widehat{AB}.$$

Così il sup cercato è 2 ed è raggiunto al punto $(0, 1)$. \square

5.10 Stabilità

Definizione 5.10.1. *Un punto di equilibrio u^* del sistema è detto stabile (secondo Lyapunov), se per ogni intorno U del punto u^* esiste un intorno V dello stesso punto contenuto in U tale che le orbite che partono da punti interni a V rimangono dentro U per tutti i tempi $t > 0$.*

Definizione 5.10.2. *Il punto di equilibrio u^* è detto attrattivo se esiste un intorno U di u^* tale che per ogni orbita $u(t)$ che parta da un punto interno ad U si ha*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u^*$$

Un punto di equilibrio u^* detto asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo. Un punto di equilibrio si dice instabile se non è stabile, ovvero se esiste un intorno U di u^* tale che comunque si scelga un intorno V di u^* si può sempre trovare una posizione iniziale u in V tale che l'orbita di u si allontana da u^* abbastanza da uscire da U . Un punto di equilibrio u^* è detto esponenzialmente stabile se è asintoticamente stabile e

$$\exists k, a > 0 : \|u(t) - u^*\| < ke^{-at}$$

5.11 Stabilità secondo Lyapunov

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione in classe $C^1(U)$. Si consideri il sistema dinamico rappresentato dall'equazione ordinaria:

$$u'(t) = f(u(t)). \quad (5.11.44)$$

Sia $u^* \in U$ un punto di equilibrio, cioè

$$f(u^*) = 0.$$

Lemma 5.11.1. (Lyapunov) *Il punto di equilibrio u^* é asintoticamente stabile se gli autovalori della matrice jacobiana $f'(u^*)$ hanno parte reale negativa.*

Dimostrazione. Usiamo sviluppo di Taylor per il campo vettoriale del sistema:

$$f(u) = f(u^*) + f'(u^*)(u - u^*) + o(\|u - u^*\|) = f'(u^*)(u - u^*) + o(\|u - u^*\|).$$

La matrice

$$A = f'(u^*)$$

ha autovalori λ , tali che

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \sigma < 0. \quad (5.11.45)$$

Possiamo riscrivere l'equazione (5.11.44) nella forma

$$v'(t) = Av + g(v), \quad (5.11.46)$$

dove $v = u - u^*$ e $g(v) = O(\|v\|^2)$.

Usando la decomposizione nella forma di Jordan possiamo supporre che A é un blocco di Jordan con unico autovalore λ che soddisfa (5.11.50).

Usando la forma esplicita di e^{At} si vede che (vedi la stima esponenziale (??) del Corollario ??)

$$\|e^{At} f\| \leq C e^{-\sigma t/2} \|f\|. \quad (5.11.47)$$

Riscrivendo (5.11.46) nella forma

$$(e^{-At} v)' = e^{-At} g(v)(t),$$

otteniamo

$$v(t) = e^{At} v(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} g(v)(s) ds$$

ed applicando (5.11.47) deduciamo

$$\|v(t)\| \leq C e^{-\sigma t/2} \|v(0)\| + \int_0^t C e^{-\sigma(t-s)/2} \|v(s)\|^2 ds.$$

Sia

$$\varphi(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\sigma t/2} \|v(t)\|. \quad (5.11.48)$$

Abbiamo la disequazione

$$\varphi(T) \leq C\varphi(0) + C \int_0^T e^{\sigma(s)/2} e^{-\sigma(s)} \varphi(s)^2 ds,$$

perché

$$\|v(s)\|^2 \leq e^{-\sigma s} \varphi(s)^2$$

secondo la definizione (5.11.48). Abbiamo quindi

$$\varphi(T) \leq C\varphi(0) + C \int_0^T e^{-\sigma s/2} \varphi(s)^2 ds \leq C\varphi(0) + C_1 \varphi(T)^2 \quad (5.11.49)$$

perché $\varphi(T)$ è una funzione crescente. La disequazione

$$\varphi(T) \leq C\varphi(0) + C_1 \varphi(T)^2$$

con $\varphi(0)$ piccolo implica

$$\varphi(T) \leq C_2 \varphi(0)$$

e quindi

$$\|v(t)\| \leq C_2 e^{-\sigma t/2} \|v(0)\|.$$

□

Seconda Dimostrazione. Di nuovo il punto di partenza è l'equazione (5.11.46) dove $v = u - u^*$ e $g(v) = o(\|v\|)$.

Possiamo usare Lemma ?? perché la matrice

$$A = f'(u^*)$$

ha autovalori λ , tali che

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \sigma < 0. \quad (5.11.50)$$

e quindi soddisfa l'ipotesi (??) del Lemma ??.

Così esiste una matrice S positiva definita tale che ponendo $\tilde{A} = SA$ abbiamo

$$\tilde{A} + \tilde{A}^* = -I$$

abbiamo le relazioni

$$\frac{d}{dt} (\langle v(t), Sv(t) \rangle) = 2\operatorname{Re} \langle Av(t), v(t) \rangle + 2\operatorname{Re} \langle g(v), Sv \rangle \leq$$

$$\leq \langle (A + A^*)v(t), v(t) \rangle + \varepsilon \|v(t)\|^2 = -(1 - \varepsilon) \|v(t)\|^2 \leq -C \langle v(t), Sv(t) \rangle$$

con una costante $C > 0$ e quindi la funzione di Lyapunov

$$(\langle v(t), Sv(t) \rangle)$$

decade esponenzialmente. \square

Se A é una matrice $n \times n$ allora lo spettro di A é definito come segue

$$sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é autovalore di } A\}.$$

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e

$$f: \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione in classe $C^1(\mathbb{R} \times U)$. Si consideri il sistema dinamico rappresentato dall'equazione ordinaria:

$$u'(t) = f(t, u). \quad (5.11.51)$$

Sia $u^*(t) \in C^1(\mathbb{R}; U)$ un stato fondamentale, cioè

$$f(t, u^*(t)) = 0.$$

Lemma 5.11.2. (*stabilità asintotica dello stato fondamentale*) *Lo stato fondamentale $u^*(t)$ é asintoticamente stabile se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\lambda \in sp(f'(t, u^*(t))) \implies \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta. \quad (5.11.52)$$

Lo stato fondamentale $u^(t)$ é asintoticamente stabile se esiste $C > 0$, esiste $\varepsilon_0 > 0$, tale che per ogni $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ la condizione*

$$\|u(0) - u^*(0)\| \leq \varepsilon$$

implica

$$\|u(t) - u^*(t)\| \leq C\varepsilon e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Chapter 6

Richiami su algebra lineare

6.1 Applicazioni lineari e matrici

Se V e V' sono due spazi vettoriali, un'applicazione lineare $L : V \rightarrow V'$ non é nient'altro che una funzione particolare tra elementi di V e elementi di V' . V é chiamato spazio dominio di L , mentre V' é il codominio.

Definizione 6.1.1. *Dati V e V' due spazi vettoriali su uno stesso campo \mathbb{K} , una applicazione (o funzione)*

$$L: V \rightarrow V'$$

si dice lineare se soddisfa le seguenti condizioni:

1. $L(u + v) = L(u) + L(v)$ per ogni $u, v \in V$

2. $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ per ogni $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ dove le operazioni al primo membro di 1. e 2. sono la somma e il prodotto per uno scalare definite su V e quelle al secondo membro sono quelle definite su V'

Osservazione. Sia $L : V \rightarrow V'$ una funzione tra due spazi vettoriali V e V' su uno stesso campo \mathbb{K} . Condizione necessaria e sufficiente affinché L sia lineare é che:

$$L(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$$

Le applicazioni lineari vengono anche dette omomorfismi oppure trasformazioni lineari. Una applicazione biiettiva $L : V \rightarrow V'$ si dice anche isomorfismo, mentre ogni applicazione di V in V viene chiamata endomorfismo; in particolare un isomorfismo di V in V si dice automorfismo. Diciamo ora la definizione di nucleo e immagine di un'applicazione lineare:

Definizione 6.1.2. Sia $L : V \rightarrow V'$ una applicazione lineare. L'insieme $L(V) = \{v' \in V' \mid v' = L(v) \text{ per qualche } v \in V\} \subseteq V'$ viene denominato immagine di L e indicato con il simbolo $Im(L)$. Come si riconosce facilmente, $Im(L)$ è un sottospazio vettoriale di V' e la sua dimensione viene detta rango di L ed indicata con $\rho(L)$. L'insieme $\{v \in V \mid L(v) = 0_{V'}\} \subseteq V$ viene detto nucleo di L o spazio nullo di L e viene indicato con il simbolo $N(L)$. Si può verificare semplicemente che $N(L)$ risulta essere un sottospazio vettoriale di V .

Proposizione 6.1.1. Sia $L : V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare.

$$L \text{ é iniettiva} \iff N(L) = \{0_V\}$$

Ricordiamo che se v_1, \dots, v_r sono vettori in V lo spazio generato di loro è l'insieme di tutte combinazioni lineari di questi vettori. Le notazioni usati per lo spazio generato di v_1, \dots, v_r sono

$$Span(v_1, \dots, v_r)$$

o

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle.$$

Osservazione Sia $L : V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare. 1. Se $W = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \subset V$, allora $L(W) = \langle L(v_1), \dots, L(v_r) \rangle$. 2. Se $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subset V$, allora $L(V) = Im(L)$. In questo modo risulta molto semplice determinare l'immagine di uno spazio vettoriale noti i suoi generatori o eventualmente una sua base.

Nelle applicazioni è spesso utile vedere se esiste, ed eventualmente determinarla, una funzione lineare che verifica assegnate condizioni, cioè che a prefissati vettori del dominio fa corrispondere assegnati vettori del codominio. Il teorema seguente fornisce una risposta nel caso particolare in cui i vettori assegnati nel dominio formino una base. Il problema generale può poi essere ricondotto a questo caso con opportune osservazioni.

Theorem 6.1.1. *Siano V e V' due spazi vettoriali su uno stesso campo \mathbb{K} . Sia inoltre $[v_1, \dots, v_n]$ una base di V e $[w_1, \dots, w_{n'}]$ una famiglia di vettori di V' . Allora esiste una e una sola applicazione lineare $L: V \rightarrow V'$ tale che*

$$L(v_1) = w'_1, \dots, L(v_n) = w'_n$$

Inoltre 1. L é iniettiva $\iff [w_1, \dots, w_{n'}]$ é linearmente indipendente; 2. L é suriettiva $\iff [w_1, \dots, w_{n'}]$ genera V'

Corollary 6.1.1. *Sia $L: V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare e sia $[v_1, \dots, v_n]$ una base di V . Allora*

1. *L é iniettiva $\iff [L(v_1), \dots, L(v_n)]$ é una base di $Im(L)$*
2. *L é un isomorfismo $\iff [L(v_1), \dots, L(v_n)]$ é una base di V'*

Un risultato estremamente utile é che la somma del rango di un'applicazione lineare e della dimensione del suo nucleo é sempre uguale alla dimensione dello spazio dominio.

Theorem 6.1.2. (delle dimensioni). *Sia $L: V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare. Allora:*

$$\dim V = \dim Im(L) + \dim N(L)$$

Dimostrazione. Sia $n = \dim V$ e $r = \dim N(L)$. Bisogna dimostrare che $\dim Im(L) = n - r$. Se $r = 0$, cioé se L é iniettiva, la tesi é una conseguenza del corollario 2.1 - 1. Se $r \neq 0$, si consideri una base $[v_1, \dots, v_r]$ di $N(L)$ e la si estenda (utilizzando il teorema della base incompleta) a una base di V , ottenendo cosí: $B = [w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n]$. Allora, dall'osservazione 2.2 - 2² $[L(w_1), \dots, L(w_r), L(v_{r+1}), \dots, L(v_n)]$ genera $Im(L)$. Ricordando poi che $w_1, \dots, w_r \in N(L)$, si ha:

$$\langle L(v_{r+1}), \dots, L(v_n) \rangle = Im(L)$$

Passiamo ora a dimostrare che tali generatori sono linearmente indipendenti. Sia infatti:

$$b_{r+1}L(v_{r+1}) + \dots + b_nL(v_n) = 0_{V'}$$

Allora $L(b_{r+1}v_{r+1} + \dots + b_nv_n) = 0_{V'}$ e quindi $b_{r+1}v_{r+1} + \dots + b_nv_n \in N(L)$ cioé si puo scrivere come combinazione lineare di w_1, \dots, w_r :

$$b_{r+1}v_{r+1} + \dots + b_nv_n = a_1v_1 + \dots + a_rv_r$$

Poiché $[w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n]$ é una base di V , dalla precedente uguaglianza si deduce: $a_1 = \dots = a_r = 0 = b_{r+1} = \dots = b_n$. Pertanto $[L(v_{r+1}), \dots, L(v_n)]$ é linearmente indipendente e quindi una base di $I_m(L)$. Allora $\dim I_m(L) = n - r$ \square

Consideriamo un'applicazione lineare $L: V \rightarrow V'$ tra due spazi vettoriali V e V' su uno stesso campo K e siano B e B' basi di V e V' rispettivamente. Cerchiamo con la successiva proposizione di determinare la relazione che intercorre tra l'ennupla delle coordinate di un vettore $v \in V$ (rispetto alla base B) e quella delle coordinate di $L(v)$ (rispetto alla base B').

Proposition 6.1.1. *Sia $L: V \rightarrow V'$ una applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e V' (su uno stesso campo K) di dimensioni n e m rispettivamente. Siano inoltre B e B' basi di V e V' . Indichiamo con*

$$X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e con} \quad X_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

le matrici colonne i cui elementi coincidono con le coordinate di v e di $L(v)$ rispetto a B e B' , allora esiste una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ tale che

$$X_{B'} = AX_B$$

La matrice A é univocamente determinata da L, B e B' .

Con l'osservazione successiva vedremo che una matrice A qualsiasi rappresenta sempre una applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e V' fissati.

Osservazione. Siano V e V' due spazi vettoriali su K e siano $B = [v_1, \dots, v_n]$ e $B' = [v'_1, \dots, v'_n]$ due loro basi. Comunque si fissi $A \in M_{m,n}(K)$ si puo considerare la funzione $L_A: V \rightarrow V'$ tra V e V' che al vettore $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ fa corrispondere il vettore $v' = x'_1 v'_1 + \dots + x'_n v'_n$ le cui coordinate rispetto a B' , sono date da:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Tale funzione risulta essere lineare. In particolare, se V coincide con K^n , V' con K^m e B e B' sono le basi canoniche di K^n e K^m rispettivamente, la funzione L_A viene detta funzione lineare associata in modo canonico ad A . Il nucleo di L_A , viene anche detto spazio nullo di A e indicato con $\text{Null}(A)$.

Si vuole ora analizzare la relazione che intercorre tra le varie matrici quadrate di uno stesso endomorfismo:

Osservazione Consideriamo un endomorfismo $L : V \rightarrow V$, siano A e D le matrici di L relative alle basi B e C rispettivamente (si ricorda che nel caso di endomorfisimi, si usa scegliere la stessa base nel dominio e nel codominio). Le due matrici dell'endomorfismo L sono legate da una relazione del tipo:

$$D = H^{-1}AH$$

dove H e H^{-1} sono le due matrici di passaggio tra le basi B e C dello spazio vettoriale V . Un risultato analogo si ottiene anche per un qualsiasi omomorfismo.

6.2 Autovalori e autovettori di una matrice

Definizione 6.2.1. *Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, si dice autovettore di A ogni ennupla non nulla $X \in K^n$ (pensata come matrice colonna) tale che*

$$AX = \lambda X$$

per qualche $\lambda \in K$. $\lambda \in K$ si dice autovalore di A se esiste un'ennupla $X \neq 0$ tale che

$$AX = \lambda X$$

Osservazione. Ad ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ resta associato in modo canonico un endomorfismo L_A di K^n . In questo modo gli autovettori, gli autovalori, gli autospazi, il polinomio caratteristico di A sono gli autovettori, gli autovalori, gli autospazi, il polinomio caratteristico dell'endomorfismo L_A . Con questa semplice osservazione possiamo evitare di formulare nuovi teoremi o nuove proposizioni sugli autovalori di una matrice, in quanto basta utilizzare quelli del paragrafo precedente sugli autovalori di un endomorfismo.

6.3 Endomorfisimi diagonalizzabili

Lo scopo di questo paragrafo é quello di individuare le condizioni necessarie e sufficienti per stabilire se un dato endomorfismo é diagonalizzabile.

Definizione 6.3.1. *Sia L un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n su K . L si dice diagonalizzabile se esiste una base di V tale che la matrice di L relativa ad essa sia diagonale.*

Proposizione 6.3.1. *Sia L un endomorfismo di uno spazio vettoriale V . Sono equivalenti:*

1. L é diagonalizzabile;
2. esiste una base di V formata da autovettori di L .

Definizione 6.3.2. *Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile se esiste una matrice $H \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile tale che*

$$\Delta = H^{-1}AH$$

sia diagonale.

Osservazione. Indicato con L_A l'endomorfismo di K^n associato ad A in modo canonico, A risulta diagonalizzabile se e solo se lo é L_A

Supponiamo A diagonalizzabile; esiste allora, per definizione, una matrice invertibile H per cui $\Delta = H^{-1}AH$ é diagonale. Indicata con B la base di K^n formata dalle colonne di H , la matrice di L_A , relativa a B , coincide con Δ . L_A pertanto risulta diagonalizzabile. Viceversa, se L_A é diagonalizzabile esiste una base C di K^n per cui la matrice D ad essa relativa é diagonale. poiché d'altra parte $D = K^{-1}AK$, con K matrice di passaggio tra la base C e la base canonica di K^n , si deduce che A é diagonalizzabile.

Abbiamo così dimostrato l'analogia tra la condizione di diagonalizzabilità di un endomorfismo e quella di una matrice. Si ottiene, ad esempio, il seguente corollario alla proposizione 6.3.1

Corollary 6.3.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Sono equivalenti:*

1. A é diagonalizzabile;
2. esiste una base di K^n formata da autovettori di A .

Proponiamo ora delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice o un endomorfismo risultino diagonalizzabili.

Proposition 6.3.1. *Sia L un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n su K . Siano inoltre $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di L , $\mu(\lambda_1), \dots, \mu(\lambda_r)$ le rispettive molteplicità e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$ gli autospazi associati agli autovalori. Sono equivalenti:*

1. L è diagonalizzabile;
2. $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$
3. $\sum_{i=1}^r \mu(\lambda_i) = n$ e $\dim V_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i)$, per ogni $1 \leq i \leq r$.

Corollary 6.3.2. *Sia $A \in M_n(K)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A , $\mu(\lambda_1), \dots, \mu(\lambda_r)$ le rispettive molteplicità e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$ gli autospazi associati agli autovalori. Sono equivalenti:*

1. L è diagonalizzabile;
2. $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$
3. $\sum_{i=1}^r \mu(\lambda_i) = n$ e $\dim V_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i)$, per ogni $1 \leq i \leq r$

Corollary 6.3.3. *Sia $A \in M_n(K)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A , $\mu(\lambda_1), \dots, \mu(\lambda_r)$ le rispettive molteplicità e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_r}$ gli autospazi associati agli autovalori. Sono equivalenti:*

1. A è diagonalizzabile;
2. $K^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}$
3. $\sum_{i=1}^r \mu(\lambda_i) = n$ e $\dim V_{\lambda_i} = \mu(\lambda_i)$, per ogni $1 \leq i \leq r$.

Vediamo come, data una matrice A diagonalizzabile, è possibile costruire una matrice invertibile H che la diagonalizza, cioè tale che $\Delta = H^{-1}AH$ sia diagonale.

Proposition 6.3.2. *Se $A \in M_n(K)$ è diagonalizzabile e se Γ è una base di K^n formata da autovettori di A , una delle matrici che diagonalizzano A si ottiene ponendo lungo le sue colonne i vettori della base Γ .*

6.3.1 Esempi di matrici diagonalizzabili

Esempio 6.3.1. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica é

$$x^2 + x - 30 = 0.$$

Autovalori sono

$$\lambda_1 = -6, \lambda_2 = 5.$$

Autovettori sono

$$r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

La matrice

$$U = [r_1, r_2] = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

soddisfa

$$A = UDU^{-1},$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esempio 6.3.2. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3/2 & 11 \end{pmatrix}$$

Autovalori sono

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 8.$$

Autovettori sono

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, r_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

La matrice

$$U = [r_1, r_2] = \begin{pmatrix} 2/3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa

$$A = UDU^{-1},$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6.4 Matrici simili

Assegnate $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, si dice che B é simile a A , e si scrive $A \sim B$, se esiste una matrice invertibile $H \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$B = H^{-1}AH$$

La relazione sopra si dice trasformazione per similitudine.

Proposition 6.4.1. *La relazione in $M_n(\mathbb{K})$: $R = \{(A; B) | A \sim B\}$ é una relazione di equivalenza su $M_n(\mathbb{K})$.*

Come una qualunque relazione di equivalenza, la relazione di similitudine partiziona lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{K})$ in classi di equivalenza disgiunte. Ogni classe di equivalenza é l'insieme di tutte le matrici in $M_n(\mathbb{K})$ simili a una matrice rappresentante della classe. Tutte le matrici in una classe di equivalenza sono simili, mentre due matrici di due classi differenti non lo sono.

Osservazione. Le matrici di uno stesso endomorfismo relative a due basi diverse sono simili.

Proposition 6.4.2. *Matrici simili si possono interpretare come matrici di uno stesso endomorfismo (relativamente a basi diverse).*

La proposizione 6.4.2 garantisce che due matrici sono simili se e solo se sono matrici di uno stesso endomorfismo.

Osservazione. Due matrici simili sono o entrambe diagonalizzabili o entrambe non diagonalizzabili perché la relazione di similitudine é una relazione di equivalenza.

6.5 La forma canonica di Jordan

Nella sezione precedente si é visto come ad ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale V sia possibile associare delle matrici, una per ogni base di V . Tutte le matrici di un dato endomorfismo risultano simili tra loro e viceversa, matrici simili rappresentano, rispetto a basi diverse, lo stesso endomorfismo. La relazione di similitudine é una relazione di equivalenza; per questo l'insieme delle matrici quadrate di un certo ordine

puó essere ripartito nelle varie classi di similitudine, una per ogni endomorfismo. Sono state enunciate in 2.4 delle condizioni necessarie e sufficienti affinché una classe di similitudine contenga una matrice diagonale. Purtroppo non tutte le classi ammettono tale proprietà; é sempre tuttavia possibile determinare in ciascuna di esse, nel caso in cui il campo degli scalari sia il campo \mathbb{C} dei numeri complessi, una matrice particolare di forma "quasi diagonale", detta matrice di Jordan o forma canonica di Jordan. In questo paragrafo e nei successivi si supporrá allora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. All'interno della sezione mostreremo una tecnica per ottenere la matrice di similitudine, dimostrando poi per induzione l'esistenza della forma canonica.

6.5.1 Matrice in forma canonica di Jordan

Una matrice in forma canonica di Jordan é una matrice diagonale a blocchi, in cui ogni blocco é un blocco di Jordan relativo ad un particolare autovalore della matrice. Nel seguito, la matrice quadrata nulla, ossia la matrice i cui coefficienti sono tutti zero, verrá denotata con il simbolo O . Iniziamo dando la definizione di matrice nilpotente:

Definizione 6.5.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice quadrata di ordine n . Essa si dice nilpotente se esiste un $m > 0$ tale che $A^m = O$. Il piú piccolo intero $m_0 > 0$ per cui $A^{m_0} = O$ viene detto grado di nilpotenza di A .*

Definizione 6.5.2. *Sia m un intero maggiore di 0. La matrice quadrata $m \times m$:*

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

si dice blocco nilpotente elementare.

Proposition 6.5.1. *La matrice N_m é nilpotente di ordine m .*

Ora che si dispone della definizione di matrice nilpotente é possibile definire il blocco elementare di Jordan:

Definizione 6.5.3. Siano r un intero positivo e $\lambda \in \mathbb{C}$. Una matrice quadrata $A \in M_r(\mathbb{C})$ si dice blocco elementare di Jordan di ordine r relativamente a $\lambda \in \mathbb{C}$ se $A = J(\lambda)$ dove la notazione $J(\lambda)$ é definita dalla seguente uguaglianza:

$$J(\lambda) = \lambda I_r + N_r$$

essendo N_r una matrice nilpotente elementare.

Osservazione . Un blocco elementare di Jordan $J(\lambda)$ é una matrice triangolare superiore della forma:

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

e, quindi, il suo polinomio caratteristico é $(\lambda - T)^r$, da cui segue che $\lambda \in \mathbb{C}$ é l'unico autovalore di $J(\lambda)$. La molteplicitá algebrica di λ é r , mentre la molteplicitá geometrica é 1, perché il rango di $J(\lambda) - \lambda I_r$ é $r - 1$. Si osservi inoltre che se $\lambda = 0$ allora:

$$J(0) = N_r$$

Definizione 6.5.4. Una matrice quadrata diagonale a blocchi del tipo:

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{p-1}(\lambda_{p-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_p(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

dove i blocchi $J_i(\lambda_i)$ sono blocchi di Jordan, viene detta matrice di Jordan o matrice in forma canonica di Jordan.

Osservazione 3.2. Nella definizione precedente gli autovalori λ_i e λ_j relativi ai blocchi $J_i(\lambda_i)$ e $J_j(\lambda_j)$ possono anche coincidere. Si può osservare inoltre che, nel caso tutti i blocchi $J_i(\lambda_i)$ siano di ordine uno, la matrice J risulta diagonale.

6.5.2 Autovettori generalizzati

Theorem 6.5.1. *Ogni matrice A é simile ad una matrice J in forma canonica di Jordan.*

La definizione 6.5.4 implica che la matrice J ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{p-1}(\lambda_{p-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_p(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

dove i blocchi $J_i(\lambda_i)$ sono blocchi di Jordan. I blocchi di Jordan $J_i(\lambda_i)$ sono matrici $r_i \times r_i$, dove l'ordine r_i é un intero compreso tra 1 e n tale per cui $\sum_{i=1}^p r_i = n$. Si ottiene una matrice diagonale quando $p = n$ e $r_i = 1, i = 1, \dots, n$, mentre nel caso $p = 1$ e $r_1 = n$ si ottiene un blocco di Jordan di ordine n . Tutte le possibilitá tra questi due casi estremi sono possibili. Abbiamo osservato precedentemente che la matrice in forma (3) ha un solo autovettore, ovvero $\mathbf{1}$, il vettore con 1 nella prima posizione e 0 nelle altre. Quindi, i vettori che hanno 1 nelle posizioni $1, r_1 + 1, r_1 + r_2 + 1, r_1 + \dots + r_{p-1} + 1$ rispettivamente e zero altrove sono autovettori linearmente indipendenti di J . Come conseguenza:

Proposition 6.5.2. *La molteplicitá geometrica di un autovalore λ di J é uguale al numero di blocchi di Jordan associati a λ .*

Sia ora A una matrice quadrata di ordine r simile ad una matrice J in forma canonica di Jordan e sia P una matrice invertibile tale che $P^{-1}AP = J$. Allora

$$AP = PJ$$

Analizzando le colonne di P , si vede che quelle nelle posizioni $1, r_1 + 1, r_1 + r_2 + 1, r_1 + \dots + r_{p-1} + 1$ sono autovettori di A , linearmente indipendenti poiche P é non singolare. I vettori (linearmente indipendenti) delle altre colonne di P sono chiamati autovettori generalizzati di A . Cerchiamo di entrare piú in dettaglio per analizzarne le proprietá. Confrontando le prime r_1 colonne del primo e del secondo membro di (5), relative al

primo blocco di Jordan $J_1(\lambda_1)$, e ricordando le proprietà del prodotto tra matrici si ottiene:

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_i = \lambda_1\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, r_1. \quad (6.5.1)$$

I vettori $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r_1}$ formano una catena di Jordan di lunghezza r_1 . Ogni \mathbf{p}_i $i \geq 2$, viene detto autovettore generalizzato di ordine (o grado) i e \mathbf{p}_1 viene detto direttore della catena.

Osservazione. Si nota da (6.5.1) che gli autovettori generalizzati $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{r_1}$ non soddisfano l'equazione $A\mathbf{p} = \lambda_1\mathbf{p}$, ma qualcosa di molto simile ad essa. Ora possiamo riscrivere (6.5.1) nella forma

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad (A - \lambda_1 I)\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, r_1 \quad (6.5.2)$$

la quale mostra chiaramente che $A - \lambda_1 I$ mappa \mathbf{p}_i nel successivo elemento \mathbf{p}_{i-1} della catena. In particolare l'elemento direttore \mathbf{p}_{r_1} è in grado di generare l'intera catena attraverso ripetute moltiplicazioni per $A - \lambda_1 I$. Lo stesso ragionamento vale per gli altri autovalori di A :

Proposition 6.5.3. *Se A è una matrice $n \times n$ tale per cui $A = PJP^{-1}$, dove J è in forma di Jordan, allora le colonne di P formano p catene di Jordan*

$$\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r_1}\}, \{\mathbf{p}_{r_1+1}, \dots, \mathbf{p}_{r_1+r_2}\}, \dots, \{\mathbf{p}_{n-r_p+1}, \dots, \mathbf{p}_n\} \quad (6.5.3)$$

relative rispettivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$

La relazione (6.5.2) implica poi che

$$(A - \lambda_1 I)^i \mathbf{p}_j = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, r_1, j = 1, \dots, i$$

Nel caso λ_1 sia distinto dagli altri autovalori $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, le formule (6.5.2) possono essere usate, almeno in via teorica per realizzare la prima catena di Jordan relativa all'autovalore λ_1 . Partendo dall'autovettore \mathbf{p}_1 infatti possiamo costruire un autovettore generalizzato \mathbf{p}_2 in grado di verificare l'uguaglianza $(A - \lambda_1 I)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$ e così via. In molti casi particolari questa strada può essere seguita, anche se il calcolo risulta di regola complicato. In generale però questa tecnica non produce alcun risultato. Volendo invece seguire una strada che consenta, qualunque sia la

matrice, di costruire la catena $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r_1}\}$, basta considerare i sottospazi W_i di \mathbb{C}^n definiti da:

$$W_i = \text{Null}(A - \lambda_i I)^i$$

ovvero dalle soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda_i I)^i X = O$. Risulta: $W_1 = \langle \mathbf{p}_1 \rangle$, $W_2 = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle$, \dots , $W_{r_1} = \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r_1} \rangle$. Ovviamente $W_i \subset W_{i+1}$ dove l'inclusione è stretta perché $\mathbf{p}_i \notin W_{i-1}$.

$$W_i \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_{r_1}$$

Basta allora considerare per primo l'autovettore generalizzato $\mathbf{p}_{r_1} \in W_{r_1}$ non appartenente all'autospazio W_{r_1-1} , per poi determinare via via il resto della catena $\mathbf{p}_{r_1-1}, \dots, \mathbf{p}_1$. Il vettore \mathbf{p}_1 , determinato nell'ultimo passaggio, risulta essere un autovettore relativo a λ_1 . Anche nel caso in cui λ_1 coincida con uno o più degli altri autovalori, è lo studio dei sottospazi W_i che conduce alla determinazione delle varie catene di autovettori generalizzati relativi a λ_1 . In questo caso però, più difficile del precedente, bisogna tener conto che la differenza $\dim W_i - \dim W_{i-1}$ può essere maggiore di uno.

Esempio 6.5.1. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -9 & -9 \end{pmatrix}$$

Si vede che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -12.$$

Quindi la matrice di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Un autovettore si trova subito

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Troviamo autovettore r_2 generalizzato, cioè

$$r_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

deve soddisfare l'equazione

$$(A - \lambda_1)r_2 = r_1.$$

Così troviamo il sistema

$$\begin{aligned} -3\alpha + \beta &= 1, \\ -9\alpha + 3\beta &= 3 \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Una soluzione del sistema è

$$\alpha = 0, \beta = 1.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa

$$A = PJP^{-1}$$

Esempio 6.5.2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -9/2 & 11 \end{pmatrix}$$

Si vede che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 8.$$

Quindi la matrice di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Un autovettore si trova subito

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo autovettore r_2 generalizzato, cioè

$$r_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

deve soddisfare l'equazione

$$(A - \lambda_1)r_2 = r_1.$$

Così troviamo il sistema

$$\begin{aligned} -3\alpha + 2\beta &= \frac{2}{3}, \\ -\frac{9}{2}\alpha + 3\beta &= 1 \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

Una soluzione del sistema è

$$\alpha = 2, \beta = \frac{10}{3}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 2 \\ 1 & 10/3 \end{pmatrix}$$

soddisfa

$$A = PJP^{-1}$$

Esempio 6.5.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

Si vede che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -8.$$

Quindi la matrice di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \tag{6.5.6}$$

o

$$J = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}. \tag{6.5.7}$$

Ci sono 2 autovettori

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$r_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo (6.5.6),

Troviamo autovette r_2 generalizzato, cioè

$$r_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

deve soddisfare l'equazione

$$(A - \lambda_1)r_2 = r_1.$$

Così troviamo il sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \gamma &= 1, \\ 0 &= 0 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 1 \end{aligned} \tag{6.5.8}$$

Una soluzione del sistema è

$$\alpha = 1, \beta = \gamma = 0.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfa

$$A = PJP^{-1}$$

6.6 Esponente di una matrice

Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi. La matrice esponenziale di A , indicata con e^A , è una matrice $n \times n$ definita con lo sviluppo in serie di potenze

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (6.6.9)$$

Siano A e B due matrici complesse di dimensione $n \times n$ e siano a e b due numeri complessi. Si indica la matrice identità con I e la matrice nulla con 0 . La matrice esponenziale soddisfa le seguenti proprietà:

$$e^0 = I.$$

$$e^{aA} e^{bA} = e^{(a+b)A}.$$

$$e^A e^{-A} = I.$$

Lemma 6.6.1. *Se $AB = BA$, allora*

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

Lemma 6.6.2. *Se Y è invertibile allora*

$$e^{YAY^{-1}} = Y e^A Y^{-1}.$$

Lemma 6.6.3.

$$e^{A^*} = (e^A)^*,$$

dove A^* indica la matrice trasposta coniugata di A .

6.7 Calcolo dell'esponente e^A con A diagonalizzabile

Per il calcolo della matrice esponenziale e^A non viene utilizzata la serie di potenze dato che è costituita da una sommatoria di infiniti addendi. Utilizzando gli autovettori si ricava una serie con un numero finito di termini.

Se la matrice A é diagonalizzabile significa che ha n autovettori linearmente indipendenti

$$\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n.$$

Si puo' quindi scrivere

$$AT = T\Lambda,$$

dove

$$T = [\vec{t}_1 \quad \dots \quad \vec{t}_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Introducendo la matrice S , inversa di T , si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} SAT &= \Lambda \\ A &= T\Lambda S \\ SA &= \Lambda S \end{aligned}$$

Dalla seconda relazione si ricava

$$A^k = (T\Lambda S)^k = T \cdot \Lambda \cdot S \cdot T \cdot \Lambda \cdot S \cdots = T\Lambda^k S$$

Quindi

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = T \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right] S = Te^{\Lambda}S$$

Si calcola e^{Λ}

$$e^{\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

6.8 Calcolo dell'esponente e^A quando A non é diagonalizzabile

Richiami sulla forma normale di Jordan

Se A non é diagonalizzabile si ricorre alla forma di Jordan.

In questo caso si ha

$$A = TJS,$$

con J matrice diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

dove il k -esimo blocco e^J della forma

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Le matrici J_k vengono detti blocchi di Jordan.

Utilizzando il procedimento seguito nel caso di A diagonalizzabile si ottiene

$$e^A = Te^J S, \quad T = S^{-1}.$$

dove

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{J_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_k} \end{bmatrix}$$

Esempi ed esercizi sulla forma normale di Jordan

Esempio 6.8.1. La matrice A é definita come segue

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.8.10)$$

L'equazione caratteristica é

$$\det(A - xI) = 2 - 7x + 9x^2 - 5x^3 + x^4 = (x - 2)(x - 1)^3$$

con radici $(2, 1)$ di molteplicitá algebrica 1 e 3. Abbiamo

$$\text{Ker}(A - 1I) = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Ker}(A - 1I)^2 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Ker}(A - 1I)^3 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dobbiamo trovare un vettore

$$f_3 = \mu e_3 \in \text{Ker}(A - 1I)^3 \ominus \text{Ker}(A - 1I)^2,$$

tale che

$$(A - 1.I)^2 f_3 = e_1.$$

Abbiamo

$$\mu(A - 1.I)^2 e_3 = -\mu e_1$$

così $\mu = -1$ e possiamo prendere

$$f_1 = e_1 = (A - 1I)^2(-e_3), f_2 = (A - 1I)(-e_3), f_3 = -e_3.$$

Ovviamente

$$f_1 = e_1 = (A - 1I)^2(-e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = (A - 1I)(-e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = (-e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é una base di $\text{Ker}(A - 1I)^3$. Abbiamo inoltre

$$\text{Ker}(A - 2I) = \left\{ e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice

$$S = [f_1, f_2, f_3, e_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la sua inversa

$$T = S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trasformano A nella forma di Jordan, cioè

$$S^{-1}AS = TAT = J,$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 6.8.1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan J e una matrice S invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = TAS = J,$$

.

Risposta.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 6.8.2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 & 9/2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -9 & -4 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 9/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & -9/2 & 1 & 1 \\ -7/2 & -11/2 & 27/2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan J e una matrice S invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

Risposta. L'equazione caratteristica é

$$243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5 = 0,$$

la fattorizzazione

$$243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5 = -(x-3)^5$$

otteniamo unico autovalore $x = 3$ con molteplicità algebrica 5. Il polinomio minimo é $(x-3)^3$ Per ognuno dei vettori

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^t, e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^t, e_3 = (0, 0, 1, 0, 0),$$

$$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0), e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

calcoliamo le orbite, ci servono un orbita di dimensione 3 e una di dimensione 2. Abbiamo

L'orbita di e_1 e

$$e_2, f_2(A-3I)e_2 = (-1/2, 3, -1/2, 5/2, -11/2)^t,$$

$$f_3 = (A-3I)^2 e_3 = (3/2, -3, 1/2, -3/2, 9/2)^t$$

e

$$e_1, f_1 = (A-3I)e_1 = (-1/2, 2, -1/2, 3/2, -7/2)^t$$

Così

$$T = [f_1, e_1, f_3, f_2, e_2]$$

e la matrice che trasforma A nella forma di Jordan. □

Problema 6.8.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan J e una matrice S invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

Risposta.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 6.8.4. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 7/2 & 1 & 9/2 & 3 \\ 3/2 & 5 & 9/2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 9/2 & 2 \\ -(3/2) & -2 & -(9/2) & -2 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan J e una matrice S invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = TAS = J,$$

.

Risposta.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} -(1/3) & -1 & 0 & 2/3 \\ -1 & -1 & 0 & -(2/3) \\ -(1/3) & -(1/3) & -(2/9) & 2/27 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

6.9 Calcolo di e^J con J blocco di Jordan

Sia

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \quad (6.9.11)$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$. Ovviamente si può scrivere

$$J = \lambda I + N,$$

dove

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^n = 0.$$

Si verifica facilmente che N^k si calcola spostando in alto e a destra la diagonale formata dagli 1. Le due matrici λI e N commutano e quindi Lemma 6.6.1 implica

$$e^{\lambda I + N} = e^\lambda e^N = \sum_{k=0}^{n-1} e^\lambda \frac{N^k}{k!}.$$

Abbiamo quindi

$$e^J = \begin{bmatrix} e^\lambda & e^\lambda/1! & e^\lambda/2! & \dots & e^\lambda/(n-1)! \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda/1! & \dots & e^\lambda/(n-2)! \\ 0 & 0 & e^\lambda & \dots & e^\lambda/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^\lambda \end{bmatrix}.$$

e

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t/1! & e^{\lambda t}t^2/2! & \dots & e^{\lambda t}t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t/1! & \dots & e^{\lambda t}t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \dots & e^{\lambda t}t^{n-3}/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \quad (6.9.12)$$

Esempio 6.9.1. Sia $n = 3$ e

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.10 Esercizi: esponenziale di una matrice

Problema 6.10.1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 12/5 & 4/5 \\ -1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \quad (6.10.13)$$

Calcolare

$$e^A, e^{tA}, e^{tA^2}.$$

Idea della soluzione. L'equazione caratteristica e

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \frac{12}{5}\right)\left(\lambda - \frac{8}{5}\right) + \frac{4}{25} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

e quindi abbiamo un autovalore di molteplicità (algebraica) 2. Abbiamo autovettore proprio

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_1 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

e un autovettore generalizzato

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t_1.$$

Sia

$$T = [t_1 \ t_2], S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

e

$$A = TJS, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$e^A = Te^J S, \quad e^J = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = Te^{Jt} S, \quad e^{Jt} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando il fatto che

$$J^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si può ottenere

$$e^{A^2 t} = Te^{J^2 t} S, \quad e^{J^2 t} = e^{8t} \begin{pmatrix} 1 & 4t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 6.10.2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 17/5 & 4/5 \\ -1/5 & 13/5 \end{pmatrix} \quad (6.10.14)$$

Calcolare

$$e^A, e^{tA}, e^{tA^2}.$$

Problema 6.10.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 13/5 & -4/5 \\ -4/5 & 7/5 \end{pmatrix} \quad (6.10.15)$$

Calcolare

$$e^A, e^{tA}, e^{tA^2}.$$

Problema 6.10.4. Let $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 13 & 9 & -3 \end{bmatrix}$

(a) Evaluate e^{tA}

(b) Find the general solutions of $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$

(c) Solve the initial value problem $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Solution: The given matrix A is diagonalized: $A = PDP^{-1}$ with

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Part (a): We have

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5e^t - e^{2t} - 3e^{-t} & 3e^t - e^{2t} - 2e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ -5e^t + 2e^{2t} + 3e^{-t} & -3e^t + 2e^{2t} + 2e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ 5e^t + e^{2t} - 6e^{-t} & 3e^t + e^{2t} - 4e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Part (b): The general solutions to the given system are

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

where C_1, C_2, C_3 are free parameters. Part (c): The solution to the initial value problem is

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11e^t + e^{2t} + 8e^{-t} \\ 11e^t - 2e^{2t} - 8e^{-t} \\ -11e^t - e^{2t} + 16e^{-t} \end{bmatrix}$$

Problema 6.10.5. Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Solution 1: (Use Diagonalization) Solving $\det(A - \lambda I) = 0$, we obtain the eigenvalues of A : $\lambda_1 = 7 + 4i, \lambda_2 = 7 - 4i$ Eigenvectors for $\lambda_1 = 7 + 4i$ are obtained by solving $[A - (7 + 4i)I]\vec{\mathbf{v}} = 0$

$$\vec{\mathbf{v}} = v_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.10.16)$$

Eigenvectors for $\lambda_2 = 7 - 4i$ are complex conjugate of the vectors in (6.10.16). The matrix A is now diagonalized: $A = PDP^{-1}$ with

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + i & \frac{1}{2} - i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 + 4i & 0 \\ 0 & 7 - 4i \end{bmatrix}$$

We have $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + i & \frac{1}{2} - i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(7+4i)t} & 0 \\ 0 & e^{(7-4i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)e^{(7+4i)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)e^{(7-4i)t} & \frac{5}{8}ie^{(7+4i)t} - \frac{5}{8}ie^{(7-4i)t} \\ -\frac{1}{2}ie^{(7+4i)t} + \frac{1}{2}ie^{(7-4i)t} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)e^{(7+4i)t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)e^{(7-4i)t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Problema 6.10.6. Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Answer. } e^{tA} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{3}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}e^{2t} \\ \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}e^{2t} \end{bmatrix}$$

Problema 6.10.7. (a) Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

(b) Solve $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

Answer. (a) $e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} - 6te^{2t} & 12te^{2t} \\ -3te^{2t} & e^{2t} + 6te^{2t} \end{bmatrix}$

(b) $\vec{x}(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 42te^{2t} \\ -e^{2t} - 21te^{2t} \end{bmatrix}$

Problema 6.10.8. Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Answer. $e^{tA} = \begin{bmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -5e^t + 6e^{2t} - e^{3t} & 3e^t - 4e^{2t} + e^{3t} \\ 3e^t - 3e^{2t} & -5e^t + 9e^{2t} - 3e^{3t} & 3e^t - 6e^{2t} + 3e^{3t} \\ 3e^t - 3e^{2t} & -5e^t + 9e^{2t} - 4e^{3t} & 3e^t - 6e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}$

Problema 6.10.9. Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -12 & -9 & 4 \\ -12 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

Answer. $e^{tA} = \begin{bmatrix} 3e^t - 2e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} & -4e^t + 5e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} & -4e^t + 4e^{-t} & 2e^t - e^{-t} \end{bmatrix}$

Problema 6.10.10. (a) Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & -3 \\ -16 & -12 & 5 \\ -8 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Solve $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Answer. (a) $e^{tA} = \begin{bmatrix} 3e^t - 2e^{-t} + 4te^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} + 3te^{-t} & -e^t + e^{-t} - te^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} - 4te^{-t} & -4e^t + 5e^{-t} - 3te^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} + te^{-t} \\ -6e^t + 6e^{-t} + 4te^{-t} & -4e^t + 4e^{-t} + 3te^{-t} & 2e^t - e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$

Problema 6.10.11. Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Answer. $e^{tA} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -2 \sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t - \sin 2t \end{bmatrix}$

or, equivalently,

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-i)e^{(3+2i)t} + (1+i)e^{(3-2i)t} & 2ie^{(3+2i)t} - 2ie^{(3-2i)t} \\ -ie^{(3+2i)t} + ie^{(3-2i)t} & (1+i)e^{(3+2i)t} + (1-i)e^{(3-2i)t} \end{bmatrix}$$

Problema 6.10.12. Evaluate e^{tA} for $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Answer.

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^{-3t} + 3 \cos t + \sin t & -2e^{-3t} + 2 \cos t - \sin t & e^{-3t} - \cos t + 3 \sin t \\ -4e^{-3t} + 4 \cos t - 2 \sin t & 4e^{-3t} + \cos t - 3 \sin t & -2e^{-3t} + 2 \cos t + 4 \sin t \\ -2e^{-3t} + 2 \cos t - 6 \sin t & 2e^{-3t} - 2 \cos t - 4 \sin t & -e^{-3t} + 6 \cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

□

Chapter 7

Probabilità e statistica

7.1 Raccolta dei dati.

La statistica é normalmente interessata ad ottenere informazioni su un insieme completo di oggetti che viene detto POPOLAZIONE. Esso é spesso troppo grande perché sia possibile un esame esaustivo: esempi comuni sono i residenti di una certa regione, i televisori prodotti da una azienda, oppure i nuclei familiari con un certo livello di reddito. In tutti questi casi, si cerca di imparare qualcosa sulle popolazioni scegliendo e poi esaminando dei sottogruppi di loro elementi. Un sottogruppo della popolazione é detto CAMPIONE.

Siccome il campione deve contenere informazioni sulla popolazione complessiva, deve essere (in qualche senso) rappresentativo di quella popolazione. Se ad esempio fossimo interessati alla distribuzione delle età degli abitanti di un certo comune, e, intervistati i primi 100 che entrano in una biblioteca, trovassimo una media di 46.2 anni, saremmo giustificati a concludere che questa é approssimativamente l'età media dell'intera popolazione? Probabilmente no; infatti si può obiettare che il campione prescelto non é rappresentativo della popolazione in esame, essendo gli utenti della biblioteca più facilmente studenti ed anziani che non persone in età lavorativa.

A volte, come nell'esempio della biblioteca, ci viene fornito un campione, e sta a noi stabilire se sia rappresentativo o meno dell'intera popolazione. Si tenga presente che in generale, solo campioni scelti comple-

tamente a caso sono certamente rappresentativi; infatti ogni criterio di selezione non casuale finisce con il produrre campioni che sono automaticamente sbilanciati verso valori particolari.

Perciò, anche se sembra paradossale, abbiamo le migliori possibilità di ottenere un campione rappresentativo quando scegliamo i suoi membri in modo completamente casuale, senza alcuna considerazione a priori sugli elementi da prendere. In particolare, non è opportuno costruire deliberatamente un campione che contenga, ad esempio, la stessa percentuale di femmine e la stessa percentuale di occupati per ciascun impiego.

Alcuni esempi:

Tabella 1. . . Numero totale di decessi in Inghilterra

Anno	Decessi	Di cui per la peste
1592	25886	11503
1593	17844	10662
1603	37294	30561
1625	51758	35417
1636	23359	10400

Tabella 2 Stipendi annuali iniziali. Dati in migliaia di dollari.

Stipendio iniziale	Frequenza
27	4
28	1
29	3
30	5
31	8
32	10
34	5
36	2
37	3
40	1

7.1.1 Media, mediana

Supponiamo di avere un insieme x_1, x_2, \dots, x_n di n dati (o come anche si dice, un campione di ampiezza o numerosità pari a n). La media cam-

pionaria é la media aritmetica di questi valori.

Definition 7.1.1. *Si dice media campionaria e si denota con \bar{x} , la quantità*

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Il calcolo manuale di questa grandezza puó essere notevolmente semplificato se si nota che, prese comunque due costanti a e b , se si considera il nuovo insieme di dati

$$y_i := ax_i + b, \quad i = 1, \dots, n$$

allora la media campionaria di y_1, y_2, \dots, y_n é legata a quella dei dati iniziali dalla stessa relazione lineare:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ax_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b = a\bar{x} + b$$

Una seconda statistica che indica il centro di un insieme di dati é la mediana campionaria; sinteticamente, si tratta del valore centrale una volta che i dati siano messi in ordine crescente.

Definition 7.1.2. *Assegnato un insieme di dati di ampiezza n , lo si ordina dal minore al maggiore. Se n é dispari, si dice mediana campionaria il valore del dato in posizione $(n + 1)/2$; se n é pari invece, é la media aritmetica tra i valori dei dati che occupano le posizioni $n/2$ e $n/2 + 1$*

Cosí la mediana di un campione di tre dati é quello che ha valore intermedio, mentre per un insieme di quattro dati é la media aritmetica tra i due valori intermedi.

Esempio 7.1.1. *Cerchiamo la mediana campionaria dei dati forniti della tabella*

<i>Etá</i>	15	16	17	18	19	20
<i>Frequenza</i>	2	5	11	9	14	13

Poiché i dati sono 54, un numero pari, si prendono i due che occupano la posizione 27 e la 28 in ordine crescente, in questo caso un 18 e un 19. La mediana campionaria é la loro media aritmetica, ovvero 18.5.

7.1.2 Varianza e deviazione standard

Le statistiche presentate nella sezione precedente forniscono sotto diversi punti di vista i valori centrali della distribuzione dei dati. Un'altra questione di chiaro interesse é quanto i dati siano concentrati o viceversa dispersi attorno a tali valori tipici. Una strategia impiegabile a questo scopo potrebbe essere allora considerare le distanze dei dati dalla media campionaria, elevarle al quadrato e farne la media aritmetica. In effetti questa é quasi la definizione di varianza campionaria, che però, per ragioni tecniche, si ottiene dividendo per $n - 1$ anziché per n .

Definition 7.1.3. *Assegnato un insieme di dati x_1, x_2, \dots, x_n , si dice varianza campionaria e si denota con s^2 la quantità*

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

La seguente identità algebrica é usata spesso per velocizzare il calcolo manuale della varianza campionaria.

Proposition 7.1.1. *Sia dato un insieme di dati x_1, x_2, \dots, x_n , e sia \bar{x} la sua media campionaria, allora*

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$$

La radice quadrata della varianza é detta deviazione standard.

Definition 7.1.4. *Assegnato un insieme di dati x_1, x_2, \dots, x_n , si dice deviazione standard campionaria e si denota con s la quantità*

$$s := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Questa grandezza ha le stesse unità di misura dei dati sperimentali.

7.1.3 Disequazione di Chebyshev

Proposition 7.1.2. (*Disuguaglianza di Chebyshev*). Sia assegnato un insieme di dati x_1, x_2, \dots, x_n , con media campionaria \bar{x} e deviazione standard campionaria $s > 0$. Denotiamo con S_k l'insieme degli indici corrispondenti a dati compresi tra $\bar{x} - ks$ e $\bar{x} + ks$

$$S_k := \{i, 1 \leq i \leq n; |x_i - \bar{x}| < ks\}$$

e sia $\#S_k$ il numero di elementi o cardinalità dell'insieme S_k . Allora, per ogni $k \geq 1$

$$\frac{\#S_k}{n} \geq 1 - \frac{n-1}{nk^2} > 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (n-1)s^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i \in S_k} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i \notin S_k} (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri per nk^2s^2 si trova che

$$\frac{n-1}{nk^2} \geq 1 - \frac{\#S_k}{n}$$

da cui segue l'enunciato. □

7.2 Idea di probabilità

Consider an experiment that can produce a number of results. The collection of all possible results is called the sample space of the experiment. The power set of the sample space is formed by considering all different collections of possible results. For example, rolling a die can produce six possible results. One collection of possible results gives an odd number on the die. Thus, the subset $\{1,3,5\}$ is an element of the power set of the sample space of dice rolls. These collections are called "events". In this case, $\{1,3,5\}$ is the event that the die falls on some odd number. If the

results that actually occur fall in a given event, the event is said to have occurred.

A probability is a way of assigning every event a value between zero and one, with the requirement that the event made up of all possible results (in our example, the event $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) is assigned a value of one. To qualify as a probability, the assignment of values must satisfy the requirement that if you look at a collection of mutually exclusive events (events with no common results, e.g., the events $\{1, 6\}$, $\{3\}$, and $\{2, 4\}$ are all mutually exclusive), the probability that at least one of the events will occur is given by the sum of the probabilities of all the individual events.

The probability of an event A is written as $P(A)$. This mathematical definition of probability can extend to infinite sample spaces, and even uncountable sample spaces, using the concept of a measure.

The opposite or complement of an event A is the event \bar{A} (that is, the event of A not occurring), ; its probability is given by

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

If two events A and B occur on a single performance of an experiment, this is called the intersection or joint probability of A and B , denoted as $P(A \cap B)$.

7.2.1 Probabilita' condizionale, indipendenza di eventi, formula di Bayes

If two events, A and B are independent then the joint probability is

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

for example, if two coins are flipped the chance of both being heads is

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Conditional probability is the probability of some event A , given the occurrence of some other event B . Conditional probability is written

$$P(A | B)$$

and is read "the probability of A, given B". It is defined by

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

For example, in a bag of 2 red balls and 2 blue balls (4 balls in total), the probability of taking a red ball is $1/2$; however, when taking a second ball, the probability of it being either a red ball or a blue ball depends on the ball previously taken, such as, if a red ball was taken, the probability of picking a red ball again would be $1/3$ since only 1 red and 2 blue balls would have been remaining.

Bayes theorem is stated mathematically as the following equation:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

7.3 Variabili aleatorie

A random variable is a measurable function $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ from a set of possible outcomes Ω to \mathbb{R} . The technical axiomatic definition requires that we start with a probability triple (Ω, \mathcal{F}, P) . A random variable is often denoted by capital roman letters such as X .

The probability that X takes on a value in a measurable set $S \subseteq \mathbb{R}$ is written as

$$P(X \in S) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in S\}).$$

- 7.3.1 Densita'. Principali densita': Bernulliana, binomiale, ipergeometrica, di Poisson.**
- 7.4 Definizione e calcolo di speranza e varianza.**
- 7.5 Densita' esponenziale. Il processo di Poisson. Densita Gaussiana, del chi quadro.**
- 7.6 Idea della Legge dei Grandi Numeri, del Teorema Limite Centrale**
- 7.7 Test. Generalita' e principali test gaussiani.**

Bibliography

- [1] E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica II, *Liguori Editore*, 1986.
- [2] P.Acquistapace, Lezioni di Analisi Matematica 2, <http://www.dm.unipi.it/acquistp/>
- [3] J.P.Cecconi, G.Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di piú variabili, *Liguori Editore*, 1986
- [4] J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, 2 volume, Funzioni di piú variabili, *Liguori Editore*, 1986
- [5] N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, *Liguori Editore*, 1996
- [6] M. Giaquinta, G. Modica, Mathematical Analysis An Introduction to Functions of Several Variables *Birkhäuser*, 2009.
- [7] E.Guisti, Analisi Matematica 2, *Bollati Boringhieri*, 1989.
- [8] E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo, *Bollati Boringhieri*, 1994.
- [9] A. W. Knapp, Basic Real Analysis, Along with a companion volume Advanced Real Analysis, *Birkhäuser*, 2005
- [10] P. Ney de Souza, J.-N. Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Third Edition, *Springer*, 2004

- [11] G.Polya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis II: Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry (Classics in Mathematics), *Springer*, 2004.
- [12] W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, *McGraw Hill Libri Italia SRL*, 1991.
- [13] E.Stein, R.Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, III Real Analysis:, Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces, *Princeton Univ. Press*, 2005