

# Analisi Matematica 2: appunti, esercizi

VLADIMIR GEORGIEV

Dipartimento di Matematica "L.Tonelli",  
Università di Pisa,  
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127, Pisa, Italy.  
E-mail: [georgiev@dm.unipi.it](mailto:georgiev@dm.unipi.it)

# Contents

<b>I</b>	<b>Prima Parte: Integrali curvilinei</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Integrali curvilinei</b>	<b>11</b>
1.1	Curve . . . . .	11
1.2	Lunghezza delle curva. . . . .	12
1.3	Integrale curvilineo di I specie . . . . .	13
1.4	Esercizi sulla lunghezza delle curve . . . . .	14
1.5	Esercizi su Integrali curvilinei . . . . .	19
1.5.1	Momenti de inerzia: . . . . .	24
<b>II</b>	<b>Seconda parte: Calcolo Differenziale</b>	<b>27</b>
<b>2</b>	<b>Norme e disequazioni in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>29</b>
2.1	Norme in $\mathbb{R}^n$ , equivalenza delle norme . . . . .	29
2.1.1	Aperti in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Distanza in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>33</b>
3.1	Definizione della distanza in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	33
3.2	Funzioni contunui in $R^n$ . . . . .	34
3.3	Teorema di Weierstrass . . . . .	34
3.4	Il teorema di Heine - Cantor . . . . .	35
3.5	Contrazioni e teorema del punto fisso. . . . .	37
3.6	Esercizi sulle contrazioni e punti fissi . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Teoremi sulla continuit� e compattezza in <math>\mathbb{R}^n</math>.</b>	<b>41</b>
4.1	Teorema di Bolzano - Weierstass . . . . .	41
4.2	Equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	42

<b>5</b>	<b>Limiti delle funzioni di più variabili</b>	<b>45</b>
5.1	Esercizi sui limiti delle funzioni di più variabili . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Continuità delle funzioni di più variabili</b>	<b>51</b>
6.1	Simboli di Landau in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	51
6.1.1	Richiami sulla continuità, omogeneità . . . . .	54
6.2	Esercizi sulla omogeneità e continuità . . . . .	58
6.3	Altri esercizi sulla continuità delle funzioni di più variabili	61
<b>7</b>	<b>Differenziabilità delle funzioni di più variabili</b>	<b>71</b>
7.1	Differenziabilità e derivabilità della funzioni di più variabili	71
7.2	Proprietà delle funzioni differenziabili . . . . .	76
7.2.1	Funzioni Lipschiziani e Hölderiani . . . . .	78
7.3	Funzioni omogenei . . . . .	83
7.4	Interpretazione geometrica del differenziale . . . . .	84
7.5	Teorema di Lagrange per funzioni vettoriali . . . . .	87
7.5.1	Il teorema di Lagrange non è vero nel caso di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . . . . .	87
7.5.2	Il teorema di Lagrange per funzioni vettoriali . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Il Teorema di Schwartz</b>	<b>89</b>
8.1	Il Teorema di Schwartz (caso di due variabili) . . . . .	89
8.2	Disposizioni con ripetizione . . . . .	90
8.3	Esercizi su disposizioni con ripetizione . . . . .	92
8.4	Il teorema di Schwartz nel caso di $n$ variabili e derivate di ordine $k$ . . . . .	94
<b>9</b>	<b>Esercizi sulla differenziabilità, derivabilità e le derivate della funzione composta</b>	<b>97</b>
9.1	Esercizi sulla differenziabilità e derivabilità . . . . .	97
9.2	Controesempi per gara a squadre: squadra Cortopassi . . . . .	107
9.2.1	Continuità . . . . .	107
9.2.2	Derivate Parziali . . . . .	112
9.2.3	Derivate direzionali . . . . .	114
9.2.4	Formula del gradiente . . . . .	116
9.2.5	Qualche esempio . . . . .	117
9.2.6	Caso 5 . . . . .	119

9.2.7 caso 6 . . . . .	120
9.3 Derivate delle funzioni composte . . . . .	120
9.4 Derivate parziali di ordine superiore . . . . .	123
<b>10 Formula di Taylor</b>	<b>127</b>
10.1 Generalizzazione del binomio di Newton in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	127
10.1.1 Binomio di Newton nel campo di quaternioni . . . . .	129
10.2 Formula di Taylor per funzioni di piú variabili . . . . .	130
10.3 Esempio: Formula di Taylor di ordine 1, funzione di due variabili . . . . .	131
10.4 Esempio: Formula di Taylor di ordine 2, funzione di due variabili . . . . .	132
10.5 Esempio: Formula di Taylor di ordine 3, funzione di due variabili . . . . .	132
<b>11 Massimi e minimi delle funzioni di piú variabili</b>	<b>133</b>
11.1 Massimi e minimi relativi, massimi e minimi relativi stretti	133
11.2 Condizioni sufficienti . . . . .	134
11.2.1 Condizioni sufficienti nel piano, il caso determinante NON zero . . . . .	136
11.2.2 Condizioni sufficienti nel piano quando il determinante é zero . . . . .	136
11.2.3 Condizioni sufficienti nello spazio . . . . .	145
11.3 Esercizi su massimi e minimi . . . . .	145
11.4 Molteplicatori di Lagrange . . . . .	150
11.5 Teorema di Dini . . . . .	150
11.6 Esercizi su massimi, minimi vincolati . . . . .	152
<b>12 Funzioni convessi in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>159</b>
12.1 Insiemi convessi in spazi vettoriali . . . . .	159
12.2 Funzioni convesse in domini convessi . . . . .	160
12.3 Esercizi sulle funzioni convesse . . . . .	165
<b>13 I teoremi della funzione inversa e della funzione implicita</b>	<b>169</b>
13.1 La funzione inversa . . . . .	169
13.2 Il teorema della funzione implicita . . . . .	176

13.3	Esercizi sulla funzione inversa e la funzione implicita . . .	179
------	---	-----

### **III Seconda Parte: Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie** **183**

<b>14</b>	<b>Richiami sulle Equazioni Ordinarie del corso di Analisi Matematica 1</b>	<b>185</b>
14.1	Equazioni ordinarie lineari . . . . .	186
14.2	Esercizi sulle equazioni ordinarie lineari del primo ordine	187
14.3	Equazioni particolari . . . . .	188
14.4	Un'altro tipo di equazioni omogenee . . . . .	189
14.5	Equazioni ordinarie di secondo ordine . . . . .	189
<b>15</b>	<b>Equazioni ordinarie di ordine <math>n \geq 1</math>.</b>	<b>191</b>
15.1	Sistema di equazioni di ordine 1 . . . . .	192
15.2	Riduzione a sistema di equazioni di ordine 1 . . . . .	193
15.2.1	Teorema di esistenza e prolungamento della soluzioni	194
15.3	Principio di confronto . . . . .	195
15.3.1	Applicazione del principio del confronto, lemma di Gronwall . . . . .	197
15.3.2	Altri applicazioni del principio del confronto . . .	198
15.4	Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti . . . . .	199
15.5	Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie .	200
15.6	Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti . .	204
<b>16</b>	<b>Teorema di esistenza e unicit� per un problema di Cauchy</b>	<b>205</b>
16.1	Dimostrazione del Teorema di Cauchy . . . . .	206
16.2	Varianti del lemma di Gronwall e unicit� della soluzione. Esercizi. . . . .	209
16.3	Dipendenza continua dei dati iniziali . . . . .	212
16.4	Principio di prolungamento. . . . .	217
16.5	Risoluzione globale di un problema di Cauchy . . . . .	222
16.6	Esercizi sul prolungamento della soluzioni . . . . .	223
16.7	Esercizi sui sistema di biomatematica. . . . .	230
16.8	Teorema di estistenza di Peano . . . . .	233
16.9	Facoltativo: varie dimostrazioni del teorema di Peano .	235

<b>17</b>	<b>Equazioni e sistemi lineari</b>	<b>241</b>
17.1	Equazione lineare omogenea a coefficienti costanti . . . . .	241
17.2	Sistemi di ordine uno e teorema di Liouville . . . . .	242
17.3	Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine $n$ . . . . .	247
17.4	Wronskiano per equazioni di ordine $n$ . . . . .	248
17.5	Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine $n$ . . . . .	250
17.5.1	Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni lineari . . . . .	252
17.6	Esercizi sulle equazioni lineari di ordine $n$ : livello standard.	254
17.7	Esercizi sulle equazioni lineari di ordine $n$ : livello elevato.	255
<b>18</b>	<b>Stabilità intorno di punto di equilibrio</b>	<b>265</b>
18.1	Punti di equilibrio . . . . .	265
18.2	Classificazione dei punti di equilibrio nel piano . . . . .	265
18.3	Il caso di nodo; due radici reali con lo stesso segno . . . . .	266
18.4	Il caso di sella; due radici reali con segno opposto . . . . .	270
18.5	Il caso di fuoco; due radici complessi coniugati . . . . .	273
18.5.1	I casi di degenerazione degli autovalori : stelle . . . . .	274
18.5.2	I casi di degenerazione degli autovalori: nodo degenere . . . . .	275
18.6	Studio di sistemi di equazioni differenziali intorno dei punti stazionari . . . . .	277
18.7	Esercizi sui punti stazionari dei sistemi $(2 \times 2)$ . . . . .	282
18.8	Primi integrali e studio dei sistemi $(2 \times 2)$ . . . . .	285
18.9	Esercizi sui integrali primi . . . . .	287
18.10	Stabilità . . . . .	289
18.11	Stabilità secondo Lyapunov . . . . .	291
<b>19</b>	<b>Richiami su algebra lineare</b>	<b>295</b>
19.1	Norma di una matrice . . . . .	295
19.2	Molteplicità algebrica e geometrica di autovalori, spettro di una matrice . . . . .	298
19.3	Esponente di una matrice . . . . .	301
19.4	Calcolo dell'esponente $e^A$ con $A$ diagonalizzabile . . . . .	304

19.5	Calcolo dell'esponente $e^A$ quando $A$ non é diagonalizzabile	305
19.6	Calcolo di $e^J$ con $J$ blocco di Jordan	317
19.7	Esercizi: esponenziale di una matrice	321

## IV Terza Parte: Integrazione 323

<b>20</b>	<b>Richiami sul integrale di Riemann del corso di Analisi</b>	
	<b>Matematica 1</b>	<b>325</b>
20.1	Integrale definito (di Riemann)	325
20.2	Integrale di Stieltjes	330
20.2.1	Teorema fondamentale del calcolo integrale	334
<b>21</b>	<b>Misura: idea della definizione e proprietà generali</b>	<b>337</b>
21.1	Algebre e $\sigma$ -algebre	337
21.2	Misure: additive e $\sigma$ -additive.	339
21.3	Proprietá della misura astratta	340
21.4	Argomento facoltativo: Misura esterna	341
<b>22</b>	<b>Misura di Peano - Jordan</b>	<b>343</b>
22.1	Insiemi con misura di Peano - Jordan zero	344
22.2	Plurintervalli e loro misura (di Peano - Jordan)	346
22.3	Aperti in $\mathbb{R}^n$ e unioni quasi disgiunti	352
22.4	Misura esterna e misura interna per qualsiasi insieme limitato	355
22.5	Insiemi misurabili (secondo Peano - Jordan)	357
22.6	Esercizi sulla misura di Peano	362
<b>23</b>	<b>Integrale di Riemann</b>	<b>365</b>
23.1	Integrale di Riemann su intervalli in $\mathbb{R}^n$	365
23.2	Proprietá dell'integrale di Riemann	368
23.3	Il grafico delle funzioni integrabili ha misura zero	369
23.4	Misurabilitá di insiemi normali	370
23.5	Integrazione su insiemi misurabili in senso di Peano - Jordan	371
23.5.1	Proprietá dell'integrale di Riemann su insiemi misurabili	371

23.6	Funzioni semplici e loro integrale di Riemann . . . . .	376
23.7	Formula di riduzione . . . . .	378
<b>24</b>	<b>Cambiamento di variabili</b>	<b>385</b>
24.1	Trasformata lineare di intervalli e loro misura di Peano - Jordan . . . . .	385
24.1.1	L'immagine $C^1$ di un intervallo . . . . .	387
24.2	Formula di cambiamento di variabili . . . . .	391
24.3	Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	394
<b>25</b>	<b>Esercizi su integrali multipli</b>	<b>397</b>
25.1	Definizione e volume del parallelepipedo . . . . .	397
25.2	Esercizi su integrali doppi e tripli . . . . .	399
25.3	Teorema del valor medio e calcolo del baricentro . . . . .	403
25.4	Integrali Impropri nel piano . . . . .	406
25.5	Volume di $\{x \in \mathbb{R}^n; \ x\  = 1\}$ . . . . .	411
25.5.1	Area della sfera in $\mathbb{R}^n$ , prima soluzione . . . . .	411
25.5.2	Area della sfera in $\mathbb{R}^n$ , seconda soluzione . . . . .	414
<b>V</b>	<b>Quarta Parte: Integrazione sulle curve e su- perficie, forme differenziali</b>	<b>417</b>
<b>26</b>	<b>Integrali sulle superfici</b>	<b>419</b>
26.1	Superfici in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	419
26.2	Partizione dell'unit� sulle superficie . . . . .	428
26.3	Superfici orientabili . . . . .	430
26.4	Superfici con bordo . . . . .	433
26.5	Superfici con bordo orientabili . . . . .	434
26.6	Partizione dell'unit� sulle superficie con bordo . . . . .	437
26.7	Area di una superficie . . . . .	439
26.8	Integrale sulle superficie di I specie . . . . .	441
26.9	Forme differenziali di grado 2 nello spazio Euclideo . . . . .	444
26.10	Pull - back delle forme differenziali . . . . .	449
26.11	Integrali delle forme differenziali di grado 2 sulle superfici	453
26.12	Formula di Stokes - Green . . . . .	458
26.13	Formula di Stokes (integrale di superfici del I tipo) . . . . .	462



26.14	Forme multilineari antisimetriche . . . . .	465
26.15	Partizione di unit� per domini con frontiere regolari . . . . .	471
26.16	Formula di Stokes - Gauss in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	473
26.17	Formula di Gauss - Green . . . . .	477
<b>27</b>	<b>Esercizi sui integrali sulle superficie</b>	<b>481</b>
27.1	Integrali sulle superficie del I tipo . . . . .	481
27.2	Integrali di 2-forme sulle superficie. . . . .	490
27.2.1	La prima forma differenziale . . . . .	494
27.3	Coordinate polari e cilindriche . . . . .	495
27.3.1	Coordinate polari . . . . .	495
27.3.2	Coordinate cilindriche . . . . .	497
27.3.3	Simetria ed integrazione . . . . .	499
27.4	L'operazione * . . . . .	501
27.5	Applicazioni della formula di Gauss - Green . . . . .	502
27.6	Nastro di Möbius . . . . .	507

# Part I

## Prima Parte: Integrali curvilinei



# Chapter 1

## Integrali curvilinei

### 1.1 Curve

Sia  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  tale che  $\Gamma$  é immagine di una applicazione  $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  é un intervallo di  $\mathbb{R}$ , limitato o no.

**Definizione 1.1.1.** *La coppia  $(\varphi, \Delta)$ , tale che  $\varphi \in C(\Delta)$  e  $\varphi(\Delta) = \Gamma$  é una parametrizzazione di  $\Gamma$ .*

Se  $\Delta = (a, b)$ , la parametrizzazione  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^n$  é definita della tripla  $(\varphi, (a, b), \Gamma)$  dove

$$\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi((a, b)) = \Gamma.$$

e  $\varphi$  é una funzione continua.

In breve possiamo dire che

$$x = \varphi(t), t \in I, \tag{1.1.1}$$

e la parametrizzazione della curva  $\gamma$ . La parametrizzazione (1.1.1) (quando  $I$  é un intervallo aperto) si dice di classe  $C^k$  se e solo se

$$\varphi \in C^k(I).$$

**Definizione 1.1.2.** *La parametrizzazione definita con*

$$x = \varphi(t), t \in I,$$

dove  $I$  é un intervallo aperto e

$$\varphi : I = (a, b) \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n,$$

é detta regolare se é di classe  $C^1$  ed inoltre  $\varphi'(t) \neq 0$ , per ogni  $t \in I$ .

## 1.2 Lunghezza delle curva.

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la curva. Sia quindi  $\mathcal{P}$  una partizione dell'intervallo  $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{t_i \in [a, b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$$

La lunghezza della poligonale, definito dai punti

$$\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_n)$$

é:

$$\|\varphi(t_0) - \varphi(t_1)\| + \dots + \|\varphi(t_{n-1}) - \varphi(t_n)\| = \sum_{i=1}^n \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|$$

e la lunghezza della curva é l'estremo superiore di questa quantita al variare della partizione:

$$L(\varphi) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\|.$$

Se tale valore non é infinito, la curva si dice rettificabile. La lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.

### Curve $C^1$

**Lemma 1.2.1.** *Se  $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é differenziabile e la sua derivata é continua nel intervallo  $\Delta$  aperto, allora per ogni intervallo  $I = [a, b]$  chiuso la curva*

$$C : x = \varphi(t), \quad t \in I = [a, b]$$

é rettificabile e

$$L(C) = \int_I \|\varphi'(t)\| dt \tag{1.2.2}$$

*Idea della dimostrazione.* Per ogni  $\varepsilon > 0$ , possiamo trovare  $\delta > 0$  tale che

$$|t_1 - t_2| \leq \delta \implies \|\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)\| \leq \varepsilon$$

e quindi si può dedurre che

$$\|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| - \|\varphi'(t_{i-1})\|(t_i - t_{i-1}) \leq \varepsilon$$

da qui deduciamo che

$$\left| \sum_{i=1}^n \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| - \int_I \|\varphi'(t)\| dt \right|$$

è piccolo. □

### 1.3 Integrale curvilineo di I specie

Un integrale curvilineo (l'integrale di linea) del I tipo sulla curva  $C$  parametrizzata da

$$\varphi(t) : t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

e definito come segue

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt.$$

Abbiamo le seguenti proprietà.

**Lemma 1.3.1.** *Sia*

$$\underbrace{\varphi_1 : t \in \Delta_1 = [a_1, b_1] \rightarrow \varphi_1(t) \in \mathbb{R}^n}_{C_1}, \quad \underbrace{\varphi_2 : \Delta_2 = [a_2, b_2] \rightarrow \varphi_2(t) \in \mathbb{R}^n}_{C_2}$$

sono due curve  $C^1$  tali che  $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(a_1)$  ed  $f$  è una funzione continua. Allora, abbiamo

$$\int_{C_1+C_2} f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds.$$

**Lemma 1.3.2.** *Sia*

$$\underbrace{\varphi : t \in \Delta = [a, b] \rightarrow \varphi(t) \in \mathbb{R}^n}_C,$$

*é una curva  $C^1$  tale che  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$  ed  $f$  é una funzione continua. Allora, abbiamo*

$$\int_{-C} f ds = \int_C f ds.$$

Cosí l'integrale di I specie NON dipende dell'orientazione.

## 1.4 Esercizi sulla lunghezza delle curve

Quando la curva é definita in  $\mathbb{R}^2$  con l'equazione

$$r = \psi(\varphi), \quad \varphi \in (a, b) \tag{1.4.3}$$

usiamo i coordinati polari

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

e la parametrizzazione della curva é definita come segue

$$x = \psi(\varphi) \cos \varphi, \tag{1.4.4}$$

con  $\varphi \in (a, b)$ . In questo caso

$$ds = \sqrt{|x'(\varphi)|^2 + |y'(\varphi)|^2} d\varphi = \sqrt{|\psi'(\varphi)|^2 + |\psi(\varphi)|^2} d\varphi. \tag{1.4.5}$$

### Lunghezza di alcune curve

**Problema 1.4.1.** *Calcolare la lunghezza della curva (astroide o ipocicloide) parametrizzata con*

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0, 2\pi].$$

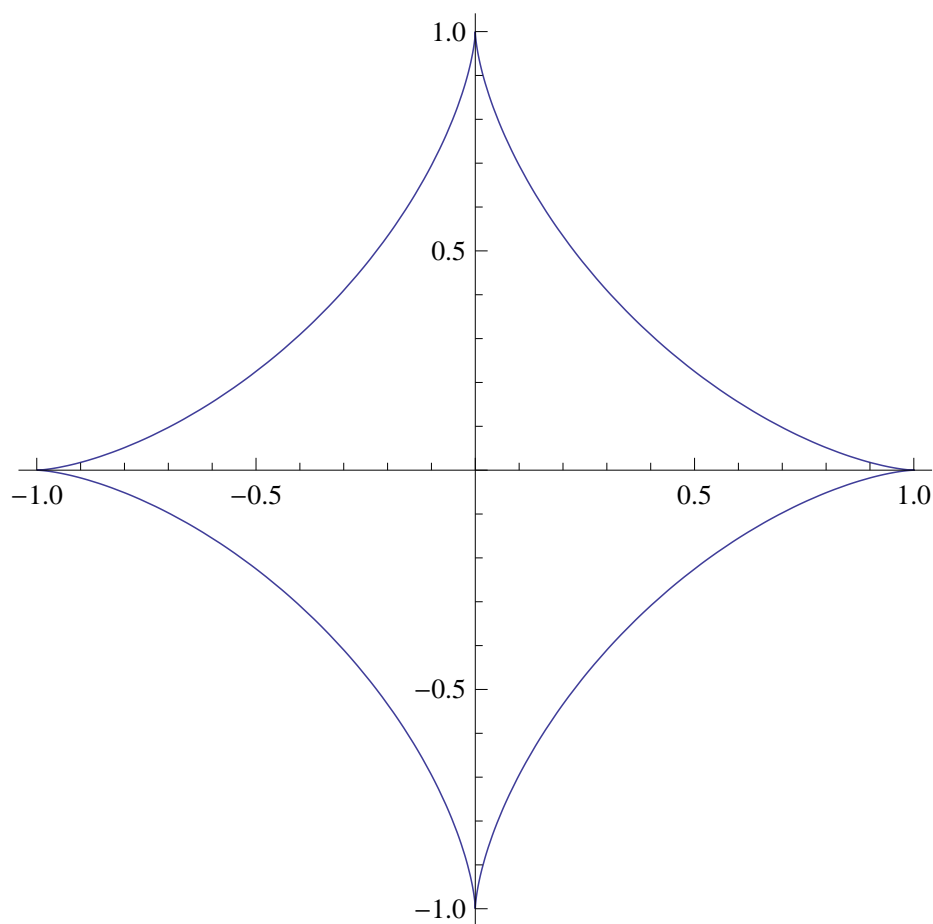


Figure 1.1: Astroide o ipocicloide

*Risposta.*

$$L = 6a$$

□

**Problema 1.4.2.** *Calcolare la lunghezza della curva cardioidale. La cardioidale, e individuata dalle seguenti equazioni parametriche, dipendenti dal parametro  $r$*

$$x(\varphi) = a(1 - 2 \cos \varphi + \cos 2\varphi),$$



$$y(\varphi) = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi).$$

Questa curva viene individuata anche dalla equazione in coordinate polari

$$r(\varphi) = 2a(1 - \cos \varphi) .$$

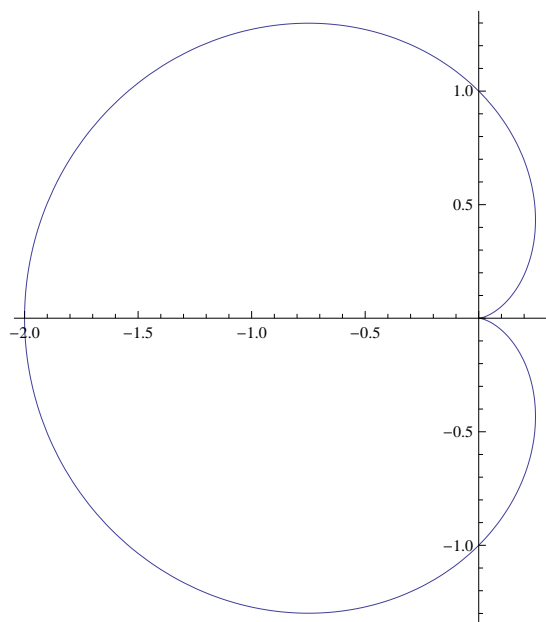


Figure 1.2: Cardioide

*Trovare la lunghezza della cardioide.*

*Risposta.*

$$L = 16a$$

□

### Lunghezza dell'ellisse

Sia

$$x = a \cos \varphi,$$

$$y = b \sin \varphi.$$

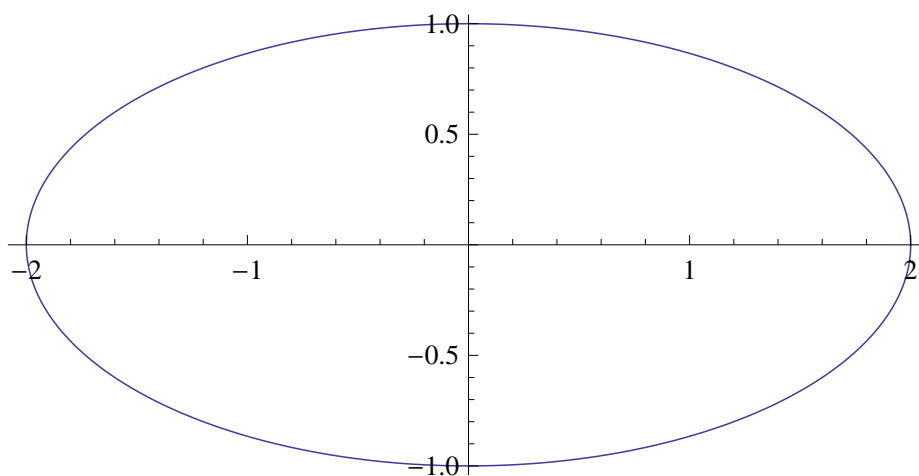


Figure 1.3: Ellisse

dove  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Abbiamo

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Se

$$a > b, \quad h = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

con  $h$  eccentricità dell'ellisse. La lunghezza dell'ellisse é

$$L = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - h^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

**Problema 1.4.3.** *Verificare la formula*

$$L = 2\pi a \left( 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j)!^2 h^{2j}}{(2^j j!)^4 (2j-1)} \right).$$

### Lemniscata di Bernoulli

La lemniscata di Bernoulli é una curva algebrica a forma di otto coricato, e descritta in coordinate cartesiane nella forma:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Il grafico di questa equazione produce una curva simile al simbolo dell'infinito  $\infty$ , che a sua volta è chiamato lemniscata.

La lemniscata fu descritta per la prima volta nel 1694 da Jakob Bernoulli, come modificazione dell'ellisse, che è il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante. Una lemniscata, viceversa, è il luogo dei punti per i quali il prodotto di queste distanze è costante. Bernoulli la chiamò lemniscus.

La lemniscata era in effetti già stata trattata da Giovanni Cassini nel suo studio del 1680 sull'ovale di Cassini, di cui la lemniscata costituisce un caso particolare. Giovanni Fagnano dei Toschi nel 1750 ne studiò le principali proprietà.

Una parametrizzazione è definita con  $\gamma : r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$

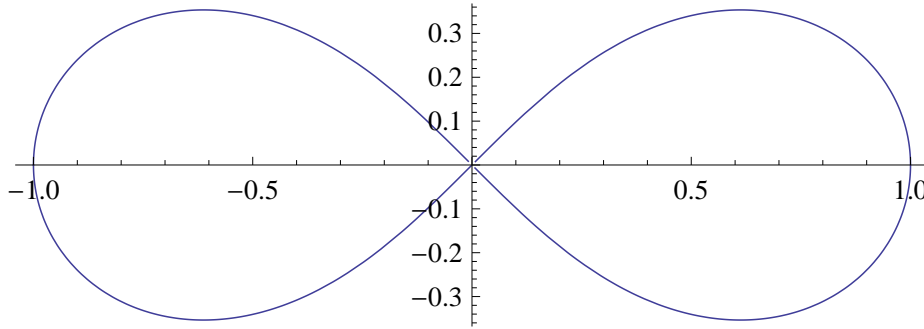


Figure 1.4: Lemniscata di Bernoulli

Usando (20.2.4), (19.7.25), (1.5.9) si vede che

$$ds = \sqrt{2}a \sqrt{\sin^2(2\varphi) + \cos^2(2\varphi)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} = \sqrt{2}a \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}.$$

Per calcolare la lunghezza della lemniscata usiamo la parametrizzazione polare  $r = \sqrt{\cos(2\varphi)}$  e supponendo  $2a^2 = 1$  per semplicità.

La lunghezza è due volte  $\omega$  dove  $\omega$  è la lunghezza della parte della curva che sta nel semipiano  $x > 0$ .

$$\omega = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} = 2 \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

Usando la sostituzione

$$r^4 = s$$

otteniamo

$$\omega = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{s^{3/4}(1-s)^{1/2}}$$

Usando la funzione Beta

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \frac{ds}{s^\alpha(1-s)^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

dove la funzione  $\Gamma$  di Eulero è definita con

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \alpha > 0$$

è soddisfatta la proprietà

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Così otteniamo

$$\omega = \frac{(\Gamma(1/4))^2}{2\sqrt{2\pi}}. \quad (1.4.6)$$

## 1.5 Esercizi su Integrali curvilinei

Quando la curva è definita in  $\mathbb{R}^2$  con l'equazione

$$r = \psi(\varphi), \quad \varphi \in (a, b) \quad (1.5.7)$$

usiamo i coordinati polari

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

e la parametrizzazione della curva è definita come segue

$$x = \psi(\varphi) \cos \varphi, \quad (1.5.8)$$

con  $\varphi \in (a, b)$ . In questo caso

$$ds = \sqrt{|x'(\varphi)|^2 + |y'(\varphi)|^2} d\varphi = \sqrt{|\psi'(\varphi)|^2 + |\psi(\varphi)|^2} d\varphi. \quad (1.5.9)$$

**Problema 1.5.1.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\gamma} (x^2 + y^2)^2 ds$$

dove  $\gamma : r = ae^{m\varphi}$  dove  $\varphi \in (-\infty, 0)$  e  $m > 0$ .

Risp.  $a^5 \sqrt{1 + m^2} / 5m$ .

**Problema 1.5.2.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\gamma} (x + y) ds$$

dove  $\gamma : r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$  dove  $\varphi \in (-\pi/4, \pi/4)$  e  $a > 0$ .

*Suggerimento.* Usando (20.2.4), (19.7.25), (1.5.9) si vede che

$$ds = a \sqrt{\sin^2(2\varphi) + \cos^2(2\varphi)} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} = a \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}.$$

La funzione  $y(\varphi) = a \sqrt{\cos(2\varphi)} \sin \varphi$  é dispari. Così

$$\int_{\gamma} y ds = 0.$$

□

Risp.  $\sqrt{2}a^2$ .

**Problema 1.5.3.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds$$

dove  $\gamma$  é la circonferenza  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x = y$ .

Risp.  $2\pi a^2$ .

**Definizione 1.5.1.** Il baricentro  $(C_x, C_y)$  di una curva

$$\underbrace{x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]}_{\gamma}$$

si trova con la formula

$$C_x = \frac{\int_{\gamma} x \, ds}{L}$$

$$C_y = \frac{\int_{\gamma} y \, ds}{L}$$

dove

$$L = \int_{\gamma} ds$$

é la lunghezza della curva  $\gamma$ .

**Problema 1.5.4.** Calcolare i coordinati del baricentro della curva  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, \pi]$ .

Risp.  $(4a/3, 4a/3)$ .

**Problema 1.5.5.** Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} y^2 ds,$$

dove

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

con  $a > 0, t \in (0, 2\pi)$ .

*Soluzione.* Abbiamo

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t.$$

Quindi

$$ds = \sqrt{a^2(1 - 2 \cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t} dt =$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a\sqrt{1 - 2\cos t + 1} dt = \sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t} dt$$

e possiamo scrivere

$$\int_{\gamma} y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sqrt{1 - \cos t} dt.$$

Adesso possiamo usare le relazioni

$$\cos t = 1 - 2\sin^2(t/2),$$

$$\cos t = 2\cos^2(t/2) - 1,$$

e quindi

$$1 - \cos t = 2\sin^2(t/2)$$

e

$$1 - \cos t = 2 - 2\cos^2(t/2).$$

Così troviamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} y^2 ds &= \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= \sqrt{2}a^3 \int_0^{2\pi} (2(1 - \cos^2(t/2)))^2 \sqrt{2\sin^2(t/2)} dt = \\ &= 8a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(t/2))^2 \sqrt{\sin^2(t/2)} dt \end{aligned}$$

Possiamo effettuare la sostituzione

$$\cos(t/2) = u.$$

per  $t \in (0, 2\pi)$  abbiamo inoltre  $\sin(t/2) \geq 0$  e quindi

$$\sqrt{\sin^2(t/2)} = |\sin(t/2)| = \sin(t/2).$$

Usando

$$du = -\frac{\sin(t/2)}{2} dt$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 &= 8a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(t/2))^2 \sqrt{\sin^2(t/2)} dt = -16a^3 \int_1^{-1} (1 - u^2)^2 du = \\
 &\quad 16a^3 \int_{-1}^1 (1 - u^2)^2 du = 32a^3 \int_0^1 (1 - u^2)^2 du = \\
 &= 32a^3 \int_0^1 1 - 2u^2 + u^4 du = 32a^3 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{256a^3}{15}.
 \end{aligned}$$

□

**Problema 1.5.6.** Sia  $\gamma$  la curva definita dalla intersezione di  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e il piano  $y = x$ . Calcolare

$$\int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds.$$

*Soluzione.* Usiamo la parametrizzazione

$$\gamma : \begin{cases} x = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ z = \sin t, \end{cases}$$

dove  $t \in [0, 2\pi]$ , troviamo  $ds = dt$ , e quindi

$$\int_{\gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi.$$

□

Se  $U(x, y, z)$  é potenziale la forza  $F = (F_1, F_2, F_3)$  e

$$F_1 = \partial_x U, F_2 = \partial_y U, F_3 = \partial_z U.$$

Il lavoro della forza  $F$  sulla curva  $\gamma$  é

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

**Problema 1.5.7.** Trovare il lavoro della forza

$$F_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, F_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, F_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sulla curva  $\gamma : x^{2004} + y^2 = 1, z = 1/2004$ .

Risp. 0.



### 1.5.1 Momenti de inerzia:

Data una curva  $\gamma$  nello spazio e data la densita del materiale  $\rho(x, y, z)$  possiamo calcolare il momento di inerzia rispetto origine  $O$  con la relazione

$$I_O = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (1.5.11)$$

Inoltre momenti di inerzia rispetto asse  $x$  si calcola con la formula

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (1.5.12)$$

In modo simile abbiamo

$$I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (1.5.13)$$

e

$$I_z = \int_{\gamma} (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (1.5.14)$$

**Problema 1.5.8.** *Data la curva*

$$\gamma : \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 47, \end{cases}$$

dove  $t \in [0, 2\pi]$ . Abbiamo inoltre la densita del materiale sulla curva  $\rho = xyz$ . Calcolare momento di inerzia  $I_O$ .

*Soluzione.* Abbiamo  $ds = 3dt$ ,

$$\begin{aligned} I_O &= \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} (9 + 47^2) 9 \sin t \cos t 141 dt = 1407321 \int_0^{2\pi} 2 \sin t \cos t dt = \\ &= 1407321 \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0. \end{aligned}$$

□

**Problema 1.5.9.** *Data la curva ottenuta con l'intersezione della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  intersecata col piano  $z = 2\sqrt{3}$  abbiamo inoltre la densità del materiale sulla curva  $\rho = xy$ . Calcolare momento di inerzia  $I_y$ .*

*Soluzione.* La relazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e la relazione  $z = 2\sqrt{3}$  implicano

$$x^2 + y^2 = 16 - 12 = 4$$

e quindi abbiamo la curva definita con

$$x^2 + y^2 = 4, z = 2\sqrt{3}.$$

Usando la parametrizzazione

$$\gamma : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 2\sqrt{3}, \end{cases}$$

dove  $t \in [0, 2\pi]$ , troviamo  $ds = 2dt$ ,

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds = \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t + 12) 4 \sin t \cos t 2 dt. \end{aligned}$$

Usiamo le relazioni

$$2 \cos^2 t - 1 = \cos(2t), 2 \sin t \cos t = \sin(2t)$$

e troviamo

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{2\pi} (2 \cos(2t) + 14) 4 \sin(2t) dt = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (2 \cos(2t) + 14) d \cos(2t) = 0. \end{aligned}$$

□

**Problema 1.5.10.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$$

dove  $\gamma$  è la circonferenza  $x^2 + y^2 = a^2$  nella direzione antioraria.

Risp  $-2\pi$ .

**Problema 1.5.11.** *Calcolare*

$$\int_{\gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

dove  $\gamma$  è la circonferenza  $x^2 + y^2 = a^2$  nella direzione antioraria.

Risp  $\pi a^4/2$ .

La funzione di Eulero  $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$$

dove  $\operatorname{Re} z > 0$ .

**Problema 1.5.12.** *Calcolare  $\Gamma(n)$  per  $n \in \mathbb{N}$ . Calcolare  $\Gamma(1/2)$ . Dimostrare che*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Risp.  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

## Part II

# Seconda parte: Calcolo Differenziale



# Chapter 2

## Norme e disequazioni in $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Norme in $\mathbb{R}^n$ , equivalenza delle norme

Sia

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}.$$

Norma e' ogni funzione

$$\| \cdot \| : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \| \vec{x} \|,$$

tale che

$$\| \vec{x} \| \geq 0, \quad \| \vec{x} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}, \quad (2.1.1)$$

$$\| \lambda \vec{x} \| = |\lambda| \| \vec{x} \| \quad \text{per } \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.1.2)$$

$$\text{disequazione triangolare } \| \vec{x} + \vec{y} \| \leq \| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|. \quad (2.1.3)$$

**Esempio 2.1.1.** *Sia*

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

*Possiamo verificare la disequazione triangolare (2.1.3) che e' equivalente a*

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 \leq (\| \vec{x} \| + \| \vec{y} \|)^2$$

*e dopo semplifica della disequazione vediamo che si deve verificare la disequazione di Cauchy*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \| \vec{x} \| \| \vec{y} \|^2$$

*Ricordando*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori troviamo

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

e quindi abbiamo la disequazione triangolare.

Due norme

$$\|\cdot\|_j : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \|\vec{x}\|, j = 1, 2$$

sono equivalenti se esistono due costanti positive  $C_1 < C_2$  tali che

$$C_1 \leq \frac{\|\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_2} \leq C_2 \quad (2.1.4)$$

per ogni  $\vec{x} \neq 0$ .

**Esempio 2.1.2.** *Sia*

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1.5)$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \max(|x_1|, |x_2|), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1.6)$$

*Abbiamo le disequazioni*

$$|x_1| + |x_2| \leq \max(|x_1|, |x_2|) + \max(|x_1|, |x_2|) = 2 \max(|x_1|, |x_2|)$$

e

$$\max(|x_1|, |x_2|) \leq |x_1| + |x_2|$$

e quindi abbiamo (19.1.4).

**Esempio 2.1.3.** *Sia*

$$\|\vec{x}\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \quad (2.1.7)$$

e

$$\|\vec{x}\|_p = (x_1^p + \cdots + x_n^p)^{1/p} \quad (2.1.8)$$

dove  $1 < p < \infty, p \neq 2$ .

- a) Vedere se (2.1.7) e (2.1.8) sono norme;  
 b) Vedere se (2.1.7) e (2.1.8) sono equivalenti.

**Esempio 2.1.4.** Sia

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n); x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

con norme

$$\| \vec{x} \|_p = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p} \quad (2.1.9)$$

per  $1 \leq p < \infty$ .

$$\| x \|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|). \quad (2.1.10)$$

Ricordando la relazione

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori troviamo

**Lemma 2.1.1.** Vale la disequazione di Cauchy

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq \| \vec{x} \|_2 \| y \|_2, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

### 2.1.1 Aperti in $\mathbb{R}^n$ .

Un sottoinsieme  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice aperto se per ogni  $x$  di  $U$  esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che

$$B(x, \varepsilon) = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n; \| \vec{y} - \vec{x} \| < \varepsilon \} \subset U.$$

Gli insiemi aperti hanno le seguenti proprietà, valide in un qualsiasi spazio topologico:

- a) L'intersezione di un numero finito di aperti è ancora un aperto;  
 b) L'unione di una collezione arbitraria di aperti è ancora un aperto;  
 c) L'insieme  $\mathbb{R}^n$  e l'insieme vuoto sono aperti.





# Chapter 3

## Distanza in $\mathbb{R}^n$

### 3.1 Definizione della distanza in $\mathbb{R}^n$

La distanza tra due punti  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  e definita con

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|, \quad (3.1.1)$$

dove  $\|\vec{x}\|$  é una norma.

La distanza soddisfa le seguente proprieta.

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &> 0 & \vec{x} &\neq \vec{y} \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= 0 & \vec{x} &= \vec{y} \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &= d(\vec{y}, \vec{x}) \\ d(\vec{x}, \vec{y}) &\leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}). \end{aligned}$$

L'ultima proprieta e' detta disuguaglianza triangolare.

L'insieme delle palle aperte centrate nei vari punti avente raggio variabile puo essere utilizzata per definire gli insiemi aperti.

Piu' precisamente, un insieme sará aperto se e' l'unione di un certo numero (finito o infinito) di palle.

**Problema 3.1.1.** *Verificare che  $a$  é un punto di chiusura di  $A$  se e solo se*

$$d(a, A) = 0,$$

dove

$$d(a, A) = \inf\{\|\vec{a} - \vec{x}\|; \vec{x} \in A\}.$$

### 3.2 Funzioni continue in $\mathbb{R}^n$

La funzione  $f$  definita in un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice continua in un punto  $p \in D$  se, per ogni scelta di  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\delta > 0$ , tale che, per ogni punto  $x \in D$  che dista meno di  $\delta$  da  $p$ , ovvero che:

$$d(x, p) < \delta$$

si ha che  $f(x)$  dista per meno di  $\varepsilon$  da  $f(p)$ , ovvero:

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

La definizione può essere scritta servendosi della nozione di intorno sferico  $B(p, \delta) = \{x; d(x, p) < \delta\}$  centrato in  $p$ , di raggio  $\delta$ : in questo caso, la funzione è continua se  $x \in B(p, \delta) \cap D$  implica che  $|f(x) - f(p)| \leq \varepsilon$ .

Nel caso di funzioni reali, le definizioni coincidono se le due distanze su dominio e codominio non sono altro che il modulo della differenza tra due valori in  $\mathbb{R}$ .

Inoltre, questa definizione è valida per funzioni definite e a valori in tutti gli spazi vettoriali con norma, dove la distanza sia la norma della differenza tra due punti.

### 3.3 Teorema di Weierstrass

Il lemma seguente spiega la proprietà: "le funzioni continue mandano compatti in compatti."

**Lemma 3.3.1.** *Sia  $X, Y$  due spazi metrici e sia  $f$  una funzione continua:*

$$f : X \rightarrow Y.$$

*Allora per ogni  $K \subseteq X$  compatto  $f(K)$  è compatto in  $Y$ .*

Il teorema di Weierstrass nell'ambito degli spazi metrici ha la seguente forma:

**Lemma 3.3.2.** *(teorema di Weierstrass) Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $X$ . Allora se  $X$  è compatto,  $f(x)$  ammette un punto di massimo e un punto di minimo in  $X$ .*

*Proof.* Consideriamo solo

$$\inf_{x \in X} f(x) = L.$$

Il fatto che  $f$  é limitata implica che  $L > -\infty$ . La definizione di  $\inf$  implica che esiste una successione minimizzante, cioè

$$x_k \in X, \quad L \leq f(x_k) < L + \frac{1}{k}. \quad (3.3.2)$$

La successione  $x_k$  é in compatto  $X$ , così possiamo estrarre sottosuccessione

$$\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty},$$

tale che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_m} = x_* \in X.$$

Usando la continuità della funzione  $f$  otteniamo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_{k_m}) = f(x_*)$$

e le disequazioni (3.3.2) mostrano che

$$f(x_*) = L.$$

□

**Remark 3.3.1.** *La formulazione per spazi topologici é del tutto analoga se  $(X, \mathcal{T})$  é uno spazio compatto.*

## 3.4 Il teorema di Heine - Cantor

Il teorema di Heine - Cantor ha la seguente forma

**Lemma 3.4.1.** *Siano  $(M, d)$  e  $(N, \rho)$  spazi metrici, e  $f : M \rightarrow N$  una funzione continua su  $M$ . Se  $M$  é compatto allora  $f$  é uniformemente continua.*

*Dimostrazione.* La continuità di  $f$  implica che per ogni  $\varepsilon > 0$  ed ogni  $x \in M$  esiste  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  tale che

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon/2), \quad (3.4.3)$$

dove

$$B(x, \delta) = \{y \in M; d(x, y) < \delta\}, \quad B(f(x), \varepsilon) = \{z \in N; \rho(f(x), z) < \varepsilon\}.$$

Per ogni  $\varepsilon > 0$  abbiamo

$$M = \cup_{x \in M} B(x, \delta(\varepsilon, x)/2)$$

e quindi

$$\{B(x, \delta(\varepsilon, x)/2)\}_{x \in M}$$

é un ricoprimento aperto di  $M$ . La compattezza di  $M$  permette a trovare

$$x_1, \dots, x_N$$

tali che ponendo

$$\delta_1 = \delta(\varepsilon, x_1), \dots, \delta_N = \delta(\varepsilon, x_N)$$

abbiamo

$$B(x_1, \delta_1/2), \dots, B(x_N, \delta_N/2)$$

é un sottoricoprimento finito di  $M$ . Questa proprietà e (3.4.3) implicano

$$f(B(x_j, \delta_j)) \subseteq B(f(x_j), \varepsilon/2), \quad (3.4.4)$$

Ponendo

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq N} \frac{\delta_j}{2} = \min_{1 \leq j \leq N} \frac{\delta(\varepsilon, x_j)}{2}$$

possiamo prendere qualsiasi coppia  $(x, y)$  con  $d(x, y) < \delta$  e sappiamo che esiste  $j$  tale che  $x \in B(x_j, \delta_j/2)$  e la disequazione triangolare implica

$$d(x, y) < \delta \leq \frac{\delta_j}{2}, \quad x \in B(x_j, \delta_j/2) \implies x, y \in B(x_j, \delta_j) \quad (3.4.5)$$

cosí la proprietá (3.4.4) implica

$$\rho(f(x_j), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(f(x_j), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ed applicando la disequazione triangolare (rispetto la metrica  $\rho$  troviamo

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

□

### 3.5 Contrazioni e teorema del punto fisso.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Si definisce contrazione con costante di Lipschitz  $k < 1$  una funzione  $f : X \rightarrow X$  che soddisfa la seguente condizione:

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (3.5.6)$$

Se  $k = 1$  allora la funzione  $f : X \rightarrow X$  che soddisfa

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (3.5.7)$$

si chiama semplicemente contrazione o mappa NON ESPANSIVA.

**Lemma 3.5.1.** *Ogni contrazione é una funzione continua.*

**Teorema 3.5.1.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico completo non vuoto. Sia  $T : X \rightarrow X$  una contrazione su  $X$  con costante di Lipschitz  $k \in [0, 1)$ . Allora la mappa  $T$  ammette uno e un solo punto fisso.*

Il teorema assicura che se  $(X, d)$  é uno spazio metrico completo e non vuoto, allora il punto fisso esiste ed é unico e che, fissato un qualunque  $x_0$  in  $(X, d)$ , la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := x_0, x_{n+1} := f(x_n)$$

converge al punto fisso.

*Dimostrazione.* La dimostrazione si fa in due passi. Iniziamo ad occuparci della esistenza, poi ricaveremo l'unicità.

Sia definita una successione ricorrente (o successione delle iterate) come segue:

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1), \quad \dots, \quad x_n = T(x_{n-1}).$$

Sfruttiamo la metrica  $d$  e la proprietà di contrazione per valutare la distanza tra due punti successivi  $x_n, x_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq k d(x_{n-1}, x_n) = k d(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})) \leq \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Prendiamo due numeri  $m, n \in \mathbb{N}$  tali che  $m < n$  : attraverso la disuguaglianza triangolare e la proprietà di cui sopra

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} k^i = \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} k^{i+m} = k^m d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} k^i. \end{aligned}$$

Per  $n \rightarrow \infty$ , l'ultima è una serie geometrica che converge perché il termine generale è compreso tra 0 e 1, quindi

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{k^m}{1-k} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad m \rightarrow \infty$$

ottenendo il criterio di Cauchy per le successioni. Passiamo ora dalla completezza dello spazio  $X$ , la quale garantisce l'esistenza di

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Poiché la  $T$  è un'applicazione uniformemente continua, vale

$$T(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

L'unicità si dimostra per assurdo: poniamo che esista un secondo punto  $y^*$  tale che  $T(y^*) = y^*$

$$d(x^*, y^*) \leq d(T(x^*), T(y^*)) \leq k d(x^*, y^*) \quad \Rightarrow \quad k \geq 1$$

che contraddice le ipotesi di partenza. □

### 3.6 Esercizi sulle contrazioni e punti fissi

**Problema 3.6.1.** Vedere per quali  $a > 0$  la funzione  $f_a : [0, 1] \Rightarrow [0, 1]$  definita con

$$f_a(x) = x^a$$

- a) *é una contrazione?*
- b) *é una mappa non espasiva?*

**Problema 3.6.2.** Se  $f : [0, 2] \Rightarrow [0, 2]$  é una funzione continua, allora esiste punto fisso, tale che  $f(x) = x$ .

**Problema 3.6.3.** Costruire  $f : [-2, 2] \Rightarrow [-2, 2]$  tale che il numero dei punti fissi é 3.

**Problema 3.6.4.** Costruire una mappa non espasiva  $f : [-2, 2] \Rightarrow [-2, 2]$  tale che

- a)  $f(0) = 0$ ;
- b) *Esiste almeno un altro punto fisso in  $[-2, 2]$ :*
- c) *La funzione non é una funzione lineare.*

(contrazione in questo problema significa che vale (3.5.7) con  $k \leq 1!!!$ ).

**Problema 3.6.5.** Provare che:

- a)  $T : [3/2, 2] \rightarrow [3/2, 2]$  definita come  $T(x) = 1 + 1/x$  e' una contrazione;
- b) *per quali  $0 < a < b$  la funzione  $T(x) = 1 + 1/x$  é tale che  $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ed e' una contrazione?*
- c) *studiare i punti fissi e limite della successione per ricorrenza*

$$x_0 = c, x_{n+1} = Tx_n.$$

al variare di  $c \in [a, b]$ .

Risp. b).

$$1 < a < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < b, b + 1 \geq ab \geq a + 1.$$

□



**Problema 3.6.6.** (\*) Sia  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  e supponiamo che

$$|Tx - Ty| < |x - y|, \forall 0 \leq x \neq y \leq 1.$$

Vedere se  $T$  é una contrazione.

**Problema 3.6.7.** Sia

$$f(x) = kx - x^p,$$

dove  $p \geq 2$  e  $k \in [0, 1]$ .

- a) Vedere per quali valori dei parametri  $k, p$  con  $p \geq 2, 0 \leq k \leq 1$  abbiamo la proprietá

$$f : [0, 1] \implies [0, 1]?$$

- b) Vedere se la mappa  $f$  é una contrazione;  
 c) Vedere se la mappa  $f$  é nonespansiva;  
 d) Studiare l'esistenza e unicita' dei punti fissi di  $f$ .

**Problema 3.6.8.** Vedere se il Teorema 3.5.1 é vero per  $k = 1$ .

**Problema 3.6.9.** Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  e

$$T(x) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

allora  $T$  é una contrazione con  $k < 1$  se e solo se

$$\max\{|\lambda|; \lambda \text{ é autovalore di } A\} \leq k.$$

**Problema 3.6.10.** Sia  $X = C[0, a]$  con norma

$$\|f\|_X = \sup_{[0, a]} |f(x)|$$

e  $T : X \implies X$  é definito come segue

$$T(f)(x) = 10 + \int_0^x f(t)^3 dt. \quad (3.6.8)$$

Studiare per quali  $a > 0$  l'operatore (3.6.8) é una contrazione in

$$B(10, 1) = \{g \in X; \|g - 10\|_X \leq 1\}.$$

# Chapter 4

## Teoremi sulla continuità e compattezza in $\mathbb{R}^n$ .

### 4.1 Teorema di Bolzano - Weierstrass

**Theorem 4.1.1.** (*Teorema di Bolzano-Weierstrass*). Ogni sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  che sia limitato e infinito (infinito significa che ha infiniti elementi) ammette (almeno) un punto di accumulazione (che può appartenere o no ad  $E$ ).

*Dimostrazione.* Sappiamo (vedi Problema ??) che la convergenza della successione

$$\vec{v}_1 = (a_1, b_1), \vec{v}_2 = (a_2, b_2), \dots, \vec{v}_n = (a_n, b_n) \dots$$

in  $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ , dove  $(X_1, d_1)$  e  $(X_2, d_2)$  sono due spazi metrici, significa che entrambi le successioni

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

e

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

sono convergenti in  $X_1$  e  $X_2$  rispettivamente. Il fatto che il teorema di Bolzano-Weierstrass vale in  $\mathbb{R}$  implica che vale in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ . Possiamo concludere la dimostrazione applicando induzione in  $n$ .  $\square$

## 4.2 Equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo le definizioni (2.1.10) e (2.1.9) delle norme  $\|x\|_p$  per  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Problema 4.2.1.** *Verificare le disequazioni*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$$

per  $x \in \mathbb{R}^n$ . Per quali  $x \in \mathbb{R}^n$  valgono le identità

$$\|x\|_\infty = \|x\|_p$$

o

$$\|x\|_p = n^{1/p} \|x\|_\infty?$$

**Problema 4.2.2.** *Verificare che per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  abbiamo*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

**Lemma 4.2.1.** *Su  $\mathbb{R}^n$  tutte le norme sono fra loro equivalenti.*

*Proof.* É sufficiente a vedere che la norma  $\|\cdot\|_\infty$  ed equivalente a qualsiasi norma  $\|\cdot\|$ , cioè

$$\|x\| \leq C_1 \|x\|_\infty \tag{4.2.1}$$

$$\|x\|_\infty \leq C_2 \|x\|. \tag{4.2.2}$$

Per la prima disequazione (18.6.17) abbiamo

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

e

$$\|x\| \leq \left( \sum_{j=1}^n \|e_j\| \right) \|x\|_\infty.$$

Questa disequazione significa che

$$x \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \implies x \in (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$$

é una funzione continua allora il teorema di Weierstrass implica esistenza di un punto  $y^*$  con  $\|y^*\|_\infty = 1$  e tale che

$$C_* = \|y^*\| = \inf_{\|y\|_\infty=1} \|y\|,$$

ovviamente  $\|y_*\| > 0$  e possiamo affermare

$$\|y\|_\infty = 1 \implies \|y\| \geq C_*. \quad (4.2.3)$$

Per dimostrare (18.6.18) si prende  $x \neq 0$  e si pone

$$y = \frac{x}{\|x\|_\infty}.$$

Abbiamo  $\|y\|_\infty = 1$  e la proprieta (18.6.19) implica

$$\|x\| = \|\|x\|_\infty y\| = \|x\|_\infty \|y\| \geq \|x\|_\infty C_*$$

quindi vale (18.6.18) con  $C_2 = 1/C_*$ . □



# Chapter 5

## Limiti delle funzioni di più variabili

### 5.1 Esercizi sui limiti delle funzioni di più variabili

Per le funzioni di più variabili valgono definizioni di limite analoghe a quelle viste per le funzioni di una variabile. Le richiamiamo per comodità del lettore.

**Definizione 5.1.1.** Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che per ogni  $x \in A \setminus \{x_0\}$  e  $\|x - x_0\| < \delta$  si abbia  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

**Definizione 5.1.2.** Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

se  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  tale che per ogni  $x \in A \setminus \{x_0\}$  e  $\|x - x_0\| < \delta$  si abbia  $f(x) > M$  ( $f(x) < -M$ ).

**Problema 5.1.1.** *Dimostrare che*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$$

**Soluzione.** (I metodo: mediante la definizione). Dobbiamo verificare che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ tale che } \|(x, y)\| < \delta \text{ si ha } e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} < \varepsilon.$$

Infatti basta osservare che

$$\begin{aligned} \|(x, y)\| < \delta &\iff \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \iff x^2 + y^2 < \delta^2 \iff -\frac{1}{x^2 + y^2} < -\frac{1}{\delta^2} \iff \\ &\iff e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} < e^{-\frac{1}{\delta^2}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

La definizione è quindi verificata per  $\delta < \sqrt{\left(-\frac{1}{\log \varepsilon}\right)}$ , se  $0 < \varepsilon < 1$ ,

altrimenti  $e^{-\frac{1}{\delta^2}} \leq 1 \forall \delta > 0$ .

(II metodo: maggiorazione della funzione con un'altra infinitesima.)  
Osserviamo che vale la maggiorazione

$$\frac{t}{e^t} < 1, \quad \forall t > 0.$$

Da cui ponendo  $t = \frac{1}{x^2+y^2}$  otteniamo

$$e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} < x^2 + y^2.$$

Anche per le funzioni di più variabili si può dare la definizione di funzione continua mediante il limite.

**Definizione 5.1.3.** *Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in A$ . Diremo che la funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Questa definizione permette di calcolare alcuni limiti come si vede dai seguenti esempi.

**Problema 5.1.2.** *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sin x + \cos y)$$

**Soluzione** Le funzioni  $f_1(x, y) = \sin x$ ,  $f_2(x, y) = \cos y$  sono continue in  $\mathbb{R}^2$  quindi anche  $f = f_1 + f_2$  è continua in  $\mathbb{R}^2$  (vedi paragrafo precedente). Il limite è quindi 1.

**Problema 5.1.3.** *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^3 + 2}{y^2 + y^4 + 1}$$

**Soluzione** Si ragiona come nell'esercizio precedente e si trova

$$\frac{x^2 + y^3 + 2}{y^2 + y^4 + 1} \rightarrow \frac{0^2 + 0^3 + 2}{0^2 + 0^4 + 1} = 2$$

quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Per i limiti di funzioni di più variabili valgono teoremi analoghi a quelli visti per le funzioni di una variabile (teorema sul limite di una somma, di un prodotto, di un rapporto). Ma anche il teorema del confronto (già applicato nel II metodo del Problema 5.1.1 In particolare vale un teorema di cambiamento di variabile che per comodità del lettore riportiamo qui sotto.

**Proposizione 5.1.1.** *Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Se avviene che*

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , e  $f(x) \neq L$  in un intorno di  $x_0$ ,
2. esiste  $\lim_{t \rightarrow L} g(t)$

*allora  $g \circ f$  converge per  $x$  che tende a  $x_0$  e*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow L} g(t)$$



Vediamo un'applicazione di questo risultato nel seguente limite.

**Problema 5.1.4.** *Calcolare il seguente limite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

**Soluzione** Poniamo

$$t = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(t) = \frac{\log(1+t)}{t}$$

Osserviamo che (tenendo presente la Proposizione 5.1.1)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

Quindi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$$

Nel caso di limiti di funzioni di più variabili non ha ovviamente senso parlare di limite destro o sinistro. Esiste però una naturale generalizzazione di questo concetto come si vede dalla seguente definizione

**Definizione 5.1.4.** *Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A_1 \subset A$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A_1$ . Poniamo*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } A_1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{A_1}(x)$$

Utilizzando questa definizione si dimostra facilmente la seguente proposizione.

**Proposizione 5.1.2.** *Siano  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A_1 \subset A$ ,  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ . Se esiste il seguente limite*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } A}} f(x)$$

allora esiste anche

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } A_1}} f(x)$$

e si ha che

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } A_1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } A}} f(x)$$

**Problema 5.1.5.** *Calcolare*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_1}} f(x, y), \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_2}} f(x, y)$$

dove

$$f(x, y) = \frac{x^5 + y^5}{x^2 y^2}$$

$$A_1 = \{(x, y) : 0 < \lambda_1 x \leq y \leq \lambda_2 x\}, \text{ con}$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty, \quad A_2 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}.$$

**Soluzione.**

$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_1}} f(x, y) = 0$ , perchè, essendo  $x > 0$  si ha:

$$\frac{x^5 + y^5}{x^2 y^2} \leq \frac{x^5 + \lambda_2^5 x^5}{x^4 \lambda_1^2} = \frac{x^5(1 + \lambda_2^5)}{x^4 \lambda_1^2} = x \frac{1 + \lambda_2^5}{\lambda_1^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Invece

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_2}} f(x, y) \quad \text{non esiste,}$$

perchè se poniamo  $A_\alpha = \{(x, y) : y = x^\alpha, x > 0\}$ , con  $\alpha > 0$ , si ha che  $A_\alpha \subset A_2$ . Mentre risulta

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_\alpha}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^5 + x^{5\alpha}}{x^{2+2\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3\alpha-2} (x^{5-5\alpha} + 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{3}{2} < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Al variare di  $\alpha$  varia  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_\alpha}} f(x, y)$ , quindi non può esistere  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_2}} f(x, y)$ , vedi Proposizione 5.1.2.

**Problema 5.1.6.** *Calcolare*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_1}} f(x, y), \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{su } A_2}} f(x, y)$$

dove

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{y^2 - x^2}$$

$$A_1 = \{(x, y) : y > \lambda|x| \text{ con } \lambda > 1\}, \quad A_2 = \{(x, y) : y > |x|\}.$$

**Soluzione.**

Osserviamo che su  $A_1$  vale la maggiorazione

$$\frac{\lambda^2 y^2 - y^2}{\lambda^2} \leq \frac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2}{\lambda^2} = y^2 - x^2.$$

Da questa essendo  $\lambda > 1$ , si ottiene

$$0 \leq \frac{x^2 y}{y^2 - x^2} \leq \frac{x^2 y \lambda^2}{\lambda^2 y^2 - y^2} \leq \frac{y^3}{(\lambda^2 - 1)y^2} = \frac{y}{\lambda^2 - 1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

# Chapter 6

## Continuità delle funzioni di più variabili

### 6.1 Simboli di Landau in $\mathbb{R}^n$

Il simbolo:  $o(*)$

Si supponga che  $f(x)$  e  $g(x)$  siano due funzioni definite su qualche sottoinsieme del tipo  $\{\|x\| \geq R\}$  di  $\mathbb{R}^n$ , tali che

$$f, g : \{\|x\| \geq R\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Supponiamo inoltre che

$$g(x) \neq 0 \tag{6.1.1}$$

per  $\|x\| \geq R$ . Diciamo che

$$f(x) \in o(g(x)) \text{ per } \|x\| \rightarrow \infty$$

se e solo se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

La notazione può anche essere usata per descrivere il comportamento di  $f$  nell'intorno di un punto  $a \in \mathbb{R}^n$ . Si supponga che  $f(x)$  e  $g(x)$  siano due funzioni definite in un intorno del tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < \varepsilon\}$$

e tali che

$$f, g : \{\|x - a\| < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Supponiamo inoltre che

$$g(x) \neq 0 \tag{6.1.2}$$

per  $\|x - a\| < \varepsilon$ ,  $x \neq a$ . Diciamo che

$$f(x) \in o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow a$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  siano due funzioni definite in un intorno del tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < \varepsilon\}$$

e tali che

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \{\|x - a\| < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{R}^m, g : \{\|x - a\| < \varepsilon\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$g(x) \neq 0 \tag{6.1.3}$$

per  $\|x - a\| < \varepsilon$ ,  $x \neq a$ . Diciamo che

$$f(x) \in o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow a$$

se e solo se

$$f_j(x) \in o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow a, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

**Esempio 6.1.1.** Per  $\|x\| \rightarrow \infty$  abbiamo

$$a > b \implies |x_j|^b = o(\|x\|^a), \quad a > 0 \implies |\log |x_j|| = o(\|x\|^a), \quad |x_j|^b = o(e^{\|x\|}). \tag{6.1.4}$$

**Esempio 6.1.2.** Per  $\|x\| \rightarrow 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  abbiamo

$$a < b \implies |x_j|^b = o(\|x\|^a). \tag{6.1.5}$$

**Proprietá del simbolo  $o(*)$ .**

Per semplicitá supponiamo che tutte le funzioni hanno codominio in  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 6.1.1.** *Sia  $x \rightarrow x_0$  in  $\mathbb{R}^n$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione definita in un intorno  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  di  $x_0$  che soddisfa (6.1.3) per  $x \neq x_0, x \in U$ . Allora abbiamo le seguenti proprietá:*

a)  $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x)), C \neq 0 \implies Co(g(x)) = o(Cg(x)) = o(g(x)),$

b) per ogni funzione  $f(x)$  definita in  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  che soddisfa (6.1.3) per  $x \neq x_0, x \in U$  vale l'inclusione

$$o(f(x))o(g(x)) \subseteq o(f(x)g(x)),$$

c) per ogni funzione  $f(x)$  definita in  $U$  che soddisfa (6.1.3) per  $x \neq x_0, x \in U$  vale l'inclusione

$$f(x)o(g(x)) \subseteq o(f(x)g(x)),$$

d) per ogni funzione  $f(x)$  definita in  $U$  che soddisfa  $|f(x)| \geq |g(x)|$  per  $x \neq x_0, x \in U$  vale l'inclusione

$$o(g(x)) \subseteq o(f(x)),$$

e)  $o(o(g(x))) \subseteq o(g(x)),$

f) per ogni funzione  $f(x)$  definita in  $U$  tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \neq 0$  allora

$$o(f(x)g(x)) = o(g(x)).$$

**Lemma 6.1.2.** *Se*

$$F(x) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e

$$G(x) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono due funzioni continui in 0 e tali che

$$\langle x, F(x) \rangle = \langle x, G(x) \rangle + o(\|x\|)$$

quando  $x \rightarrow 0$ , allora

$$F(0) = G(0).$$

**Problema 6.1.1.** Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono due funzioni tale che

$$f(x) = Cg(x) + o(g(x))$$

con  $C \neq 0$  allora

$$o(f(x)) = o(g(x)).$$

**Suggerimento.** Usare l'identità

$$f(x) = (C + o(1))g(x)$$

e il punto f) in Lemma 6.1.1.

### 6.1.1 Richiami sulla continuità, omogeneità e studio del rapporto tra due funzioni omogenei

Richordiamo alcune definizioni.

**Definizione 6.1.1.** Siano  $U \subset \mathbb{R}^n$ , aperto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in U$ .  $f$  si dice **continua** nel punto  $\mathbf{x}_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che se  $\mathbf{x} \in U$  e  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$  allora  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$

Per comodità, salvo avviso contrario, prenderemo come norma (vedi esempio 2.1.4)  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2$ .

La definizione 6.1.1 significa

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + o(1), \quad (6.1.6)$$

quando  $\|\mathbf{h}\| \searrow 0$ .

**Definizione 6.1.2.**  $f$  si dice **continua** su  $U$ , aperto in  $\mathbb{R}^n$  se è continua in ogni punto di  $U$ .

**Osservazione 6.1.1.** Per le funzioni continue di più variabili valgono gli stessi teoremi dimostrati per le funzioni continue di una variabile reale (teoremi sulla somma, sul prodotto, sul rapporto e composizione di funzioni).

**Definizione 6.1.3.** *Una funzione*

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

si chiama omogenea di ordine  $a \in \mathbb{R}$  se vale l'identita

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^a f(\mathbf{x}) \tag{6.1.7}$$

per ogni  $\lambda > 0$ , e ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$ .

**Esempio 6.1.3.** *Le funzioni*

$$f_1(x) = \|\mathbf{x}\|^{-1}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2,$$

$$x_1^3 + \|\mathbf{x}\|_2^3, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2,$$

$$x_2^4 + \|\mathbf{x}\|_3^4, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2,$$

dove

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p, 1 < p < \infty$$

sono omogenei di ordine  $-1, 3$  e  $4$ .

**Lemma 6.1.3.** *Se*

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é continua, omogenea di ordine  $a \in \mathbb{R}$  allora

$$f(\mathbf{x}) \leq C \|\mathbf{x}\|^a, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

quando  $x$  tende a zero.

*Idea della dimostrazione.* Si puo seguire l'idea della dimostrazione di Lemma 4.2.1 della equivalenza delle norme in  $\mathbb{R}^n$ .

La conitnuitá di  $f$  implica

$$\sup_{\|y\|=1} f(y) \leq C,$$

perche l'insieme  $\{\|y\| = 1\}$  é compatto. Quindi abbiamo

$$f(x) = \|x\|^a f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \|x\|^a \sup_{\|y\|=1} f(y) = C \|x\|^a. \tag{6.1.8}$$

□



**Lemma 6.1.4.** *Se*

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*é continua, omogenea di ordine  $a \in \mathbb{R}$  e*

$$\mathbf{x} \neq 0 \implies f(\mathbf{x}) > 0, \quad (6.1.9)$$

*allora*

$$f(\mathbf{x}) \sim \|\mathbf{x}\|^a$$

*quando  $x$  tende a zero.*

*Idea della dimostrazione.* Si puo seguire l'idea della dimostrazione di Lemma 4.2.1 della equivalenza delle norme in  $\mathbb{R}^n$ .

É sufficiente a vedere che la norma euclidea  $\|x\|^a$  ed equivalente a  $f(x)$  per  $\|x\|$  piccolo. La conitnuitá di  $f$  implica

$$\sup_{\|y\|=1} f(y) \leq C,$$

perche l'insieme  $\{\|y\| = 1\}$  é compatto. Quindi abbiamo

$$f(x) = \|x\|^a f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \|x\|^a \sup_{\|y\|=1} f(y) = C\|x\|^a \quad (6.1.10)$$

e rimane a verificare che

$$f(x) \geq C_1\|x\|^a. \quad (6.1.11)$$

Questa ultima identitá segue del fatto che (6.1.9) implica

$$\inf_{\|y\|=1} f(y) > 0$$

e dell'omogeneitá di  $f$ . □

**Domanda:** Dove si usava la piccolezza della norma  $\|\mathbf{x}\|$ ?

Consideriamo una funzione  $F(x_1, x_2)$  definita come segue

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{P_a(\mathbf{x})}{Q_b(\mathbf{x})}, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq 0; \\ c, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (6.1.12)$$

dove  $P_a(\mathbf{x}), Q_b(\mathbf{x})$  sono funzioni continui e omogenei di ordine  $a > 0$  e  $b > 0$ .

**Lemma 6.1.5.** *Se la funzione  $Q_b(\mathbf{x})$  é tale che*

$$\|y\| = 1 \implies Q_b(y) \neq 0,$$

*e  $P_a(\mathbf{x}), Q_b(\mathbf{x})$  sono funzioni continui e omogenei di ordine  $a > 0$  e  $b > 0$ , allora la funzione  $F(\mathbf{x})$  definita in (6.1.12) soddisfa le proprietá:*

- a) se  $a > b$  e  $c = 0$  la funzione  $F$  é continua;*
- b) se  $a < b$  la funzione  $F$  non é limitata o  $F(x) = 0$  in piccolo intorno di 0;*
- c) se  $a = b$ , allora il limite*

$$L(\theta) = \lim_{r \searrow 0} F(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

*sempre esiste e*

$$L(\theta) = \frac{P_a(\cos \theta, \sin \theta)}{Q_b(\cos \theta, \sin \theta)};$$

- d) se  $a = b$ , ed esistono  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$  tali che*

$$L(\theta_1) \neq L(\theta_2),$$

*allora  $F$  non é continua;*

- e) se  $a = b$  e per ogni  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$  abbiamo*

$$L(\theta_1) = L(\theta_2) = L,$$

*allora  $F$  é costante.*

*Idea della dimostrazione.* a) segue della disequazione (vedi Lemma 6.1.3)

$$\left| \frac{P_a(\mathbf{x})}{Q_b(\mathbf{x})} \right| \leq C \|x\|^{a-b} = o(1),$$

quando  $a > b$  e  $\mathbf{x} \rightarrow 0$ . Le proprietá b),c)...e) si possano vedere usando l'identitá

$$F(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^{a-b} F(\cos \theta, \sin \theta).$$

□

## 6.2 Esercizi sulla omogeneità e continuità

**Problema 6.2.1.** *Se*

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*è continua, omogenea di ordine  $a \in \mathbb{R}$  allora valgono le seguenti proprietà:*

a) *se  $a > 0$  allora*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) = 0$$

*e possiamo estendere  $f$  come funzione continua in tutto spazio  $\mathbb{R}^n$ ;*

b) *se  $a < 0$  la funzione  $f$  non è limitata o  $f(x) \equiv \text{cost}$ ;*

c) *se  $a = 0$  e limite*

$$L(\theta) = \lim_{r \searrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$$

*sempre esiste e se dipende da  $\theta$ , allora il limite*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} f(x)$$

*della funzione non esiste.*

**Problema 6.2.2.** *Se*

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, n \geq 2$$

*è continua, omogenea di ordine  $a \in \mathbb{R}$  provare a generalizzare il problema 6.2.1.*

**Problema 6.2.3.** *Sia*

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2}, & \text{se } x_2 \neq 0; \\ c, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (6.2.13)$$

*Provare a rispondere alle domande:*

a) *Per quali  $c \in \mathbb{R}$  la funzione è omogenea?*

- b) Per quali  $c \in \mathbb{R}$  la funzione é continua in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ?  
 c) Per quali  $c \in \mathbb{R}$  la funzione é continua in

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0); x_1 \in \mathbb{R}\}?$$

**Problema 6.2.4.** Sia  $P_a(\mathbf{x}), Q_b(\mathbf{x})$  sono funzioni continui e omogenei di ordine  $a > 0$  e  $b > 0$ , tali che

$$\|y\| = 1 \implies Q_b(y) \neq 0.$$

Allora la funzione  $F(\mathbf{x})$  definita

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{P_a(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^a)}{Q_b(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^b)}, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq 0; \\ c, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (6.2.14)$$

soddisfa le proprietá:

- a) se  $a > b$  e  $c = 0$  la funzione  $F$  é continua;  
 b) se  $a < b$  ed esiste  $y_0$  con  $\|y_0\| = 1$  tale che  $P_a(y_0) \neq 0$ , allora la funzione  $F$  non é limitata in piccolo intorno di 0;  
 c) se  $a < b$  e  $P_a(y) \equiv 0$ , allora

$$F(x) = o(\|x\|^{a-b}).$$

*Suggerimento.* Abbiamo la relazione

$$\frac{P_a(r \cos \theta, r \sin \theta) + o(r^a)}{Q_b(r \cos \theta, r \sin \theta) + o(r^b)} = r^{a-b} \left( \frac{P_a(\cos \theta, \sin \theta)}{Q_b(\cos \theta, \sin \theta)} + o(1) \right).$$

Studiare i due casi:

$$\exists \theta \in [0, 2\pi) \text{ tale che } \frac{P_a(\cos \theta, \sin \theta)}{Q_b(\cos \theta, \sin \theta)} \neq 0 \quad (6.2.15)$$

o

$$\frac{P_a(\cos \theta, \sin \theta)}{Q_b(\cos \theta, \sin \theta)} = 0, \text{ per ogni } \theta \in [0, 2\pi) \quad (6.2.16)$$

□

**Problema 6.2.5.** *Sia*

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \log(1 + x_1^4)}{x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2}, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq 0; \\ c, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (6.2.17)$$

*Studiare la continuità di  $F$  in origine al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Problema 6.2.6.** *Sia*

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) + \log(1 + mx_2^4) - x_1^2 \sin x_1^2}{x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 x_2^2}, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq 0; \\ c, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (6.2.18)$$

*Studiare la continuità di  $F$  nell'origine al variare di  $c \in \mathbb{R}$  e  $m \geq 0$ .*

**Problema 6.2.7.** *Sia  $P_a(\mathbf{x}), Q_b(\mathbf{x})$  sono funzioni continui e omogenei di ordine  $a > 0$  e  $b > 0$ , tali che*

$$\|y\| = 1 \implies Q_b(y) \neq 0.$$

*Allora la funzione  $F(\mathbf{x})$  definita*

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{P_a(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^a)}{Q_b(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x}\|^b)}, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \neq 0; \\ c, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (6.2.19)$$

*soddisfa le proprietà:*

a) *se  $a = b$ , allora il limite*

$$L(\theta) = \lim_{r \searrow 0} F(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

*sempre esiste ed è*

$$L(\theta) = \frac{P_a(\cos \theta, \sin \theta)}{Q_b(\cos \theta, \sin \theta)};$$

b) *se  $a = b$ , ed esistono  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$  tali che*

$$L(\theta_1) \neq L(\theta_2),$$

*allora  $F$  non è continua;*

c) se  $a = b$  e per ogni  $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$  abbiamo

$$L(\theta_1) = L(\theta_2) = L,$$

allora  $F$  é continua se e solo se  $c = L$ .

*Suggerimento.* Quando  $a = b$  abbiamo la relazione

$$\frac{P_a(r \cos \theta, r \sin \theta) + o(r^a)}{Q_a(r \cos \theta, r \sin \theta) + o(r^b)} = \left( \frac{P_a(\cos \theta, \sin \theta)}{Q_a(\cos \theta, \sin \theta)} + o(1) \right).$$

□

### 6.3 Altri esercizi sulla continuit  delle funzioni di pi  variabili

Proponiamo a titolo di esercizio alcune elementari propriet  relative alle funzioni di pi  variabili.

#### Problema 6.3.1.

1. Sia  $f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A_1 \subset \mathbb{R}$ , una funzione continua in  $x_0 \in A_1$ , allora la funzione  $F : A_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $F(x, y) = f(x)$  è continua in  $(x_0, y)$ , per ogni  $y \in \mathbb{R}$ .
2. Sia  $g : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A_2 \subset \mathbb{R}$ , una funzione continua in  $y_0 \in A_2$ , allora la funzione  $G : A_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da  $G(x, y) = g(y)$  è continua in  $(x, y_0)$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Siano  $f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $x_0 \in A_1$ , e  $g : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in  $y_0 \in A_2$ , allora le funzioni

$$H(x, y) = f(x)g(y), \quad \Gamma(x, y) = f(x) + g(y)$$

definite su  $A_1 \times A_2$  sono continue in  $(x_0, y_0)$ .

#### Soluzioni

1. Verifichiamo che:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  : se  $(x, y) \in A_1 \times \mathbb{R}$  e  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  allora  $\|F(x, y) - F(x_0, y_0)\| < \varepsilon$ . Infatti:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $\forall x \in A_1$  che verifichi  $|x - x_0| < \delta$  si ha  $\|F(x, y) - F(x_0, y_0)\| = \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ , per la continuità di  $f$  in  $x_0$ . Inoltre vale anche la maggiorazione  $|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ .
2. Come 1.
3. Tenuto conto di 1. e 2. si ha che:

$$H(x, y) = F(x, y) G(x, y), \quad \Gamma(x, y) = F(x, y) + G(x, y),$$

quindi  $H$  e  $\Gamma$  sono rispettivamente prodotto e somma di funzioni continue in  $(x_0, y_0)$ , tenendo conto dell'Osservazione 6.1.1 otteniamo la tesi.

Come conseguenza delle proposizioni sopra dimostrate otteniamo i seguenti risultati.

**Proposizione 6.3.1.**

1.  $(x, y) \longrightarrow x^h y^k$  è continua in  $\mathbb{R}^2$  per ogni  $h, k \in \mathbb{N}$ ;
2.  $(x, y) \longrightarrow x^\alpha y^\beta$  è continua in  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;

**Proposizione 6.3.2.** *Il polinomio*

$$P(x, y) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^m a_{hk} x^h y^k, \quad a_{hk} \in \mathbb{R},$$

è una funzione continua in  $\mathbb{R}^2$ .

Con procedimento analogo al precedente si prova la proposizione seguente.

**Proposizione 6.3.3.** *Il polinomio*

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{h_n=0}^{m_n} a_{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \cdots x_n^{h_n}, \quad a_{h_1 \dots h_n} \in \mathbb{R},$$

è una funzione continua in  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 6.3.1.** Se  $x \rightarrow f(x, y)$  è continua in  $x_0$ , per ogni  $y$ , e  $y \rightarrow f(x, y)$  è continua in  $y_0$ , per ogni  $x$ , non è detto che la funzione  $(x, y) \rightarrow f(x, y)$  sia continua in  $(x_0, y_0)$ , come si vede dall'esempio seguente.

**Esempio 6.3.1.** La funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

non è continua in  $(0, 0)$ .

Infatti  $f(x, 0) = 0$  e  $f(0, y) = 0$ . Mentre:

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

quindi esiste  $M > 0$  tale che per ogni intorno  $U(0, 0)$  esiste  $(x, y) \in U(0, 0)$  che verifica la disuguaglianza  $|f(x, y)| > M$ . Infatti basta prendere  $M = \frac{1}{4}$ , per  $\lambda = 1$  si ha  $f(x, x) = \frac{1}{2}$ ,  $\forall x \neq 0$ .

**ESERCIZI: studiare la continuità delle seguenti funzioni.**

**Esercizio 6.3.1.**

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Esercizio 6.3.2.**

$$f_2(x, y) = \sin x^2 y$$

**Esercizio 6.3.3.**

$$f_3(x, y) = \log(1 + x^4 y^2)$$



**Esercizio 6.3.4.**

$$f_4(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^6 + 1}$$

**Esercizio 6.3.5.**

$$f_5(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 1 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 6.3.6.**

$$f_6(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 6.3.7.**

$$f_7(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 6.3.8.**

$$f_8(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 6.3.9.**

$$f_9(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x+y} - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 6.3.10.**

$$f_{10}(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

**RISPOSTE ad alcuni esercizi.**

**Esercizio 6.3.1.** La funzione  $f_1$  si può considerare come prodotto di composizione di due funzioni:  $f_1 = \phi_1 \circ \phi_2$ , dove  $\phi_1(t) = \sqrt{t}$ , e  $\phi_2(x, y) = x^2 + y^2$ . La funzione  $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  è continua per la Proposizione (6.3.2) essendo un polinomio, inoltre anche  $\phi_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  è continua. Quindi  $f_1$  è continua perchè composizione di due funzioni continue.

**Esercizio 6.3.2.**  $f_2 = \gamma_1 \circ \gamma_2$ , dove  $\gamma_1(t) = \sin t$ ,  $\gamma_2(x, y) = x^2 y$ .  $\gamma_1$  è ovviamente continua su  $\mathbb{R}$  mentre  $\gamma_2$  è un polinomio, quindi è continua su  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 6.3.3.**  $f_3 = g_1 \circ g_2$ , dove  $g_1(t) = \log t$ ,  $g(x, y) = 1 + x^4 y^2$ ,  $g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , mentre  $g_1 : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1, g_2$  sono funzioni continue.

**Esercizio 6.3.4.**  $f_4 = \frac{h_1}{h_2}$ , dove  $h_1(x, y) = x y^2$ ,  $h_2(x, y) = x^2 + y^6 + 1$ ,  $h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ,  $h_1, h_2$  sono polinomi,  $h_2 \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , quindi  $f_4$  è continua perchè rapporto di funzioni continue, con denominatore che sempre diverso da 0.

**Esercizio 6.3.5.** Consideriamo la successione di punti di  $\mathbb{R}^2$  :  $\left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  si ha che  $\left( 0, \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ . Osserviamo che  $f_5 = \left( 0, \frac{1}{n} \right) = 0$ , mentre  $f_5(0, 0) = 1$ . Preso  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  per ogni  $S \left( (0, 0), \frac{2}{n} \right)$  <sup>(1)</sup> esiste una successione di punti  $(x_n, y_n) = \left( 0, \frac{1}{n} \right) \in S \left( (0, 0), \frac{2}{n} \right)$

---

<sup>1</sup> $S((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\|_2 \leq r\}$

tale che:

$$|f_5(x_n, y_n) - f_5(0, 0)| > \frac{1}{2},$$

quindi  $f_5$  non è continua nel punto  $(0, 0)$ . Sia  $x \neq 0$  consideriamo la successione di punti di  $\mathbb{R}^2$ :  $\left\{ \left( x, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  si ha che  $\left( x, \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, 0)$ .

Osserviamo che  $f_5 \left( x, \frac{1}{n} \right) = nx$ , mentre  $f_5(x, 0) = 1$ . Preso  $\varepsilon = 1$  per ogni  $S \left( (x, 0), \frac{2}{n} \right)$  esiste una successione di punti  $(x_n, y_n) = \left( x, \frac{1}{n} \right) \in S \left( (x, 0), \frac{2}{n} \right)$  tale che:

$$|f_5(x_n, y_n) - f_5(x, 0)| = |nx - 1| > 1, \quad \forall n > \frac{2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Quindi  $f_5$  non è continua nei punti  $(x, 0)$ . Se invece  $y \neq 0$  si dimostra facilmente che  $f_5$  è continua ragionando come nell'Esercizio 6.3.4.

### Esercizio 6.3.6.

$f_6 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ , dove  $\sigma_1(t) = \frac{\sin t}{t}$  se  $t \neq 0$ ,  $\sigma_1(0) = 1$ ,  $\sigma_2(x, y) = x^2 + y^2$ .  $\sigma_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ .  $\sigma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni continue, quindi  $f_6$  è continua in  $\mathbb{R}^2$  perchè composizione di funzioni continue.

**Esercizio 6.3.7.** Se  $(x, y) \neq 0$  si ha che  $f_7 = \rho_1(\rho_2 \circ \rho_3)$ , dove  $\rho_1(x, y) = xy$ , è una funzione continua di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ ;  $\rho_2(t) = \log t$  è una funzione continua di  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  in  $\mathbb{R}$ ;  $\rho_3(x, y) = x^2 + y^2$  è una funzione continua di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^+$ . Quindi  $f_7$  risulta continua nei punti  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Se  $(x, y) = (0, 0)$  verifichiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che se } \|(x, y) - (0, 0)\|_2 < \delta \\ \text{e } (x, y) \neq (0, 0) \text{ allora } |xy \log(x^2 + y^2) - 0| < \varepsilon$$

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che se } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ e } (x, y) \neq (0, 0) \\ \text{allora } |xy \log(x^2 + y^2)| < \varepsilon$$

Quest'ultima proposizione segue facilmente dalle seguenti:

$$|xy \log(x^2 + y^2)| < \left| \frac{x^2 + y^2}{2} \log(x^2 + y^2) \right| < \varepsilon.$$

(Si tenga presente la maggiorazione  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .)

Mentre da  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \log t = 0$ , segue  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $|t| < \delta^2$  e  $t \neq 0$  allora  $t \log t < \frac{\varepsilon}{2}$  da cui, ponendo  $t = x^2 + y^2$ , si ottiene la tesi.

**Esercizio 6.3.8.** Sia  $(x, y) \neq (0, 0)$ , posto  $f_8 = \frac{h_1}{h_2}$ , dove  $h_1(x, y) = x$  e  $h_2(x, y) = x^2 + y^4$  sono funzioni continue, si ha che  $f_8$  è continua in ogni punto  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Esaminiamo il caso in cui  $(x, y) = (0, 0)$ .

Consideriamo la successione di punti di  $\mathbb{R}^2$  :  $\left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  si ha che

$\left( 0, \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ . Osserviamo che  $f_8 \left( 0, \frac{1}{n} \right) = 0$ , mentre  $f_8(0, 0) =$

1. Preso  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  si ha che per ogni  $S \left( (0, 0), \frac{2}{n} \right)$  esiste una successione

di punti  $(x_n, y_n) = \left( 0, \frac{1}{n} \right) \in S \left( (0, 0), \frac{2}{n} \right)$  tale che:

$$|f_8(x_n, y_n) - f_8(0, 0)| > \frac{1}{2},$$

quindi  $f_8$  non è continua nel punto  $(0, 0)$ .

**Esercizio 6.3.9.** Se  $(x, y) \neq (0, 0)$  allora  $f_9 = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ , dove  $\omega_1(x, y) = e^{x+y} - 1$ ,  $\omega_2(x, y) = x^2 + y^2$  sono funzioni continue, è una funzione continua su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Consideriamo il caso  $(x, y) = (0, 0)$  prendendo la successione di punti di  $\mathbb{R}^2$  :  $\left\{ \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  si ha che

$\left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ . Osserviamo che  $f_9 \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = 0$ , mentre

$f_9(0, 0) = 1$ . Preso  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  si ha che per ogni  $S \left( (0, 0), \frac{2}{n} \right)$  esiste una

successione di punti  $(x_n, y_n) = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in S\left((0, 0), \frac{2}{n}\right)$  tale che:

$$|f_9(x_n, y_n) - f_9(0, 0)| > \frac{1}{2},$$

quindi  $f_9$  non è continua nel punto  $(0, 0)$ .

**Esercizio 6.3.10.**  $f_{10} = \tau_1 \circ \tau_2$  dove  $\tau_1 = \sqrt{t}$ ,  $\tau_2(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ .  $\tau_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è continua.  $\tau_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  è continua. Quindi  $f_{10}$  è continua perchè composizione di funzioni continue.

**Problema 6.3.2.** Sia  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  sono due funzioni uniformemente continue in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Vedere se è vera la conclusione  $f(x, y)g(x, y)$  è uniformemente continua.

*Soluzione.* Le funzioni

$$f(x, y) = x + y, g(x, y) = \sin(x + y)$$

sono due funzioni uniformemente continue in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , ma la funzione

$$(x + y) \sin(x + y)$$

non è uniformemente continua. □

**Problema 6.3.3.** Studiare la continuità della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2}$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e con  $f(0, 0) = 0$ .

**Problema 6.3.4.** Studiare la continuità della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con

$$f(x, y) = \frac{xy \sin y}{x^2 + y^2}$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e con  $f(0, 0) = 0$ .

**Problema 6.3.5.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2 - x_1 |x_2|^\alpha}{x_1^2 + x_2^2}$$

se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$  la funzione è differenziabile.

**Problema 6.3.6.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 |x_2|^\alpha}{x_1^4 + x_2^4}$$

se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$  si ha  $f_\alpha \in C^0(\mathbf{R}^2)$ .

**Problema 6.3.7.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 |x_2|^\alpha}{x_1^4 + x_2^4}$$

se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$  la funzione è limitata.

**Problema 6.3.8.** Studiare la continuità e differenziabilità della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^4 - x \sin(x^2 + y^2)}{y^2 - x + \ln(1 + x + y^2)}$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e con  $f(0, 0) = 0$ .

**Problema 6.3.9.** Studiare la continuità della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con

$$f(x, y) = \frac{y^3 + x^4 - x \sin(y^2)}{x^2 - y + \ln(1 + y + x^3)}$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e con  $f(0, 0) = 0$ .

**Problema 6.3.10.** *Sia*

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{t-p \sin x}{t^2-x^2}, & \text{se } t \neq \pm x ; \\ c, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (6.3.20)$$

*Studiare*

- a) *la continuita della funzione nel punto (1, 1) al variare dei parametri  $c, p \in \mathbb{R}$ ;*
- b) *la continuita della funzione nel punto (0, 0) al variare dei parametri  $c, p \in \mathbb{R}$ .*

**Problema 6.3.11.** *Sia*

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{t-p \sin(\sqrt{x_1^2+x_2^2})}{t^2-x_1^2-x_2^2}, & \text{se } t^2 = x_1^2 + x_2^2 ; \\ c, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (6.3.21)$$

*Studiare*

- a) *la continuita della funzione nel punto (1, 1, 0) al variare dei parametri  $c, p \in \mathbb{R}$ ;*
- b) *la continuita della funzione nel punto (1, 0, 1) al variare dei parametri  $c, p \in \mathbb{R}$ ;*
- c) *la continuita della funzione nel punto (0, 0, 0) al variare dei parametri  $c, p \in \mathbb{R}$ .*

# Chapter 7

## Differenziabilità delle funzioni di più variabili

### 7.1 Differenziabilità e derivabilità della funzioni di più variabili

Definizione della differenziabilità

Una funzione:

$$\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definita su un insieme aperto dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  é detta differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  del dominio se esiste una applicazione lineare:

$$\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che valga la proprietá:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|).$$

Tale condizione si puó scrivere in modo equivalente:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{L}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

Se la funzione  $\mathbf{F}$  é differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , l'applicazione  $\mathbf{L}$  é rappresentata dalla matrice jacobiana  $J_F$ .



Notazioni per l'applicazione  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0), D\mathbf{F}(x_0), \dots$$

Il vettore:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = J_F\mathbf{h}$$

si chiama differenziale (esatto) di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{x}_0$  ed  $\mathbf{L}(\mathbf{x}_0)$  viene detto derivata o anche derivata totale della funzione  $\mathbf{F}$ .

La funzione  $\mathbf{F}$  é differenziabile se lo é in ogni punto del dominio.

**Esempio 7.1.1.** Sia  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  due vettori fissi. Si consideri la funzione (lineare in  $t$ )

$$G(t) : t \in [-1, 1] \longrightarrow G(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}.$$

Abbiamo

$$G'(t) = \mathbf{h}.$$

**Gradiente in  $\mathbb{R}^n$ .**

Se la funzione:

$$\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}$$

definita su un insieme aperto dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  é differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  del dominio allora

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|).$$

dove

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

é un operatore lineare.

**Lemma 7.1.1.** Se

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

é un operatore lineare allora esiste unico  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$L(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Così abbiamo

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h} \rangle$$

il vettore  $\mathbf{v}$  si chiama gradiente di  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{x}_0$ .

Notazione per il gradiente

$$\mathbf{v} = \nabla \mathbf{F}(x_0).$$

### Derivate parziali

Sia

$$\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione definita su un insieme aperto dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

Dette

$$\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$$

e

$$\{\mathbf{u}_i\}_{1 \leq i \leq m}$$

le basi canoniche di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente, la funzione può essere scritta nel seguente modo:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m F_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U.$$

La componente  $j$ -esima della funzione è allora:

$$F_j(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_j \quad 1 \leq j \leq m.$$

Si definisce derivata parziale di  $F_j$  rispetto alla variabile  $x_k$  il limite:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_j(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - F_j(\mathbf{x})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_j(x_1, x_2, \dots, x_k + t, \dots, x_n) - F_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t} \end{aligned}$$

**Il gradiente e le derivate parziali**

Sia

$$\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione definita su un insieme aperto dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . e

$$\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$$

la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $\mathbf{F}$  é differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  del dominio allora

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{L}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|).$$

dove

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle$$

e  $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  é il gradiente della funzione nel punto  $\mathbf{x}_0$ . Prendendo  $\mathbf{h} = te_j$  si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + te_j) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = t \langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), e_j \rangle + o(t)$$

e usando la definizione della derivata parziale otteniamo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + te_j) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = t \partial_{x_j} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + o(t)$$

così abbiamo dimostrato il seguente.

**Lemma 7.1.2.** *Se  $\mathbf{F}$  é differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  allora valgono le relazioni*

$$\langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), e_j \rangle = \partial_{x_j} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0),$$

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) e_j,$$

e

$$\langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) h_j,$$

dove

$$h_j = \langle \mathbf{h}, e_j \rangle.$$

dove

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

é un operatore lineare.

## Derivata direzionale

Sia

$$f(\mathbf{x}) : x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R},$$

una funzione (scalare) con  $U$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$ . La derivata direzionale di  $f$  lungo un vettore unitario

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

é definita dal limite:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

**Lemma 7.1.3.** *Se la funzione  $f$  é differenziabile in  $\mathbf{x}$ , allora la derivata direzionale esiste lungo ogni vettore unitario  $\mathbf{v}$  e si ha:*

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$$

dove  $\nabla$  al secondo membro rappresenta il gradiente, e  $\cdot$  il prodotto scalare euclideo.

*Dimostrazione.* Abbiamo la relazione

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + t\nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) + o(t),$$

secondo la definizione della differenziabilita di  $f$ . La definizione della derivata direzionale ci da

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + tD_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) + o(t),$$

quindi

$$t\nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = tD_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) + o(t)$$

e possiamo scrivere

$$\nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) + o(1) \implies \nabla f(\mathbf{x})(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}).$$

□

## 7.2 Proprietà delle funzioni differenziabili

**Lemma 7.2.1.** *Ogni funzione differenziabile in punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e continua in  $x_0$ .*

**Lemma 7.2.2.** *Se  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora essa ammette tutte le derivate parziali in  $\mathbf{x}_0$ .*

Il Lemma precedente segue dal Lemma 7.1.2.

Viceversa non è sempre vero che l'esistenza delle derivate parziali in un punto garantisca anche la differenziabilità nel punto. Ad esempio, la funzione reale di due variabili reali:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

è continua ed ammette derivate parziali ovunque.

**Problema 7.2.1.** *Verificare che la funzione*

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

*non è differenziabile in origine.*

*Suggerimento.* La funzione ha derivate parziali ovunque, ma il fatto che in  $(0, 0)$  non siano continue impedisce la sua differenziabilità in  $(0, 0)$ . Infatti, si verifica che il limite del rapporto incrementale calcolato nell'origine lungo una direzione qualsiasi esiste finito; ma prendendo in considerazione, ad esempio, le derivate parziali in coordinate polari, si nota come non abbiano valore unico in un intorno di  $(0, 0)$ , ma varino in funzione della direzione di avvicinamento all'origine.  $\square$

**Lemma 7.2.3.** *(Il teorema del differenziale totale) Se  $f$  è di classe  $C^1$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ , cioè se esistono tutte le derivate parziali di  $f$  e queste sono funzioni continue in  $\mathbf{x}_0$ , allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ .*

*Dimostrazione:* solo per  $n = 2$ . Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ , sia  $\mathbf{x}^* \in U$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che vi sia una palla

$$B(\mathbf{x}^*, r) \subseteq U$$

tale che esistano tutte le 2 derivate parziali in  $B(\mathbf{x}, r)$  e

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{x}), \partial_{x_2} f(\mathbf{x})$$

sono continui in  $\mathbf{x}^*$ . Vogliamo dimostrare che la funzione è differenziabile in  $\mathbf{x}^*$ . Per ogni

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2)$$

poniamo

$$\mathbf{h}^* = (0, h_2)$$

e possiamo scrivere

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) + f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) - f(\mathbf{x}^*),$$

applicando il teorema di Lagrange abbiamo

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) = \partial_{x_1} f(\xi, x_2^* + h_2)h_1,$$

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}^*) - f(\mathbf{x}^*) = \partial_{x_2} f(x_1^*, \eta)h_2,$$

dove  $\xi = x_1^* + O(h_1), \eta = x_2^* + O(h_2)$ . La continuità di  $\partial_{x_j} f, j = 1, 2$  in  $(x_1^*, x_2^*)$  implica

$$\partial_{x_1} f(\xi, x_2^* + h_2) = \partial_{x_1} f(\mathbf{x}^*) + o(1)$$

e

$$\partial_{x_2} f(x_1^*, \eta) = \partial_{x_2} f(\mathbf{x}^*) + o(1)$$

così otteniamo

$$\begin{aligned} & \partial_{x_1} f(\xi, x_2^* + h_2)h_1 + \partial_{x_2} f(x_1^*, \eta)h_2 = \\ & = \partial_{x_1} f(\mathbf{x}^*)h_1 + \partial_{x_2} f(\mathbf{x}^*)h_2 + o(\|\mathbf{h}\|). \end{aligned}$$

L'identità

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) = \partial_{x_1} f(\mathbf{x}^*)h_1 + \partial_{x_2} f(\mathbf{x}^*)h_2 + o(\|\mathbf{h}\|)$$

mostra la differenziabilità di  $f$  in  $\mathbf{x}^*$ . □

### 7.2.1 Funzioni Lipschiziani e Hölderiani

**Definizione 7.2.1.** Una funzione  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice *lipschitziana* su  $U$  se esiste una costante  $C = C(U)$  tale che:

$$\sup_{x,y \in U, x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq C.$$

**Lemma 7.2.4.** Se  $U$  é aperto in  $\mathbb{R}^n$  e se la funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ha tutte le derivate parziali che sono continui in  $U$ , allora per ogni compatto  $K \subset U$  abbiamo  $f$  é Lipschiziana in  $K$ , cioè esiste  $C = C(K)$  tale che

$$\sup_{x,y \in K, x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq C.$$

La dimostrazione segue della definizione della differenziabilità e del Teorema della differenziabilità totale (Lemma 7.2.3).

**Definizione 7.2.2.** Una funzione  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  soddisfa la condizione di Hölder di ordine  $\alpha \in (0, 1]$ , se esiste una costante  $C = C(U) > 0$  tale che

$$\|f(x) - f(y)\| = C\|x - y\|^\alpha$$

per ogni  $x, y \in U$ .

Il numero  $\alpha$  si dice esponente di Hölder, mentre  $f$  si dice Hölder-continua o hölderiana.

Se  $\alpha = 0$ , tale condizione si riduce alla limitatezza della funzione. Le uniche funzioni che soddisferebbero la condizione di Hölder per  $\alpha > 1$  sono quelle costanti, dunque tale caso é di poco interesse.

Se  $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$  ogni funzione hölderiana con esponente  $\beta$  é anche hölderiana con esponente  $\alpha$ . Dunque tutte le funzioni lipschitziane sono  $\alpha$ -hölderiane.

**Esempio 7.2.1.** Sia  $f(x) = \|x\|, x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$  dove  $\|x\|$  é la norma euclidea. La funzione é Lipschiziana, derivabile in ogni direzione, ma non é differenziabile nel origine.

**Esempio 7.2.2.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} xy^2/(x^2 + y^2), & \text{se } (x, y) \neq 0; \\ 0, & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

*La funzione é Lipschiziana, derivabile in ogni direzione, ma non é differenziabile nel origine.*

### Derivata della funzione composta

Si considerino due funzioni

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$$

e

$$g : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow W \subseteq \mathbb{R}^k,$$

dove  $U, V, W$  sono aperti. La funzione composta

$$H(x) = g(f(x)) : U \longrightarrow W$$

é ben definita.

**Theorem 7.2.1.** *Se  $f$  é differenziabile in  $x_0$  e  $g$  é differenziabile in  $y_0 = f(x_0)$  allora la funzione composta  $H$  é differenziabile in  $x_0$  e abbiamo l'identitá*

$$H'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

*Dimostrazione.* Differenziabilitá di  $f, g$  rispettivamente in  $x_0$  e  $y_0$  si puo esprimere con le relazioni

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(\|h\|), \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

$$g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0)k + o(\|k\|), \quad k \in \mathbb{R}^m.$$

Possiamo scegliere  $k \in \mathbb{R}^m$  tale che

$$y_0 + k = f(x_0 + h) \implies k = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(\|h\|).$$

Usando la proprietá d) di Lemma 6.1.1 si trova

$$\|k\| \leq C\|h\| \implies o(\|k\|) \subseteq o(\|h\|)$$



quindi

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)f'(x_0)h + o(\|h\|).$$

Il teorema é dimostrato.  $\square$

**Esempio 7.2.3.** *Sia*

$$f(\mathbf{x}) : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(dove  $U$  é aperto) e

$$G(t) : t \in [-1, 1] \longrightarrow G(t) \in \mathbb{R}^n$$

sono due funzioni differenziabili ( $G$  é differenziabile in  $t_0 \in (-1, 1)$ ,  $f(\mathbf{x})$  é differenziabile in  $\mathbf{x}_0 = G(t_0)$ ). La funzione composta

$$\varphi(t) = f(G(t)) : t \in (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (7.2.1)$$

é differenziabile in  $t_0$  e

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), G'(t_0) \rangle.$$

**Esempio 7.2.4.** *Sia*

$$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

e

$$G(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Allora la funzione composta

$$H(\mathbf{x}) = G(f(\mathbf{x}))$$

ha le derivate parziali

$$\partial_{x_j}(G(f(\mathbf{x}))) = \sum_{k=1}^3 (\partial_{y_k} G)(f(\mathbf{x})) \partial_{x_j} f_k(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, 3,$$

o in modo equivalente

$$\partial_j H = \sum_{k=1}^3 \partial_k G \partial_j f_k.$$

**Esempio 7.2.5.** *Sia*

$$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*é una funzione differenziabile in  $\mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

e

$$g(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

*é la funzione*

$$g(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^2.$$

*Il differenziale di  $f(x)$  é*

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f'_1(x) \\ f'_2(x) \\ f'_3(x) \end{pmatrix}.$$

*La funzione  $g(\mathbf{y})$  é derivabile e ha differenziale*

$$g'(\mathbf{y})h = 2\langle \mathbf{y}, h \rangle$$

*Cosí la funzione composta  $H(x) = g(f(x))$  ha derivata*

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{d}{dx}g(f(x)) = 2\langle f(x), f'(x) \rangle.$$

**Esempio 7.2.6.** *Sia*

$$g_1(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

*é la funzione*

$$g_1(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^2$$

e sia

$$g_2 : s \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

*e' una funzione differenziabile. Il differenziale di  $g_1(\mathbf{y})$  é*

$$g'_1(\mathbf{y})h = 2\langle \mathbf{y}, h \rangle$$

Così la funzione composta  $H(y) = g_2(\|y\|^2) = g_2(g_1(y))$  ha derivata

$$H'(y)h = D_y H(y)h = g_2'(\|y\|^2)2\langle y, h \rangle.$$

Per esempio se

$$g_2(s) = (b^2 + s^2)^{a/2}$$

abbiamo

$$D_y ((b^2 + \|y\|^2)^{a/2}) h = a ((b^2 + \|y\|^2)^{a/2-1}) \langle y, h \rangle. \quad (7.2.2)$$

**Esempio 7.2.7.** Sia

$$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

è una funzione differenziabile in  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

e

$$g(y) : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

è la funzione

$$g(y) = (b^2 + \|y\|^2)^{a/2}.$$

La funzione composta

$$H(x) = (b^2 + \|f(x)\|^2)^{a/2}$$

con  $b > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$  è differenziabile e la sua derivata può essere calcolata usando (7.2.2). In questo modo troviamo

$$H'(x) = \frac{d}{dx} ((b^2 + \|f(x)\|^2)^{a/2}) = a ((b^2 + \|f(x)\|^2)^{a/2-1}) \langle f'(x), f(x) \rangle. \quad (7.2.3)$$

### 7.3 Funzioni omogenee

Sia  $\lambda, k \in \mathbb{R}$  con  $\lambda > 0$ . Una funzione  $f(x_1, \dots, x_n)$  definita su un  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  si dice funzione omogenea di grado  $k$  se per ogni scelta di variabili  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n).$$

**Lemma 7.3.1.** *Se  $f(x) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è omogenea di ordine  $k$ , allora la funzione*

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \neq 0; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7.3.4)$$

è continua se  $k > 0$  e non è continua per  $k < 0$ .

**Lemma 7.3.2.** *Se  $f(x) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è omogenea di ordine 0, allora la funzione*

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \neq 0; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7.3.5)$$

è continua se e solo se  $f = 0$ .

#### Derivata di una funzione omogenea

**Lemma 7.3.3.** *Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  una funzione omogenea di grado  $k$  e parzialmente derivabile, allora ogni derivata parziale  $\partial_{x_j} f(\mathbf{x})$  con  $j = 1, \dots, n$  è una funzione omogenea di grado  $(k - 1)$ .*

*Dimostrazione.* Derivando rispetto alle  $x_j$  entrambi i membri dell'identità seguente

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$$

si ottiene

$$\lambda \partial_{x_j} f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k \partial_{x_j} f(x_1, \dots, x_n)$$

□

### Teorema di Eulero sulle funzioni omogenee

**Lemma 7.3.4.** *Sia  $f(x) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Allora  $f$  é omogenea di grado  $k$  se e solo se vale l'identita' detta identita' di Eulero:*

$$\sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j} f(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}).$$

## 7.4 Interpretazione geometrica del differenziale

Quando la funzione

$$f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é differenziabile, sappiamo che il differenziale é definito dalla relazione

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + f'(u_0)h + o(|h|)$$

dove

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ f_3(u) \end{pmatrix}$$

dove  $f_j(u) : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Il differenziale é il vettore

$$f'(u_0) = \begin{pmatrix} f'_1(u_0) \\ f'_2(u_0) \\ f'_3(u_0) \end{pmatrix}$$

ed il suo significato geometrico si vede nella figura 7.1 e quindi  $f'(u_0)$  é vettore tangente nel punto  $x_0 = f(u_0)$  della curva

$$x = f(u), u \in U.$$

Quando

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é differenziabile, sappiamo che il differenziale é definito dalla relazione

$$f(u_0 + h) = f(u_0) + f'(u_0)h + o(\|h\|)$$

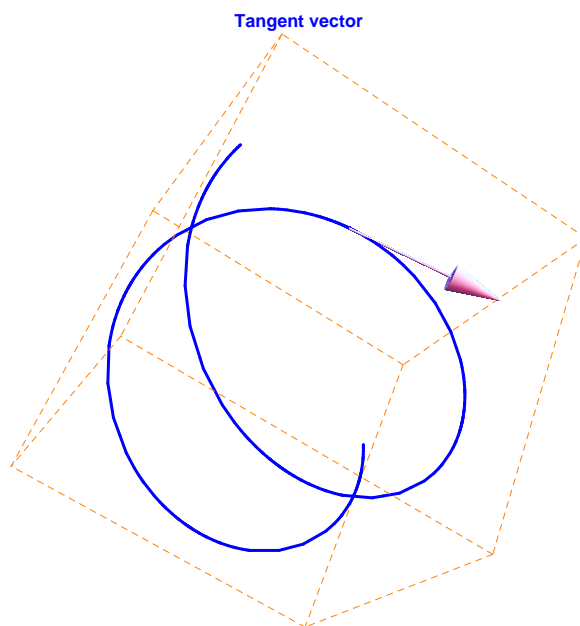


Figure 7.1: Il vettore tangente

dove

$$f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ f_3(u) \end{pmatrix}$$

e  $f_j(u) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Il differenziale é la matrice

$$f'(u_0) = \begin{pmatrix} \partial_{u^1} f_1(u^0) & \partial_{u^2} f_1(u^0) \\ \partial_{u^1} f_2(u^0) & \partial_{u^2} f_2(u^0) \\ \partial_{u^1} f_3(u^0) & \partial_{u^2} f_3(u^0) \end{pmatrix}.$$

ed il suo significato geometrico si vede nella figura 7.2 Il vettore  $\partial_{u^1} f(u_0)$  é un vettore tangente alla curva

$$x = f(u^1, u_0^2)$$

quando  $u_0^2$  é fissato e quindi lo stesso vettore  $\partial_{u^1} f(u_0)$  sara' tangente alla superficie definita dalla

$$x = f(u), u \in U \subseteq \mathbb{R}^2.$$

In modo simile si vede che  $\partial_{u^2} f(u_0)$  é un vettore tangente alla curva

$$x = f(u_0^1, u^2)$$

quando  $u_0^1$  é fissato. Cosí i due vettore

$$\partial_{u^1} f(u_0), \partial_{u^2} f(u_0)$$

definiscono un piano tangente alla superficie tale che questo piano  
traversa il punto  $f(u_0)$  della superficie e i due vettori

$$\partial_{u^1} f(u_0), \partial_{u^2} f(u_0)$$

sono paralleli a questo piano. L'equazione del piano é quindi definito  
(possiamo dire parametrizzato) come segue

$$x = f(u_0) + f'(u_0)h, h \in \mathbb{R}^2.$$

Il piano tangente si puo vedere nella figura 7.2.

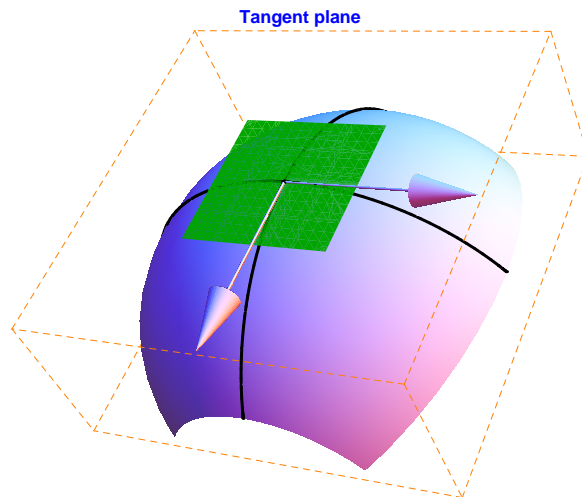


Figure 7.2: Il piano tangente

## 7.5 Teorema di Lagrange per funzioni vettoriali

### 7.5.1 Il teorema di Lagrange non é vero nel caso di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Consideriamo la curva

$$x_1 = \cos \varphi,$$

$$x_2 = \sin \varphi,$$

dove  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . La funzione

$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

é una funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

periodica e  $C^\infty$ . Abbiamo la relazione

$$f'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\|f'(\varphi)\|^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \neq 0. \quad (7.5.6)$$

Se il teorema di Lagrange é vero allora esiste  $\xi \in (0, 2\pi)$  tale che

$$f(2\pi) - f(0) = f'(\xi)2\pi. \quad (7.5.7)$$

Usando la periodicitá di  $f$  si vede che

$$f'(\xi)2\pi = 0.$$

Questa relazione contraddice a (7.5.6) e mostra che (7.5.7) non é vero.



## 7.5.2 Il teorema di Lagrange per funzioni vettoriali

Abbiamo la seguente versione del teorema di Lagrange.

**Lemma 7.5.1.** *Se  $f : [a, b] \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è continua in  $[a, b]$  e differenziabile in  $(a, b)$  allora esiste  $\xi \in (a, b)$  tale che*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(\xi)\|(b - a). \quad (7.5.8)$$

*Dimostrazione.* Sia

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + \|f(x)\|^2}$$

dove  $\|y\|$  è la norma euclidea in  $\mathbb{R}^2$ . Abbiamo il teorema di Lagrange per  $\varphi$  e quindi esiste  $\xi \in (a, b)$  tale che

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a). \quad (7.5.9)$$

Abbiamo inoltre<sup>1</sup>

$$\varphi'(\xi) = \frac{\langle f'(\xi), f(\xi) \rangle}{\sqrt{1 + \|f(\xi)\|^2}}$$

applicando la disequazione di Cauchy

$$|\langle f'(\xi), f(\xi) \rangle| \leq \|f'(\xi)\| \|f(\xi)\|$$

troviamo

$$|\varphi'(\xi)| \leq \frac{\|f'(\xi)\| \|f(\xi)\|}{\sqrt{1 + \|f(\xi)\|^2}} \leq \|f'(\xi)\|.$$

Questa stima e (7.5.9) implicano (7.5.8). □

---

<sup>1</sup>vedi Esempio 7.2.7 e la relazione (7.2.3)

# Chapter 8

## Il Teorema di Schwartz

### 8.1 Il Teorema di Schwartz (caso di due variabili)

**Lemma 8.1.1.** *Sia*

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

*una funzione in due variabili, definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f$  ammette derivate seconde miste continue, cioè  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ , allora queste coincidono in ogni punto  $\mathbf{x} \in U$ , ovvero:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x})$$

Come conseguenza, se una funzione ha derivate parziali continue la sua matrice hessiana è simmetrica.

*Dimostrazione.* Sia

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in U$$

. Si sceglie *varepsilon*  $> 0$  tale che (qui usiamo la norma euclidea!)

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \|x - x^0\| \leq \varepsilon\} \subset U.$$

Si definiscono due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  come segue:

$$\varphi(t) = \varphi_s(t) = f(x_1^{(0)} + t, x_2^{(0)} + s) - f(x_1^{(0)} + t, x_2^{(0)}) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\psi(s) = \psi_t(s) = f(x_1^{(0)} + t, x_2^{(0)} + s) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} + s) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Si prova facilmente che, fissati  $t$  e  $s$  nei rispettivi intervalli:

$$\varphi_s(t) - \varphi_s(0) = \psi_t(s) - \psi_t(0)$$

Inoltre, applicando due volte il teorema di Lagrange:

$$\begin{aligned} \varphi_s(t) - \varphi_s(0) &= t\varphi'(\xi_1) = t \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)} + \xi_1, x_2^{(0)} + s) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)} + \xi_1, x_2^{(0)}) \right] = \\ &= ts \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0 + \xi_1, y_0 + \eta_1) \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\psi_t(s) - \psi_t(0) = st \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0 + \xi_2, y_0 + \eta_2)$$

con  $|\xi_i| \leq t$  e  $|\eta_i| \leq s$ .

Facendo tendere  $t$  e  $s$  a 0 (e quindi anche  $\xi_i$  e  $\sigma_i$ ) si ha la tesi.  $\square$

## 8.2 Disposizioni con ripetizione

Una funzione da un insieme  $A$  in un insieme  $B$  può essere vista come un insieme di coppie  $(a, b)$  tale che vi siano tante coppie quante sono gli elementi  $a$  di  $A$  e che non vi sia alcun  $a$  presente in più di una coppia. Possono invece esservi nessuna o più coppie aventi, come secondo membro, un dato elemento  $b$  di  $B$ .

Dati un insieme  $A$  di cardinalità  $k$  ed un insieme  $B$  di cardinalità  $n$ , con  $n$  e  $k$  interi positivi, il numero delle funzioni da  $A$  in  $B$  è dato da  $nk$ , in quanto ciascuna delle  $k$  coppie può avere come secondo membro uno qualsiasi degli  $n$  elementi di  $B$ . Il numero delle funzioni da un insieme di cardinalità  $k$  in uno di cardinalità  $n$  viene detto numero delle disposizioni con ripetizione di  $n$  oggetti di classe  $k$ ; a differenza delle disposizioni semplici,  $k$  può essere maggiore di  $n$ .

Sia

$$\mathcal{D}_{n,k} = \{(j_1, j_2, \dots, j_k), 1 \leq j_\ell \leq n, \ell = 1, \dots, k\}$$

l'insieme di tutte disposizioni con ripetizioni di  $n$  oggetti  $\{1, 2, \dots, n\}$  di classe  $k$ .

Ogni elemento

$$(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \mathcal{D}_{n,k}$$

é una funzione

$$j : \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Esempio 8.2.1.** *Varie elementi diversi in  $\mathcal{D}_{2,3}$ .*

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), \dots$$

**Esempio 8.2.2.** *(collegamento con le derivate parziali) Varie derivate parziali (di ordine 3) di una funzione di 2 vatiabili sono*

$$\partial_1 \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2), \partial_2 \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2), \partial_2 \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2)$$

*Varie elementi diversi in  $\mathcal{D}_{2,3}$  corrispondenti a queste derivate parziali sono*

$$(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1). \quad (8.2.1)$$

*Alle derivate parziali (di ordine 3) di una funzione di 2 vatiabili del tipo*

$$\partial_1 \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2), \partial_1 \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2), \partial_2 \partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2)$$

*corrispondono i seguenti elementi in  $\mathcal{D}_{2,3}$*

$$(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1). \quad (8.2.2)$$

*Abbiamo inoltre*

$$\partial_1 \partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2), \partial_2 \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2)$$

*con*

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2). \quad (8.2.3)$$

*Così*

$$\#\mathcal{D}_{2,3} = 8 = 2^3.$$

Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme di tutti numeri interi  $m \in \mathbb{Z}$  tali che  $m \geq 0$ , cioè

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Un multi-indice  $n$  - dimensionale é un vettore

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

ció a sole coordinate in  $\mathbb{N}$ . Useremo la notazione

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (8.2.4)$$

Per ogni multi - indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  con

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$$

possiamo definire

$$D_{n,k,\alpha} = \{j : \{1, 2, \dots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}; \#j^{-1}(\ell) = \alpha_\ell, \ell = 1, \dots, n\} \quad (8.2.5)$$

Questo significa che nel elemento

$$(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \Lambda(k, n)$$

1 si ripete  $\alpha_1$  volte, 2 si ripete  $\alpha_2$  volte, ...,  $n$  si ripete  $\alpha_n$  volte.

**Esempio 8.2.3.** Sia  $k = 3$ ,  $n = 3$  e  $\alpha = (1, 2, 0)$  allora

$$\mathcal{D}_{3,3,\alpha} = \{(122), (212), (221)\}.$$

## 8.3 Esercizi su disposizioni con ripetizione

**Problema 8.3.1.** Calcolare

$$\#\mathcal{D}_{n,k}.$$

**Risp.**  $n^k$ .

**Problema 8.3.2.** Sia  $k, n \in \mathbb{N}$  e sia  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  multi - indice con  $|\alpha| = k$ . Vedere se vale l'identità

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_k) \in D_{n,k}} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}. \quad (8.3.6)$$

**Problema 8.3.3.** Sia  $k, n \in \mathbb{N}$  e sia  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  multi - indice con  $|\alpha| = k$ . Vedere se vale l'identità

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=k} (\#D_{n,k,\alpha}) x^\alpha, \quad (8.3.7)$$

dove

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

**Problema 8.3.4.** Sia  $k, n \in \mathbb{N}$  e sia  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  multi - indice con  $|\alpha| = k$ . Calcolare

$$\#D_{n,k,\alpha}.$$

**Risp.**

$$\#D_{n,k,\alpha} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}$$

**Suggerimento.** Si puo vedere Lemma 10.1.1 e la sua Dimostrazione.

**Problema 8.3.5.** Sia  $k, n \in \mathbb{N}$  e sia  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  multi - indice con  $|\alpha| = k$ . Vedere se é vera o falsa l'identità

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \#D_{n,k,\alpha} = n^k.$$

**Suggerimento.** Sia

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$$

in (8.3.7). □

## 8.4 Il teorema di Schwartz nel caso di $n$ variabili e derivate di ordine $k$ .

**Lemma 8.4.1.** *Sia*

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

*una funzione in  $n$  variabili, definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f$  ammette derivate di ordine  $k \geq 2$  continue, cioè  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ , allora per ogni multiindice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  con*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$$

*e per ogni due trasposizioni con ripetizioni*

$$(j_1, j_2, \dots, j_k) \in D_{k,n,\alpha}, (m_1, m_2, \dots, m_k) \in D_{k,n,\alpha}$$

*abbiamo*

$$\partial_{x_{j_1}} \cdots \partial_{x_{j_k}} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_{m_1}} \cdots \partial_{x_{m_k}} f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Il teorema si verifica prima per  $k = 2$  e poi si può usare induzione in  $k$ .

**Esempio 8.4.1.** *Sia  $k = 3$ ,  $n = 3$  e  $\alpha = (1, 2, 0)$  allora*

$$\Lambda(3, 3, \alpha) = \{(122), (212), (221)\}.$$

*Allora il teorema di Schwartz afferma che valgono le identità.*

$$\partial_1 \partial_2^2 f(\mathbf{x}) = \partial_2 \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{x}) = \partial_2^2 \partial_1 f(\mathbf{x}),$$

*dove*

$$\partial_j = \partial_{x_j}.$$

Per ogni multi - indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  possiamo definire

$$\partial_x^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x).$$

Così possiamo affermare che

**Lemma 8.4.2.** *Sia*

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

*una funzione in  $n$  variabili, definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f$  ammette derivate di ordine  $k \geq 2$  continue, cioè  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ , allora per ogni multiindice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  con*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$$

*e per ogni trasposizione con ripetizione*

$$(j_1, j_2, \dots, j_k) \in \Lambda(k, n, \alpha)$$

*abbiamo*

$$\partial_{x_{j_1}} \cdots \partial_{x_{j_k}} f(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$





# Chapter 9

## Esrecizi sulla differenziabilità, derivabilità e le derivate della funzione composta

### 9.1 Esrecizi sulla differenziabilità e derivabilità

**Problema 9.1.1.** Si consideri per  $a > 1$  la funzione  $f_a : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  definita da:

$$f_a(x, y) = \int_1^\infty e^{ik(|x-y|)} k^{-a} dk + \int_1^\infty e^{ik(|x+y|)} k^{-a} dk$$

Dire per quali  $a > 1$

- a) Dire per quali  $a > 1$  abbiamo  $f_a \in C(\mathbf{R}^2)$ ;
- b) Dire per quali  $a > 2$  abbiamo  $f_a \in C^1(\mathbf{R}^2)$ ;
- c) Dire per quali  $a \in (1, 2)$  abbiamo  $f_a \in C^1(\mathbf{R}^2)$ .

*Soluzione.* Abbiamo la relazione

$$f_a(x, y) = g_a(|x - y|) + g_a(|x + y|),$$

dove  $g_a \in C(\mathbf{R})$ . Così deduciamo che la risposta al punto a) è

$$a > 1 \implies f_a(x, y) \in C(\mathbf{R}^2).$$

Per il punto b) prendiamo  $a > 2$  e possiamo vedere che

$$g_a \in C^1(\mathbf{R}).$$

In fatti, si calcola il limita

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f_a(x, 0) - f_a(0, 0)}{x} = 2 \lim_{x \searrow 0} \frac{g_a(x) - g_a(0)}{x} = 2 \int_1^\infty \frac{i}{k^{a-1}} dk$$

quando  $x > 0$  e

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f_a(x, 0) - f_a(0, 0)}{x} = 2 \lim_{x \nearrow 0} \frac{g_a(x) - g_a(0)}{x} = -2 \int_1^\infty \frac{i}{k^{a-1}} dk$$

e questi due relazioni implicano  $f_a \notin C^1$ .

Per il punto c) si può prendere

$$\text{Im}[g_a(x) - g_a(0)] = \int_1^\infty \frac{\sin(k|x|)}{k^a} dk = |x|^{a-1} \int_{|x|}^\infty \sin y \frac{dy}{y^a}$$

Così otteniamo

$$\text{Im}[g_a(x) - g_a(0)] = |x|^{a-1} C + O(|x|),$$

dove

$$C = \int_0^\infty \sin y \frac{dy}{y^a} > 0$$

secondo (25.4.18). Così deduciamo, che

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{g_a(x) - g_a(0)}{x} = -\infty$$

se  $x < 0$  e

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{g_a(x) - g_a(0)}{x} = +\infty$$

se  $x > 0$ . In conclusione  $f_a \notin C^1$ .

□

**Problema 9.1.2.** *Sia*

$$f(x_1, x_2) = \ln \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right), x \neq 0.$$

*Calcolare*

a)

$$\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), x \neq 0.$$

b)

$$\partial_{x_1}^2 f(x) + \partial_{x_2}^2 f(x), x \neq 0.$$

**Problema 9.1.3.** *Sia*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, x \neq 0.$$

*Calcolare*

a)

$$\partial_{x_1} f(x), \partial_{x_2} f(x), \partial_{x_3} f(x), x \neq 0.$$

b)

$$\partial_{x_1}^2 f(x) + \partial_{x_2}^2 f(x) + \partial_{x_3}^2 f(x), x \neq 0.$$

**Problema 9.1.4.** *Sia*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0, & x = (x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (9.1.1)$$

*Dimostrare, che le derivate parziali*

$$\partial_{x_1} f(0), \partial_{x_2} f(0)$$

*esistono, ma  $f(x)$  non è continua in  $x = 0$ .*

**Problema 9.1.5.** *Trovare il gradiente della funzione*

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

*nel punto  $x = (2, -2, 1)$ .*

**Problema 9.1.6.** *Trovare il vettore normale alla superficie*

$$S = \{x; x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 2\}$$

nel punto  $x = (2, 1, -1)$ .

**Problema 9.1.7.** *Sia*

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \implies \mathbb{R}^2$$

e' tale che  $f = (f_1, f_2)$  dove

$$f_1(x) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad f_2(x) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Calcolare

$$\operatorname{div} f(x) = \partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x).$$

**Problema 9.1.8.** *Sia data al variare di  $\alpha \in \mathbf{R}$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$  definita come:*

$$f_\alpha(x, y) = x(x^2 + y^2)^\alpha$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(1) *Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbf{R}$  la funzione  $f_\alpha$  puo' essere estesa con continuita' in  $(0, 0)$ .*

(2) *Dire per quali valori di  $\alpha \in \mathbf{R}$  la funzione  $f_\alpha$  puo' estesa con continuita' in  $(0, 0)$  ed inoltre risulti differenziabile in  $(0, 0)$ .*

**Problema 9.1.9.** *Studiare la differenziabilita' della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con*

$$f(x, y) = \frac{xy \sin y}{x^2 + y^2}$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e con  $f(0, 0) = 0$ .

*Vedere se la derivata direzionale  $\partial_{\mathbf{v}} f$  esiste per ogni vettore  $\mathbf{v} \neq 0$ .*

**Problema 9.1.10.** (la derivata direzionale NON implica differenziabilità')

Studiare la differenziabilità della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con

$$f(x, y) = \frac{y \sin(x^2 - y)}{x^4}$$

per  $0 < y < x^2$  e con  $f(x, y) = 0$ , se  $0 < y < x^2$  non é vero.

**Problema 9.1.11.** Studiare la differenziabilità della funzione  $f(x, y)$  nel punto  $(x, y) = (0, 0)$  definita con

$$f(x, y) = \frac{y^3 + x^4 - x \sin(y^2)}{x^2 - y + \ln(1 + y + x^3)}$$

per  $(x, y) \neq (0, 0)$  e con  $f(0, 0) = 0$ .

**Problema 9.1.12.** Si consideri funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 + |x_2|^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Dire se la funzione é differenziabile.

**Problema 9.1.13.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \frac{x_1 |x_2|^\alpha}{x_1^2 + x_2^2}$$

se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$  la funzione é differenziabile.

**Problema 9.1.14.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x, y) = \frac{\sin(|x|^{1+\alpha} + y^{2\alpha}) - |x - y^2|^4}{x^2 + y^4}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f_\alpha(0, 0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$   $f_\alpha$  é differenziabile in  $x = y = 0$ .

*Suggerimento.* Dopo il cambiamento di variabili

$$x_1 = x, x_2 = y^2$$

si deve studiare la funzione

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \frac{\sin(|x_1|^{1+\alpha} + x_2^\alpha) - |x_1 - x_2|^4}{x_1^2 + x_2^2}$$

se  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$  e  $x_2 \geq 0$ . Si può vedere che per  $\alpha > 2$  la funzione è continua. Se  $\alpha > 3$  la funzione è differenziabile, mentre per  $\alpha = 3$  la derivata parziale in direzione di  $x_1$  è zero, la derivata parziale  $\partial_{x_2} f(0, 0)$  non è zero, quindi la funzione non è differenziabile.  $\square$

**Problema 9.1.15.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x, y) = \frac{\cos(|x|^{1/2+\alpha} + |y|^{2\alpha}) - \cos(|x - y^2|^4)}{x^2 + |y|^3}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f_\alpha(0, 0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$   $f_\alpha$  è differenziabile in  $x = y = 0$ .

*Soluzione.* Prima studiamo la continuità della funzione  $f_\alpha$  in  $x = y = 0$ . Possiamo fare cambiamento di variabili

$$x_1 = x, x_2 = |y|^{3/2}.$$

Così la funzione si può presentare come segue

$$g_\alpha(x_1, x_2) = \frac{-\left(|x_1|^{1/2+\alpha} + x_2^{4\alpha/3}\right)^2 + O(\|x\|^4)}{2(x_1^2 + x_2^2)}$$

se  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ,  $x_2 \geq 0$ , e  $g_\alpha(0, 0) = 0$ . La funzione è continua in zero se

$$2 \min\left(\frac{1}{2} + \alpha, \frac{4\alpha}{3}\right) > 2 \iff \alpha > \frac{3}{4}.$$

Se  $\alpha = 3/4$  possiamo usare coordinate polari e vedere che il limite dipende della direzione, quindi  $g_{3/4}$  non è continua.

La differenziabilità per  $\alpha > 4/3$  significa che dobbiamo studiare il limite della funzione

$$h_\alpha(x_1, x_2) = \frac{-(|x_1|^{1/2+\alpha} + x_2^{4\alpha/3})^2 + O(\|x\|^4)}{2(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}$$

quando  $x \rightarrow 0$ . Il limite è zero, se

$$\min\left(\frac{1}{2} + \alpha, \frac{4\alpha}{3}\right) > \frac{3}{2} \iff \alpha > \frac{9}{8}.$$

Se  $\alpha = 9/8$  possiamo usare coordinate polari e vedere che il limite dipende dalla direzione, quindi  $g_{9/8}$  non è differenziabile.  $\square$

**Problema 9.1.16.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x, y) = \frac{\sin(|x|^{1+\alpha} + y^{2\alpha}) - |x^2 - y^2|^4}{x^4 + y^2}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f_\alpha(0, 0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$   $f_\alpha$  è differenziabile in  $x = y = 0$ .

**Problema 9.1.17.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x, y) = \frac{\sin(|x|^{1+\alpha} + y^{2\alpha}) - |x^4 - y^4|^4}{x^4 + y^4}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f_\alpha(0, 0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$   $f_\alpha$  è differenziabile in  $x = y = 0$ .

**Problema 9.1.18.** Si consideri per  $\alpha > 0$  la funzione  $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\alpha(x, y) = \frac{\log(1 + |x|^{3\alpha} + y^{2\alpha}) - |x - y|^{3\alpha}}{x^4 + y^4}$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f_\alpha(0, 0) = 0$ . Dire per quali  $\alpha$  si ha  $f_\alpha \in C^1(\mathbf{R}^2)$ .



**Problema 9.1.19.** Studiare la continuità e la derivabilità secondo una generica direzione  $v \in \mathbb{R}^2$  nel punto  $(0, 0)$  delle funzioni definite mediante

(a)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_2}, & x_2 \neq 0, \\ 0, & x_2 = 0. \end{cases} \quad (9.1.2)$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 + x_2^2 - |x - y|}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq 0, \\ 1, & x = (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (9.1.3)$$

**Problema 9.1.20.** Sia  $g(r)$  una funzione in  $C^2(\mathbb{R})$ . Studiare la continuità e la derivabilità secondo una generica direzione  $v \in \mathbb{R}^2$  nel punto  $(0, 0)$  delle funzioni definite mediante

(a)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} g(\|\mathbf{x}\|), & \mathbf{x} \neq 0, \\ c, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (9.1.4)$$

**Problema 9.1.21.** Sia  $g(r)$  una funzione in  $C^2(\mathbb{R})$  con  $g(0) = 0$  e sia

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} g(\|\mathbf{x}\|), & \mathbf{x} \neq 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (9.1.5)$$

Verificare l'affermazione

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \iff g'(0) = 0.$$

**Problema 9.1.22.** Se  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto e connesso, allora ogni

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

differenziabile con

$$\nabla F(x) = 0, \forall x \in U$$

è costante.

**Problema 9.1.23.** Data la funzione

$$f(x, y) = (x + |y|)^\lambda \sqrt[5]{(1 - 2 \cos^6(3x) + \cos^{12}(3x))^{\lambda^2} (\sin^2 3y)^{\lambda/2}},$$

dove  $\lambda \in (0, 5)$ . Studiare la differenziabilità di  $f$  nei punti dell'asse  $Ox$  al variare di  $\lambda$ .

*Breve soluzione.* Abbiamo la relazione

$$1 - 2 \cos^6(3x) + \cos^{12}(3x) = (1 - \cos^6(3x))^2 = \dots = (\sin^4(3x)(1 + \cos^2(3x) + \cos^4(3x)))^2.$$

In questo modo deduciamo

$$f(x, y) = (x + |y|)^\lambda (\sin(3x))^{4\lambda^2/5} (\sin(3y))^{\lambda/5} (1 + \cos^2(3x) + \cos^4(3x))^{2\lambda^2/5}.$$

Risolvendo la equazione

$$\sin(3x) = 0$$

troviamo

$$x = \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Risolvendo la equazione

$$\sin(3y) = 0$$

troviamo

$$y = \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Caso I: differenziabilità in  $(x_0, 0)$  con  $x_0 \neq \pi k/3$ .** Abbiamo e  $f(x_0, 0) = 0$  e valgono le relazioni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = 0 \quad \implies \quad \partial_x f(x_0, 0) = 0.$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{f(x_0, \kappa) - f(x_0, 0)}{\kappa} = c \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\kappa^{\lambda/5}}{\lambda}, \quad c \neq 0$$

e quindi la derivata parziale  $\partial_y f(x_0, 0)$  non esiste. La funzione non è parzialmente differenziabile e quindi non è differenziabile.

**Caso II: differenziabilità in  $(\pi k/3, 0)$  e  $k \neq 0$ .** Di nuovo abbiamo  $f(\pi k/3, 0) = 0$ . Le due derivate parziali esistono e sono uguali a zero. In fatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi k/3 + h, 0) - f(\pi k/3, 0)}{h} = 0 \quad \implies \quad \partial_x f(\pi k/3, 0) = 0.$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{f(\pi k/3, \kappa) - f(\pi k/3, 0)}{\kappa} = 0 \quad \implies \quad \partial_y f(\pi k/3, 0) = 0.$$

Per vedere se la funzione é differenziabile usiamo le relazioni

$$\lim_{(h,\kappa)\rightarrow(0,0)} \frac{f(\pi k/3 + h, \kappa) - f(\pi k/3, 0) - \partial_x f(\pi k/3, 0)h - \partial_y f(\pi k/3, 0)\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}} =$$

$$\lim_{(h,\kappa)\rightarrow(0,0)} \frac{(\pi k/3 + h + |\kappa|)^\lambda [\sin(k\pi + 3h)]^{4\lambda^2/5} [\sin(3\kappa)]^{\lambda/5} C_1}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}}, \quad C_1 > 0,$$

Introducing polar coordinates  $\rho = \sqrt{\kappa^2 + h^2}$ ,  $h = \rho \cos \varphi$ ,  $\kappa = \rho \sin(\varphi)$ , troviamo

$$\lim_{(h,\kappa)\rightarrow(0,0)} \frac{f(\pi k/3 + h, \kappa) - f(\pi k/3, 0) - \partial_x f(\pi k/3, 0)h - \partial_y f(\pi k/3, 0)\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}} =$$

$$\lim_{\rho\rightarrow 0} \rho^{(4\lambda^2 + \lambda - 5)/5} [\sin \varphi]^{4\lambda^2/5} [\cos \varphi]^{\lambda/5} C_1 = 0$$

se

$$4\lambda^2 + \lambda - 5 > 0, \lambda \in (0, 5) \iff \lambda > 1.$$

Concludiamo che la funzione é differenziabile (in questo caso) quando  $\lambda \in (1, 5)$ . Se  $\lambda \in (0, 1]$ , la funzione non é differenziabile.

**Caso III: differenziabilità in  $(0, 0)$ .** Di nuovo abbiamo  $f(0, 0) = 0$ . Le due derivate parziali esistono e sono uguali a zero. In fatti

$$\lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \implies \partial_x f(0, 0) = 0.$$

$$\lim_{\kappa\rightarrow 0} \frac{f(0, \kappa) - f(0, 0)}{\kappa} = 0 \implies \partial_y f(0, 0) = 0.$$

Per vedere se la funzione é differenziabile usiamo le relazioni

$$\lim_{(h,\kappa)\rightarrow(0,0)} \frac{f(h, \kappa) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)h - \partial_y f(0, 0)\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}} =$$

$$\lim_{(h,\kappa)\rightarrow(0,0)} \frac{(h + |\kappa|)^\lambda [\sin(3h)]^{4\lambda^2/5} [\sin(3\kappa)]^{\lambda/5} C_1}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}}, \quad C_1 > 0,$$

Introducing polar coordinates  $\rho = \sqrt{\kappa^2 + h^2}$ ,  $h = \rho \cos \varphi$ ,  $\kappa = \rho \sin(\varphi)$ , troviamo

$$\lim_{(h,\kappa)\rightarrow(0,0)} \frac{f(h, \kappa) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)h - \partial_y f(0, 0)\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}} =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{(4\lambda^2 + 6\lambda - 5)/5} (\sin \varphi + |\cos \varphi|) [\sin \varphi]^{4\lambda^2/5} [\cos \varphi]^{\lambda/5} C_1 = 0$$

se

$$4\lambda^2 + 6\lambda - 5 > 0, \lambda \in (0, 5) \iff \lambda > \lambda_0 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{4}.$$

Concludiamo che la funzione é differenziabile (in  $(0, 0)$ ) quando  $\lambda \in (\lambda_0, 5)$ . Se  $\lambda \in (0, \lambda_0]$ , la funzione non é differenziabile.  $\square$

## 9.2 Controesempi per gara a squadre: squadra Cortopassi

La squadra che ha realizzato il seguente lavoro é composta da Tommaso Cortopassi, Andrea Basteri, Andrea Benvenuti, Andrea Pachetti, Gabriel Franceschi e Sara Rossi. Studieremo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} C \frac{|x-a|^\alpha |y-b|^\beta}{|x-a|^\gamma + |y-b|^\delta} & (x, y) \neq (a, b) \\ 0 & (x, y) = (a, b) \end{cases}$$

nel punto  $(a, b)$  con  $C \in \mathbb{R}$  e  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ . Tralascieremo i casi banali  $C = 0$  e  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ . Definiamo inoltre le variabili  $\tau = \max(\gamma, \delta)$  e  $\rho = \min(\gamma, \delta)$ . Inoltre se per esempio  $\gamma = 0$ , allora consideriamo che la funzione sará  $f(x, y) = \frac{|x-a|^\alpha |y-b|^\beta}{1 + |y-b|^\delta}$ . Studieremo la funzione con i valori assoluti, tuttavia vedremo che essi saranno significativi solo in particolari casi. Dunque i risultati qui esposti valgono in generale anche per funzioni della forma considerata ma senza valori assoluti (o solo con alcuni), a patto che esse siano definite in un intorno di  $(a, b)$ .

Faremo vedere che al variare dei parametri la funzione considerata puó soddisfare tutti i 6 casi.

### 9.2.1 Continuitá

Divideremo i vari casi possibili.

$$\alpha + \beta > \tau$$

In questo caso allora abbiamo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) - f(a,b) \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} C \frac{|x-a|^\alpha |y-b|^\beta}{|x-a|^\tau + |y-b|^\tau}$$

perche  $f(a,b) = 0$ . Il limite con cui abbiamo maggiorato la  $f(x,y)$  e 0 perche rapporto di due espressioni omogenee di cui quella al numeratore ha grado maggiore. Per confronto allora anche la  $f(x,y)$  va a 0 e abbiamo continuita.

$$\alpha + \beta = \tau$$

Qui vanno distinti due casi. Se  $\gamma = \delta = \tau$  allora avrei

$$f(x,y) = C \frac{|x-a|^\alpha |y-b|^\beta}{|x-a|^\tau + |y-b|^\tau}$$

con le espressioni al numeratore e al denominatore omogenee dello stesso ordine. Allora non si puo avere continuita, perche se la funzione fosse continua sarebbe costante, il che e evidentemente falso.

Supponiamo invece che  $\tau = \gamma > \delta$  (il caso inverso e analogo). Allora abbiamo che

$$f(x,y) = C \frac{|x-a|^\alpha |y-b|^\beta}{|x-a|^{(\alpha+\beta)} + |y-b|^\delta}$$

Sia  $\Omega$  una generica curva nel piano. Detto  $\Omega_t$  l'insieme delle ordinate dei punti sulla curva di ascissa  $a+t$ , e sia  $b+G_t \in \Omega_t$ . Da notare che i  $G_t$  non sono necessariamente unici. Definisco a questo punto la funzione  $g(t) \in \Omega_t$  per ogni  $t$ . Cioe per ogni  $t$  vicino  $(a,b)$ ,  $g(t) = G_t$ , per qualche  $G_t \in \Omega_t$ . Da qui in poi sottintenderemo  $t > 0$  e  $g(t) \geq 0$ , tanto per come e fatta la funzione supporre questo non fa perdere di generalita.

Mi chiedo se fra tutte le possibili  $g(t)$  ne esiste una per cui  $\exists p$  tale che  $\exists \lim_{t \rightarrow 0} g(t)/t^p$ . Se la risposta e si, abbiamo 3 possibilita. Supponiamo che la  $g(t)$  scelta sia asintotica a  $t^p$  per un certo  $p$ . Avremmo

allora  $g(t) \approx t^p$  per  $t \rightarrow 0$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) - f(a,b) = \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha+p\beta}}{t^{\alpha+\beta} + t^{p\delta}}$$

Raccogliendo al denominatore  $\min(\alpha + \beta, p\delta)$  ho che la funzione avra lo stesso limite di  $t^{\alpha+p\beta-\min(\alpha+\beta,p\delta)}$  per  $t \rightarrow 0$  (a meno della costante moltiplicativa  $C$ ). Se voglio che questo limite sia diverso da 0, l'esponente di  $t$  dovra essere minore o uguale a 0. Allora ho due casi:

- $\alpha + \beta \leq p\delta$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + p\beta - \alpha - \beta \leq 0 \\ \alpha + \beta \leq p\delta \end{cases} \quad (9.2.6)$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} p \leq 1 \\ p \geq \frac{\alpha+\beta}{\delta} \end{cases} \quad (9.2.7)$$

che e impossibile visto che  $\frac{\alpha+\beta}{\delta} \geq 1$ .

- $p\delta \leq \alpha + \beta$

Da cui otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \alpha + p\beta - p\delta \leq 0 \\ p\delta \leq \alpha + \beta \end{cases} \quad (9.2.8)$$

che e equivalente a

$$\begin{cases} p(\beta - \delta) \leq -\alpha \\ p \leq \frac{\alpha+\beta}{\delta} \end{cases} \quad (9.2.9)$$

Allora supponiamo che  $\beta - \delta$  sia negativo, altrimenti se fosse positivo avrei come risultato che  $p$  dovrebbe essere negativo, assurdo perche sarebbe  $g(t)$  asintotico a  $t^p$  che andrebbe a infinito per  $t \rightarrow 0$ . Supponendo dunque  $\beta - \delta < 0$  otteniamo come risultato

$$\begin{cases} p \geq \frac{\alpha}{\delta - \beta} \\ p \leq \frac{\alpha + \beta}{\delta} \end{cases} \quad (9.2.10)$$

Ma anche questo caso e assurdo, perche  $\frac{\alpha + \beta}{\delta} - \frac{\alpha}{\delta - \beta} = \frac{\beta(\delta - \alpha - \beta)}{\delta(\delta - \beta)}$ , che e minore di 0 in quanto avevamo supposto  $\delta < \tau = \alpha + \beta$ .

Altro caso e quello per cui  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t^p} = 0 \forall p \in \mathbb{R}$ . Ma in questo caso ho:

$$\lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^\alpha g(t)^\beta}{t^{\alpha + \beta} + g(t)^\delta} \leq \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^\alpha g(t)^\beta}{t^{\alpha + \beta}} \leq \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha + \beta + 1}}{t^{\alpha + \beta}} = 0$$

perche appunto  $g(t)$  e asintoticamente minore di ogni  $t^p$ , in particolare di  $t^{\beta + 1}$ .

Infine resta da considerare  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t^p} = \infty \forall p \in \mathbb{R}$ . Ma anche qui posso concludere facilmente, perche:

$$\lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^\alpha g(t)^\beta}{t^{\alpha + \beta} + g(t)^\delta} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C t^\alpha g(t)^\beta}{2 g(t)^\delta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C}{2} t^\alpha g(t)^{\beta - \delta} = 0$$

Infatti per  $t \rightarrow 0$  si ha per ipotesi che  $t^{\alpha + \beta} < g(t)^\delta$ . Sia che  $\beta \geq \delta$  o  $\beta < \delta$ , il limite vale comunque 0.

Resta ora da verificare cosa succede se non esiste il limite  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)/t^p$  per nessun  $p$ . Supponiamo inoltre che per ogni  $p$ , tale limite non esista e che  $g(t)/t^p$  non sia limitata in un intorno di 0, altrimenti potrei concludere facilmente con il teorema dei carabinieri. Il caso generale non lo tratto, ma credo che si abbia comunque la continuita. In ogni caso i controesempi usati non si rifaranno a questo caso particolare.

Il caso in cui  $\delta = \tau > \gamma$  e assolutamente identico. Dunque nel caso  $\alpha + \beta = \tau$  con  $\gamma \neq \delta$ , la funzione e sempre continua.

$$\alpha + \beta < \tau$$

Anche qui ragionamo come nel caso precedente. Se abbiamo  $\delta = \gamma = \tau$ , allora abbiamo

$$f(x, y) = C \frac{|x - a|^\alpha |y - b|^\beta}{|x - a|^\tau + |y - b|^\tau}$$

E la  $f$  non puo essere continua perche ho un rapporto tra espressioni omogenee con al denominatore una di ordine maggiore, percio la funzione va a infinito per  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ .

Se invece abbiamo  $\gamma \neq \delta$  ragioniamo ancora come prima. Supponiamo (senza perdere di generalita, l'altro caso si studia in modo analogo) che  $\gamma = \tau > \delta$ . Allora cerchiamo una curva  $(t, g(t))$  definita come sopra che mi faccia tendere il limite a qualcosa di diverso da 0, per negare la continuita. Se l'ordine di infinitesimo di  $g(t)$  e maggiore di quello di  $t^p \forall p \in \mathbb{R}$ , allora il limite va a 0 (si dimostra in modo assolutamente identico a come fatto prima). Supponiamo di avere una  $g(t)$  asintotica a  $t^p$ , per qualche  $p$  reale. Dunque:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) - f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha+p\beta}}{t^\tau + t^{p\delta}} = \lim_{t \rightarrow 0} C t^{\alpha+p\beta - \min(\tau, p\delta)}$$

Vorrei che questo limite sia diverso da 0. Dividendo i casi possibili ottengo i sistemi:

$$\begin{cases} \alpha + p\beta - \tau \leq 0 \\ \tau \leq p\delta \end{cases} \quad (9.2.11)$$

che e equivalente a

$$\begin{cases} p \leq \frac{\tau - \alpha}{\beta} \\ p \geq \frac{\tau}{\delta} \end{cases} \quad (9.2.12)$$

che ha soluzione  $\Leftrightarrow \frac{\tau - \alpha}{\beta} - \frac{\tau}{\delta} \geq 0$ . Svolgendo qualche calcolo otteniamo che sotto queste ipotesi,  $f$  non e continua se e solo se  $\tau\delta - \alpha\delta - \beta\tau \geq 0$ .

Nell'altro caso ho invece:

$$\begin{cases} \alpha + p\beta - p\delta \leq 0 \\ p\delta \leq \tau \end{cases} \quad (9.2.13)$$

che e equivalente a

$$\begin{cases} p \geq \frac{\alpha}{\delta - \beta} \\ p \leq \frac{\tau}{\delta} \end{cases} \quad (9.2.14)$$



e con lo stesso ragionamento del caso appena visto, abbiamo che anche qui la funzione non è continua se e solo se  $\tau\delta - \alpha\delta - \beta\tau \geq 0$ .

### Per riassumere

Ricapitolando, abbiamo questi vari risultati:

- $\alpha + \beta > \tau$

La funzione è sempre continua.

- $\alpha + \beta = \tau$

Ho due casi:

$\tau = \gamma = \delta$  allora la funzione non è continua.

$\gamma \neq \delta$  allora la funzione è continua.

- $\alpha + \beta < \tau$

Allora la funzione è continua se e solo se  $\delta \neq \gamma$  e  $\tau\delta - \alpha\delta - \beta\tau < 0$ .

ATTENZIONE!!!!: Dei casi particolari in cui abbiamo usato la curva  $g(t)$  non sono per niente sicuro. Non sono sicuro né della loro correttezza né della loro (nel caso il ragionamento fosse corretto) formalità matematica. Li ho inseriti solo per completezza, i controesempi forniti useranno argomenti espliciti e ben noti per provare la continuità o non continuità delle funzioni! (ad esempio l'omogeneità, oppure l'esistenza di sottosuccessioni che convergono a diversi limiti)

### 9.2.2 Derivate Parziali

È evidente che se  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambi diversi da 0, le derivate parziali esistono e sono entrambe nulle. Questo si vede banalmente calcolando:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}$$

Allora ci rimangono 3 casi da studiare.

$\alpha \neq 0$  e  $\beta = 0$

In questo caso si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^\alpha}{t^{\gamma+1}} = \lim_{t \rightarrow 0} C t^{\alpha-\gamma-1}$$

E abbiamo i casi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \begin{cases} 0 & \alpha - \gamma - 1 > 0 \\ \pm C & \alpha - \gamma - 1 = 0 \\ \infty & \alpha - \gamma - 1 < 0 \end{cases}$$

Mentre è evidente che  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

$\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^\beta}{t^{\delta+1}} = \lim_{t \rightarrow 0} C t^{\beta-\delta-1}$$

E abbiamo i casi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \begin{cases} 0 & \beta - \delta - 1 > 0 \\ \pm C & \beta - \delta - 1 = 0 \\ \infty & \beta - \delta - 1 < 0 \end{cases}$$

Mentre è evidente che  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$

$\alpha = 0$  e  $\beta = 0$

Allora  $f(x, y) = \frac{C}{|x-a|^\gamma + |y-b|^\delta}$ . In questo caso non abbiamo speranze, perché visto che  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$  (lo avevamo supposto nelle ipotesi di non considerare il caso banale) almeno una delle due derivate parziali va a infinito.

### Per riassumere

Vediamo quando la funzione è parzialmente derivabile

- $(\alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0)$

Allora la funzione è parzialmente derivabile

- $(\alpha = 0 \text{ e } \beta \neq 0)$

Allora la funzione è parzialmente derivabile se e solo se  $\beta - \delta - 1 > 0$ , e la derivata parziale di  $y$  vale 0. La derivata parziale di  $x$  è identicamente 0.

- $(\alpha \neq 0 \text{ e } \beta = 0)$

Allora la funzione è parzialmente derivabile se e solo se  $\alpha - \gamma - 1 \geq 0$ , e la derivata parziale di  $x$  vale 0. La derivata parziale di  $y$  è identicamente 0.

- $(\alpha = 0 \text{ e } \beta = 0)$

La funzione non è parzialmente derivabile

Notiamo che il fatto di avere  $\pm C$  dipende dalla direzione da cui mi avvicino (cioè se  $t \rightarrow 0^+$  o  $t \rightarrow 0^-$ ). Nei calcoli sopra avrei dovuto distinguere  $|t|$  e  $t$ , ma questa differenza è rilevante solo nel caso in cui alla fine l'esponente di  $t$  risulti nullo, per cui ho preferito omettere il valore assoluto e fare questa considerazione alla fine.

### 9.2.3 Derivate direzionali

Calcoliamoci esplicitamente le derivate direzionali lungo un generico vettore  $(h, k)$ . Per semplicità, d'ora in poi indicheremo la derivata direzionale in  $(a, b)$  rispetto al vettore  $(h, k)$  come  $D_{(h,k)}(a, b)$ . Allora abbiamo :

$$D_{(h,k)}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha+\beta} |h|^\alpha |k|^\beta}{t(t^\gamma |h|^\gamma + t^\delta |k|^\delta)} = \lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha+\beta} |h|^\alpha |k|^\beta}{t^{\gamma+1} |h|^\gamma + t^{\delta+1} |k|^\delta}$$

Ricordiamo che all'inizio avevamo posto  $\rho = \min(\gamma, \delta)$ , perciò posso raccogliere un  $t^{\rho+1}$  al denominatore. Distinguiamo tre casi:

- $\gamma = \delta = \rho$

Allora abbiamo  $\lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha+\beta-\rho-1} |h|^\alpha |k|^\beta}{|h|^\rho + |k|^\rho}$ , e:

$$D_{(h,k)}(a, b) = \begin{cases} 0 & \alpha + \beta - \rho - 1 > 0 \\ \pm C \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{|h|^\rho + |k|^\rho} & \alpha + \beta - \rho - 1 = 0 \\ \infty & \alpha + \beta - \rho - 1 < 0 \end{cases}$$

- $\delta > \gamma = \rho$

Allora abbiamo  $\lim_{t \rightarrow 0} C \frac{t^{\alpha+\beta-\rho-1} |h|^\alpha |k|^\beta}{|h|^\rho + t^{\delta-\rho} |k|^\rho}$  e il limite vale:

$$D_{(h,k)}(a, b) = \begin{cases} 0 & \alpha + \beta - \rho - 1 > 0 \\ \pm C \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{|h|^\rho} & \alpha + \beta - \rho - 1 = 0 \\ \infty & \alpha + \beta - \rho - 1 < 0 \end{cases}$$

- $\gamma > \delta = \rho$

In modo analogo vediamo che e

$$D_{(h,k)}(a, b) = \begin{cases} 0 & \alpha + \beta - \rho - 1 > 0 \\ \pm C \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{|k|^\rho} & \alpha + \beta - \rho - 1 = 0 \\ \infty & \alpha + \beta - \rho - 1 < 0 \end{cases}$$

### Per riassumere

Abbiamo che le derivate direzionali in  $(a, b)$  sono:

$$D_{(h,k)}(a, b) = \begin{cases} 0 & \alpha + \beta - \rho - 1 > 0 \\ \pm C \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{|h|^\rho + |k|^\rho} & \alpha + \beta - \rho - 1 = 0 e \gamma = \delta \\ \pm C \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{|h|^\rho} & \alpha + \beta - \rho - 1 = 0 e \delta > \gamma \\ \pm C \frac{|h|^\alpha |k|^\beta}{|k|^\rho} & \alpha + \beta - \rho - 1 = 0 e \gamma > \delta \\ \infty & \alpha + \beta - \rho - 1 < 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso il  $\pm$  dipende dalla direzione con cui mi avvicino. Si noti, tuttavia, che in casi particolari, dove la funzione e definita senza valori assoluti (ad esempio prendendo tutti i valori per  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  interi pari positivi), non avremmo piu il  $\pm$ .

### 9.2.4 Formula del gradiente

Dobbiamo verificare che

$$D_{(h,k)}(a, b) = \langle \nabla f(a, b), (h, k) \rangle$$

Anche qui conviene distinguere vari casi.

$$\alpha + \beta - \rho - 1 > 0$$

Allora le derivate direzionali sono tutte nulle, dunque in particolare le derivate parziali sono entrambe nulle e la formula del gradiente vale.

$$\alpha + \beta - \rho - 1 = 0$$

Allora abbiamo 3 casi:

- $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$

Allora le derivate parziali sono nulle, ma le derivate direzionali non lo sono. Dunque non vale la formula del gradiente.

- $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$

Allora abbiamo che  $\beta = \rho + 1$ . Inoltre guardando il caso  $\alpha = 0$  e  $\beta \neq 0$  per quanto riguarda le derivate parziali, ci rendiamo conto che per avere la derivabilita parziale e necessario che  $\beta - \delta - 1 \geq 0$ . Ma se voglio derivabilita direzionale (necessaria perche possa valere la formula del gradiente) non posso avere  $\beta > \delta + 1$ , perche abbiamo visto che deve essere  $\beta = \rho + 1$ , con  $\rho = \min(\delta, \gamma)$ . Quindi in questo caso per avere derivabilita direzionale deve essere  $\delta \leq \gamma$  e  $\beta = \delta + 1$ .

Per  $\beta = \delta + 1$  abbiamo che  $\nabla f(a, b) = (0, \pm C)$ . Dunque  $D_{(h,k)}(a, b)$  dovra essere uguale a  $\pm Ck$ . vediamo che cio accade per  $\gamma > \delta$ , in quanto se avessimo  $\gamma = \delta$  avremmo che  $D_{(h,k)}(a, b) = \pm \frac{|k|^{\delta+1}}{|h|^\delta + |k|^\delta}$ .

- $\alpha \neq 0$  e  $\beta = 0$

Ragionando come nel caso precedente vediamo che deve essere  $\alpha = \gamma + 1$ , e la formula del gradiente in questo caso varrebbe per

$\delta > \gamma$ , perché per  $\delta = \gamma$  avremmo  $D_{(h,k)}(a, b) = \langle (\pm C, 0), (h, k) \rangle = \pm Ch$ , mentre in realtà  $D_{(h,k)}(a, b) = \pm \frac{|h|^{\gamma+1}}{|h|^\gamma + |k|^\gamma}$ .

### Per riassumere

Quindi, riassumendo:

- $\alpha + \beta - \rho - 1 > 0$  La formula del gradiente vale
- $\alpha + \beta - \rho - 1 = 0$  Allora la formula del gradiente vale se e solo se  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  con  $\gamma > \delta$ , oppure  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  con  $\delta > \gamma$ .

Anche in questo caso valgono le stesse considerazioni fatte alla fine dei precedenti due paragrafi.

## 9.2.5 Qualche esempio

Diamo qualche esempio esplicito (prenderò  $C = 1$  e centrerò tutto nell'origine per semplicità) in modo tale da far vedere che la classe di funzioni considerata può soddisfare tutti e 6 i casi. I valori delle variabili che scelgo (si verifichi pure) soddisfano le relazioni date precedentemente, e in alcuni casi (dove possibile e necessario) non metterò il valore assoluto:

### Caso 1

Voglio una funzione continua ma non parzialmente derivabile. Scelgo  $\alpha = 3/2, \beta = 0, \gamma = \delta = 1$ . Allora:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^{3/2}}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora vediamo che la funzione è continua nell'origine per un argomento di omogeneità (la funzione al numeratore è omogenea di grado  $3/2$  mentre quella al denominatore lo è di grado 1). Tuttavia non abbiamo la derivabilità parziale rispetto alla  $x$ , infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|^{3/2}}{|t|} = \infty$$

**Caso 2**

Voglio una funzione continua, derivabile parzialmente ma non direzionalmente. Scelgo  $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$  e ho:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La continuita e evidente per omogeneita, e le derivate parziali sono entrambe nulle. Tuttavia la derivata direzionale lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante vale  $1/2$ .

**Caso 3**

Voglio una funzione continua, derivabile direzionalmente per cui non valga il gradiente. Scelgo  $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = \delta = 2$ . Allora:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vediamo che la funzione e continua e derivabile parzialmente con derivate parziali nulle. Tuttavia osserviamo che, prendendo il versore  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  e  $\rho \rightarrow 0$  abbiamo che la derivata direzionale lungo  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  vale:

$$D_{(\cos(\theta), \sin(\theta))}(0, 0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) - f(0, 0)}{\rho} = \cos(\theta) \sin(\theta)^2$$

Quindi le derivate direzionali esistono sempre ma la formula del gradiente non vale, perche se valesse, dovrei avere tutte le derivate direzionali nulle.

**Caso 4**

Voglio una funzione non continua, derivabile parzialmente ma non direzionalmente. Scelgo  $\alpha = \beta = 1, \gamma = \delta = 2$ . Allora ho:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione è evidentemente non continua, in quanto se lo fosse dovrebbe essere costante per un discorso di omogeneità. Le derivate parziali sono evidentemente entrambe nulle. Tuttavia non è derivabile direzionalmente, in quanto, per esempio, la derivata direzionale lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante vale  $\infty$ .

### 9.2.6 Caso 5

Voglio una funzione non continua, con derivate direzionali e per cui non vale la formula del gradiente. Scelgo  $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 6, \delta = 3$  e ottengo:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + |y|^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione non è continua, per mostrarlo basta far vedere che avvicinandoci lungo la curva  $(t, t^2)$  il limite è diverso da 0. Infatti:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} = \infty$$

La funzione è tuttavia evidentemente parzialmente derivabile, ma le sue derivate parziali valgono (usando le stesse notazioni del Caso 3):

$$D_{(\cos(\theta), \sin(\theta))}(0, 0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) - f(0, 0)}{\rho} = \cot(\theta)^3$$

per  $\theta$  che non è multiplo intero di  $\pi/2$  (in quel caso ho le derivate parziali che ho già visto essere nulle). Ma allora la derivata direzionale della funzione è sempre ben definita, ma la formula del gradiente è evidentemente falsa, perché mi darebbe derivate direzionali sempre nulle.



### 9.2.7 caso 6

Cerco una funzione non continua ma per cui valga la formula del gradiente. Scelgo  $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 8, \delta = 2$ . Allora ho che:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^8 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione non è continua, infatti avvicinandosi lungo la curva  $(t, t^3)$  otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6}{t^8 + t^6} = 1$$

Tuttavia è parzialmente derivabile con derivate parziali nulle, e anche le derivate direzionali sono nulle. Infatti (usando la notazione del Caso 3):

$$D_{(\cos(\theta), \sin(\theta))}(0, 0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos(\theta)^3 \sin(\theta)}{\rho^8 \cos(\theta)^8 + \rho^2 \sin(\theta)^2} = 0$$

Dunque la funzione è direzionalmente derivabile e vale la formula del gradiente.

## 9.3 Derivate delle funzioni composte

Se

Si considerino due funzioni

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m, \quad f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

e

$$g : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

dove  $U, V$  sono aperti. Le derivate della funzione composta

$$H(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

si possano calcolare usando la relazione

$$\partial_{x_j} H(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m (\partial_{y_k} g)(f(\mathbf{x})) \partial_{x_j} f_k(\mathbf{x}) \quad (9.3.15)$$

per  $j = 1, \dots, n$ .

**Esempio 9.3.1.** Sia  $m = n = 2$  e

$$g : x \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow g(x) \in \mathbb{R},$$

e differenziabile. Le due coordinate polari  $r$  e  $\varphi$  possono essere convertite nelle coordinate cartesiane  $x_1$  e  $x_2$  utilizzando le formule

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (9.3.16)$$

mentre le due coordinate cartesiane  $x_1$  e  $x_2$  possono essere convertite nella coordinata polare  $r$  come segue

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Per determinare invece la coordinata angolare  $\varphi$ , bisogna usare (25.5.39). Ponendo

$$\begin{aligned} f_1(r, \varphi) &= r \cos \varphi \\ f_2(r, \varphi) &= r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (9.3.17)$$

possiamo applicare (9.3.15) per la funzione composta

$$H(r, \varphi) = g(f(\mathbf{x})).$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_r H(r, \varphi) &= \partial_{x_1} g(f(x)) \cos \varphi + \partial_{x_2} g(f(x)) \sin \varphi \\ \partial_\varphi H(r, \varphi) &= -\partial_{x_1} g(f(x)) r \sin \varphi + \partial_{x_2} g(f(x)) r \cos \varphi. \end{aligned} \quad (9.3.18)$$

**Problema 9.3.1.** Sia  $f(t) = g(\varphi(t))$ , dove

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

e

$$\varphi(t) = (\cos t, 2 \sin t, 2).$$

Trovare  $f'(0)$ .

**Problema 9.3.2.** Sia  $\lambda > 0$ ,

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$F_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda F(\lambda \mathbf{x})$$

Verificare le identità

$$\partial_{x_j} (F_\lambda(x)) = \lambda^2 (\partial_{x_j} F)(\lambda x),$$

$$\|\nabla F_\lambda(x)\|^2 = \lambda^4 \|(\nabla F)(\lambda \mathbf{x})\|^2.$$

**Problema 9.3.3.** Dimostrare che la funzione

$$g(x_1, x_2) = \varphi(x_1^2 + x_2^2),$$

soddisfa l'equazione

$$x_2 \partial_{x_1} g - x_1 \partial_{x_2} g = 0.$$

**Problema 9.3.4.** Sia  $f(r, \varphi) = g(\psi(r, \varphi))$ , dove

$$g(x) = g(x_1, x_2)$$

e

$$\psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dimostrare l'identità

$$\|\nabla g\|^2 = |\partial_r f|^2 + r^2 |\partial_\varphi f|^2.$$

**Problema 9.3.5.** Sia  $f(r, \varphi, \theta) = g(\psi(r, \varphi, \theta))$ , dove

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3)$$

e

$$\psi(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta).$$

Dimostrare l'identità

$$\|\nabla g\|^2 = |\partial_r f|^2 + r^{-2} |\partial_\varphi f|^2 + r^{-2} \sin^{-2} \varphi |\partial_\theta f|^2.$$

**Problema 9.3.6.** Trovare tutte le funzioni

$$F : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

tale che  $F \in C^1(\mathbb{R})$  e la funzione  $G(x, y) = F(x)F(y)$  soddisfa la proprietà

$$(x\partial_y - y\partial_x)G = 0.$$

## 9.4 Derivate parziali di ordine superiore

### Operatore rotore in $\mathbb{R}^3$

Scegliamo una base canonica  $e_1, e_2, e_3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Se

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

è una funzione differenziabile, il rotore di  $F = (F_1, F_2, F_3)$  (con notazione  $\nabla \times F$  è definito da:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \end{vmatrix} F$$

dove  $\partial_j = \partial_{x_j}$  nella seconda uguaglianza si è esplicitata l'equazione matriciale, mentre nella prima la scrittura indica il determinante formale della matrice:

$$\nabla \times F = e_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1).$$

**Problema 9.4.1.** Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \implies \mathbb{R}^3$$

e una funzione in classe  $C^2$ . Allora le condizioni

$$\operatorname{div} f = 0, \operatorname{rot} f = 0$$

implicano

$$\Delta f = 0,$$

dove

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$$

e' l'operatore di Laplace.

### Operatore di Laplace

**Problema 9.4.2.** Sia  $\rho = \|x\|, x \in \mathbb{R}^n$ . Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ . Si calcolino le derivate prime e seconde di  $F(x) = f(\|x\|) = f(\rho)$ . Si applichi la formula al caso particolare di  $\frac{1}{\rho^{n-2}}, n \geq 3$  e si verifichi che

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0, x \neq 0.$$

### Controesempio per il teorema di Schwartz

**Problema 9.4.3.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  assegnata mediante

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq 0, \\ 0, & x = (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (9.4.19)$$

Verificare che esistono e sono fra loro differenti le derivate seconde

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{(0,0)}, \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \right)_{(0,0)}.$$

### Simboli di operatori differenziali

**Problema 9.4.4.** Sia  $f(x, \xi) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$ , dove  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ . Calcolare

$$\overline{f(x, \xi)} i^{-|\alpha|} \partial_x^\alpha f(x, \xi),$$

dove

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

é multi - indice,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

**Problema 9.4.5.** Sia  $f(x, \xi) = e^{i\langle x, \xi \rangle}$ , dove  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$  e sia

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$

un polinomio di  $n$  variabili  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  di ordine  $m$ . Vedere se é vera l'identitá

$$P(\xi) f(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D_x^\alpha f(x, \xi),$$

dove

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

é multi - indice,

$$D_x^\alpha = (-i\partial_{x_1})^{\alpha_1} \dots (-i\partial_{x_n})^{\alpha_n}.$$



# Chapter 10

## Formula di Taylor

Per funzioni di piú variabili, si fa uso dei multiindici.

### 10.1 Generalizzazione del binomio di Newton in $\mathbb{R}^n$

Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme di tutti numeri interi  $m \in \mathbb{Z}$  tali che  $m \geq 0$ , cioè

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Come generalizzazione del teorema binomiale vale il cosiddetto teorema multinomiale.

**Lemma 10.1.1.**

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \cdot \mathbf{x}^\alpha, \quad (10.1.1)$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é multi - indice, cioè  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (10.1.2)$$

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!. \quad (10.1.3)$$

e

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}. \quad (10.1.4)$$



*Idea della dimostrazione: induzione in  $n$ .* Per ogni multi - indice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  abbiamo

$$\alpha = (\alpha', \alpha_n), \quad \alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}, \alpha_n \in \mathbb{N}.$$

Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  abbiamo

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_n), \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{x}'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n}. \quad (10.1.5)$$

Se (10.1.1) é vera per  $n - 1$  allora abbiamo

$$(x_1 + \dots + x_{n-1})^k = \sum_{|\alpha'|=k} \binom{k}{\alpha'} \cdot \mathbf{x}'^{\alpha'}, \quad (10.1.6)$$

Il binomio di Newton (Analisi Matematica 1) ci da la relazione

$$(y + x_n)^k = \sum_{k_1 + \alpha_n = k} \binom{k}{k_1} \cdot y^{k_1} x_n^{\alpha_n} \quad (10.1.7)$$

Usando (10.1.7) con

$$y = x_1 + \dots + x_{n-1}$$

insieme con (10.1.6) si ottiene

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{k_1 + \alpha_n = k} \binom{k}{k_1} \left( \sum_{|\alpha'|=k_1} \binom{k_1}{\alpha'} \cdot \mathbf{x}'^{\alpha'} \right) x_n^{\alpha_n}.$$

La definizione del coefficiente di Newton (10.1.8) implica

$$\binom{k}{k_1} \binom{k_1}{\alpha'} = \frac{k!}{(k_1)! \alpha_n!} \frac{(k_1)!}{(\alpha')!} = \frac{k!}{(\alpha')! \alpha_n!} = \binom{k}{\alpha}, \quad (10.1.8)$$

quando

$$|\alpha| = |\alpha'| + \alpha_n = k, \quad |\alpha'| = k_1,$$

quindi

$$\sum_{k_1 + \alpha_n = k} \binom{k}{k_1} \left( \sum_{|\alpha'|=k_1} \binom{k_1}{\alpha'} \cdot \mathbf{x}'^{\alpha'} \right) x_n^{\alpha_n} = \sum_{k_1 + \alpha_n = k} \sum_{|\alpha'|=k_1} \binom{k}{\alpha} \mathbf{x}'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{|\alpha'| + \alpha_n = k} \binom{k}{\alpha'} \mathbf{x}'^{\alpha'} x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \cdot \mathbf{x}^\alpha.$$

□

Usando lo stesso ragionamento ed il Teorema di Schwartz (Lemma 8.4.2) possiamo dedurre il seguente.

**Lemma 10.1.2.** *Sia*

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

*una funzione in  $n$  variabili, definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f$  ammette derivate di ordine  $k \geq 2$  continue, cioè  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ , allora*

$$(h_1 \partial_{x_1} + \dots + h_n \partial_{x_n})^k (f(\mathbf{x})) = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \cdot \mathbf{h}^\alpha \partial_x^\alpha f(\mathbf{x}), \quad (10.1.9)$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é multi - indice, cioè  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (10.1.10)$$

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!. \quad (10.1.11)$$

e

$$\mathbf{h}^\alpha = \prod_{j=1}^n h_j^{\alpha_j}, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_{x_n}^{\alpha_n}. \quad (10.1.12)$$

### 10.1.1 Mini - progetto "Analisi ed Algebra": Binomio di Newton nel campo dei quaternioni

**Problema 10.1.1.** *(Binomio di Newton nel campo dei quaternioni)*  
*I quaternioni possono essere espressi tramite matrici  $2 \times 2$  di numeri complessi Matrici  $2 \times 2$  complesse*

*Gli elementi  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sono rappresentati rispettivamente da:*

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0, & i \\ i, & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{bmatrix}.$$

Il quaternione

$$x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k}$$

é quindi rappresentato da

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_4i & x_2 + x_3i \\ -x_2 + x_3i & x_1 - x_4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}$$

Provare a dedurre formula di Newton per

$$(x_1 + x_2\mathbf{i})^m, (x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k})^m, (x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k})^m$$

## 10.2 Formula di Taylor per funzioni di piú variabili

Data una funzione

$$f(\mathbf{x}) : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(dove  $U$  é aperto) per ogni  $\mathbf{x}_0 \in U$  e per ogni  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  piccolo poniamo

$$t_0 = \|\mathbf{h}\|, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \in \mathbb{R}^n$$

con  $\|\mathbf{e}\| = 1$  si consideri la funzione

$$\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}), \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (10.2.13)$$

Seguendo Esempio 7.2.3 si puo ottenere

$$\varphi'(t) = \langle f'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = \sum_{j=1}^n e_j \partial_{x_j} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}). \quad (10.2.14)$$

Usando il Teorema di Schwartz e Lemma 10.1.2 si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= (e_1 \partial_{x_1} + \dots + e_n \partial_{x_n})^k (f(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+t\mathbf{e}} = \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \cdot \mathbf{e}^\alpha \partial_x^\alpha f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}). \end{aligned} \quad (10.2.15)$$

In conclusione abbiamo la formula di Taylor.

**Lemma 10.2.1.** (*Formula di Taylor con il resto nella forma di Peano*)  
Sia

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione in  $n$  variabili, definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f$  ammette derivate di ordine  $k \geq 2$  continue, cioè  $f \in \mathcal{C}^k(U)$ , allora

$$f(\mathbf{x}_0 + t_0 \mathbf{e}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \sum_{|\alpha|=0}^n \frac{\partial_x^\alpha f(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} \mathbf{h}^\alpha + o(\|\mathbf{h}\|^k) \quad (10.2.16)$$

dove

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad (10.2.17)$$

$$\alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j! \quad (10.2.18)$$

e

$$\mathbf{e}^\alpha = \prod_{j=1}^n e_j^{\alpha_j}, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}. \quad (10.2.19)$$

### 10.3 Esempio: Formula di Taylor di ordine 1, funzione di due variabili

Sia  $f(x_0, y_0)$  una funzione di classe  $C^2$  e vogliamo calcolare il polinomio di Taylor in  $(x_0, y_0)$  allora:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + R(h, k)$$

dove  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$  ed  $R(h, k)$  é il resto che equivale a:

$$R(h, k) = \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_a, y_a)h^2 + 2f_{xy}(x_a, y_a)hk + f_{yy}(x_a, y_a)k^2]$$

Vale come per le funzioni di una variabile che se le derivate seconde sono limitate da un numero  $M$ , allora l'errore equivale:

$$|R| \leq M(h^2 + k^2)$$

### 10.4 Esempio: Formula di Taylor di ordine 2, funzione di due variabili

Con le stesse notazioni abbiamo:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + \\ + \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] + R(h, k)$$

### 10.5 Esempio: Formula di Taylor di ordine 3, funzione di due variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + \\ + \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] + \\ + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(x_0, y_0)h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)k^3] + R(h, k)$$

# Chapter 11

## Massimi e minimi delle funzioni di piú variabili

### 11.1 Massimi e minimi relativi, massimi e minimi relativi stretti

**Definition 11.1.1.** *Se  $x_0 \in U$ , dove  $U$  é un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione, allora  $x_0$  si chiama punto di massimo relativo (o locale) di  $f$ , se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$\|x - x_0\| \leq \delta, x \in U, \implies f(x_0) \geq f(x). \quad (11.1.1)$$

**Definition 11.1.2.** *Se  $x_0 \in U$ , dove  $U$  é un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione, allora  $x_0$  si chiama punto di minimo relativo (o locale) di  $f$ , se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$\|x - x_0\| \leq \delta, x \in U, \implies f(x_0) \leq f(x). \quad (11.1.2)$$

**Definition 11.1.3.** *Se  $x_0 \in U$ , dove  $U$  é un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione, allora  $x_0$  si chiama punto di massimo relativo stretto (o proprio) di  $f$ , se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$0 < \|x - x_0\| \leq \delta, x \in U, \implies f(x_0) > f(x). \quad (11.1.3)$$

**Definizione 11.1.1.** *Se  $x_0 \in U$ , dove  $U$  é un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione, allora  $x_0$  si chiama punto di minimo relativo stretto*

(o proprio) di  $f$ , se esiste  $\delta > 0$  tale che

$$0 < \|x - x_0\| \leq \delta, x \in U, \implies f(x_0) < f(x). \quad (11.1.4)$$

**Lemma 11.1.1.** *Se  $x_0 \in U$  é punto di massimo (minimo) relativo per  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $f$  é differenziabile in  $x_0$  allora  $f'(x_0) = \nabla f(x_0) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Se  $x_0 \in U$  é punto di massimo relativo, ed  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , e un vettore allora la funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv)$$

ha massimo relativo in  $t = 0$  é allora

$$0 = \varphi'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Il fatto che  $v$  é un vettore arbitrario in  $\mathbb{R}^n$  implica  $\nabla f(x_0) = 0$ .  $\square$

**Definizione 11.1.2.** *Se  $x_0 \in U$ , dove  $U$  é un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione differenziabile in  $x_0$ , allora  $x_0$  si chiama punto critico (o punto stazionario) se  $\nabla f(x_0) = 0$ .*

## 11.2 Condizioni sufficienti

Sia  $x_0 \in U$ , dove  $U$  é un aperto in  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione  $C^2(U)$ . Usando lo sviluppo in Taylor per un punto critico  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  abbiamo

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{\langle f''(x_0)h, h \rangle}{2} + o(\|h\|^2).$$

Ricordiamo le seguenti definizioni per una forma quadratica

$$Q(h) = \langle Ah, h \rangle, \quad (11.2.5)$$

dove  $A$  é una matrice  $n \times n$ .

**Definizione 11.2.1.** • *La forma quadratica  $Q(h)$  é definita positiva se  $Q(h) > 0$  per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \neq 0$ ;*

- La forma quadratica  $Q(h)$  é definita negativa se  $Q(h) < 0$  per ogni  $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$ ;
- La forma quadratica  $Q(h)$  é semidefinita positiva se  $Q(h) \geq 0$  per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ ;
- La forma quadratica  $Q(h)$  é semidefinita negativa se  $Q(h) \leq 0$  per ogni  $h \in \mathbb{R}^n$ ;
- La forma quadratica  $Q(h)$  é indefinita se esistono  $h, k \in \mathbb{R}^n$  tali che  $Q(h) > 0$  e  $Q(k) < 0$ .

Ricordiamo il criterio di Sylvester. Sia  $Q$  la forma quadratica definita in (11.2.5) e sia  $d_j$  il determinante (minore) della matrice ottenuta cancellando da  $A$  le ultime  $n - j$  righe e le ultime  $n - j$  colonne.

Il criterio di Sylvester asserisce che la forma quadratica  $Q$  é definita positiva se e solo se  $d_j > 0$  per  $j = 1, \dots, n$ .

Esiste un analogo criterio per testare se le forme quadratiche

$$Q(h) = \langle Ah, h \rangle,$$

sono definite negative: la forma quadratica  $Q$  é definita negativa se e solo se  $(-1)^j d_j > 0$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

**Lemma 11.2.1.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in U$  é punto critico, allora valgono le seguente proprietà:*

- se

$$f''(x_0)$$

*é definita positiva, allora  $x_0$  é un punto di minimo relativo stretto.*

- 

$$f''(x_0)$$

*é definita negativa, allora  $x_0$  é un punto di massimo relativo stretto.*



### 11.2.1 Condizioni sufficienti nel piano, il caso determinante NON zero

Quando  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  é punto critico per la funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(U)$ , ed il determinante

$$\det(f''(x_0)) = \det \begin{bmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x_0) & \partial_{x_1 x_2}^2 f(x_0) \\ \partial_{x_1 x_2}^2 f(x_0) & \partial_{x_2}^2 f(x_0) \end{bmatrix}$$

NON é zero, si guarda il segno del determinante della matrice hessiana e il primo termine della matrice:

**Lemma 11.2.2.** *Abbiamo:*

- a) *primo elemento positivo, determinante positivo (matrice definita positiva): si ha un minimo locale stretto;*
- b) *primo termine negativo, determinante positivo: si ha un massimo locale stretto;*
- c) *determinate negativo: allora abbiamo due vettori  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tali che*

$$\varphi_{v_1}(t) = f(x_0 + tv_1)$$

*ha minimo relativo stretto in  $t = 0$  mentre*

$$\varphi_{v_2}(t) = f(x_0 + tv_2)$$

*ha massimo relativo stretto in  $t = 0$  allora  $(x_0, y_0)$  non é ne massimo ne minimo relativo (sara' punto sella, vedi successivamente la definizione rigorosa del punto sella in Definizione 11.2.2 ).*

### 11.2.2 Condizioni sufficienti nel piano quando il determinante é zero

Quando  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  é punto critico per la funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(U)$ , ed il determinante

$$\det(f''(x_0)) = \det \begin{bmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x_0) & \partial_{x_1 x_2}^2 f(x_0) \\ \partial_{x_1 x_2}^2 f(x_0) & \partial_{x_2}^2 f(x_0) \end{bmatrix}$$

é zero é utile a studiare il segno della funzione  $g(x) = f(x) - f(x_0)$  in un piccolo intorno di  $x_0$ . Il caso tipico é

$$f(x, y) = 0$$

con  $(x_0, y_0)$  un punto critico per  $f$  tale che

$$g(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

ha un segno permanente in

$$\{(x, y); 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \varepsilon^2\}.$$

Se il segno di  $g$  é positivo, allora abbiamo punto di minimo, se il segno é negativo, allora  $(x_0, y_0)$  é punto di massimo relativo stretto.

**Esempio 11.2.1.** *La funzione*

$$f(x, y) = x^4 + y^6$$

ha punto critico  $(0, 0)$  e il segno di  $g(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y)$  é positivo per

$$\{(x, y); 0 < x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\}$$

e quindi abbiamo il punto  $(0, 0)$  punto di minimo locale stretto.

Quando  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  é punto critico per la funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(U)$ , ed il determinante

$$\det(f''(x_0)) = \det \begin{bmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x_0) & \partial_{x_1 x_2}^2 f(x_0) \\ \partial_{x_1 x_2}^2 f(x_0) & \partial_{x_2}^2 f(x_0) \end{bmatrix}$$

é zero é utile ad introdurre la funzione

$$\varphi_v(t) = f(x_0 + tv)$$

e studiare il grafico della funzione vicino a  $t = 0$ . Abbiamo il seguente algoritmo:

- se esistono due vettori  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tali che

$$\varphi_{v_1}(t) = f(x_0 + tv_1)$$

ha minimo relativo stretto in  $t = 0$  mentre

$$\varphi_{v_2}(t) = f(x_0 + tv_2)$$

ha massimo relativo stretto in  $t = 0$  allora  $(x_0, y_0)$  non é ne massimo ne minimo relativo (sara' punto sella, vedi successivamente la definizione rigorosa del punto sella in Definizione 11.2.2 );

- se per ogni  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  la funzione

$$\varphi_v(t) = f(x_0 + tv)$$

ha minimo relative (anche STRETTO) NON possiamo dedurre che  $(x_0, y_0)$  é punto di minimo relativo (vedi controesempio in Esempio 11.2.2);

- se per ogni  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  la funzione

$$\varphi_v(t) = f(x_0 + tv)$$

ha minimo relative (anche STRETTO) NON possiamo dedurre che  $(x_0, y_0)$  é punto di minimo relativo.

**Lemma 11.2.3.** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(U)$ , e  $x_0 \in U$  e punto critico tale che esiste un numero pari  $m = 2k$  tale che*

$$\varphi_v(t) = f(x_0 + tv)$$

*ha minimo locale STRETTO in  $t = 0$  del tipo*

$$\varphi(t) = ct^m, c > 0$$

*per OGNI vettore  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$  allora la funzione  $f(x)$  ha minimo locale STRETTO in  $x_0$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo  $m = 2$  per semplicità. La condizione

$$\varphi(t) = ct^2, c > 0$$

implica

$$\varphi''(0) = \langle f''(x_0)h, h \rangle > 0$$

per ogni  $h \in \mathbb{R}^2$ ,  $h \neq 0$ . Quindi  $Q$  è definita positiva e  $x_0$  è punto di minimo locale stretto.  $\square$

**Esempio 11.2.2.** *La funzione*

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)((x + 1)^2 + y^2 - 4)$$

ha punto critico nel punto  $(1, 0)$ . Infatti, ponendo

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2 - 1), \quad f_2(x, y) = (x + 1)^2 + y^2 - 4$$

possiamo usare l'affermazione

$$f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0, \implies \partial_x(f_1(x, y)f_2(x, y)) = \partial_y(f_1(x, y)f_2(x, y)) = 0.$$

Per ogni vettore

$$v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

possiamo definire la funzione

$$\varphi_\alpha(t) = F(1 + t \cos \alpha, r \sin \beta).$$

Abbiamo le relazioni

$$f_1(1 + t \cos \alpha, r \sin \beta) = 2t \cos \alpha + t^2$$

e

$$f_2(1 + t \cos \alpha, r \sin \beta) = 4t \cos \alpha + t^2$$

Così troviamo

$$\varphi_\alpha(t) = F(1 + t \cos \alpha, t \sin \beta) = 8t^2 \cos^2 \alpha + o(t^2)$$

quando  $\alpha \neq \pi/2, 3\pi/2$  e  $\alpha \in (0, 2\pi]$ . Se  $\alpha = \pi/2, 3\pi/2$  allora

$$\varphi_\alpha(t) = t^4$$

Così concludiamo che  $\varphi_\theta(t)$  ha minimo stretto per ogni  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Possiamo scegliere una successione

$$(x_k, y_k) \rightarrow (1, 0)$$

tale che

$$f_1(x_k, y_k) > 0, f_2(x_k, y_k) < 0$$

e quindi  $(1, 0)$  NON è punto di massimo o minimo locale.

Se un punto  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  è un punto critico, possiamo definire punto tipo sella come segue.

**Definizione 11.2.2.** Un punto  $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$  critico per  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è un punto sella per  $f$  se non è punto di massimo o minimo locale e se esistono due vettori

$$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

tali che  $v_1, v_2$  sono linearmente indipendenti e le funzioni

$$\varphi_1(t) = f(x_0 + tv_1), \quad \varphi_2(t) = f(x_0 + tv_2)$$

sono tali che  $\varphi_1(t)$  ha massimo relativo in  $t = 0$  e  $\varphi_2(t)$  ha minimo relativo in  $t = 0$ .

**Esempio 11.2.3.** Il caso tipico di punto sella è

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

nel punto  $(0, 0)$ .

**Esempio 11.2.4.** Un altro caso, quando possiamo dedurre che

- il punto critico non è massimo o minimo relativo;
- il punto critico NON è sella;

e nel caso quando

$$F(x, y) = 0$$

definisce una curva tale che il punto critico per  $F$  è  $(x_0, y_0)$  e questo punto è sulla curva

$$\gamma : F(x, y) = 0.$$

Ogni piccolo intorno di  $(x_0, y_0)$

$$B_\varepsilon = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

é tale che la curva  $\gamma$  lo divide in due sottoinsiemi

$$B_\varepsilon^\pm = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, F(x, y) \gtrless 0\}$$

e quindi abbiamo

$$B_\varepsilon = (\gamma \cap B_\varepsilon) \cup B_\varepsilon^+ \cup B_\varepsilon^-.$$

Possiamo subito dedurre che  $(x_0, y_0)$  non é punto di massimo o minimo relativo.

Se prendiamo un vettore

$$v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

che non é vettore tangente a  $\gamma$  possiamo definire la funzione

$$\varphi_\alpha(t) = F(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha).$$

Si puo vedere che la retta

$$x = x_0 + t \cos \theta, \quad y = y_0 + t \sin \theta$$

interseca entrambi domini  $B_\varepsilon^\pm$  é quindi  $\varphi_v(t)$  non ne massimo ne minimo relativo in  $t = 0$ .

Così deduciamo che  $(x_0, y_0)$  NON é sella.

Altro caso tipico é

$$F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y)$$

dove

$$\gamma_1 : f_1(x, y) = 0,$$

$$\gamma_2 : f_2(x, y) = 0$$

sono 2 curve con punto d'intersezione  $(x_0, y_0)$  che é punto critico di  $F$ .

**Esempio 11.2.5.** *Sia*

$$f_1(x, y) = y$$

e

$$f_2(x, y) = x^2 - y$$

Il punto  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  é punto critico per la funzione

$$F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y).$$

Ogni piccolo intorno di  $(x_0, y_0)$

$$B_\varepsilon = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

é tale che la circonferenza

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

e la retta

$$\gamma_2 : x = 1$$

lo divide in quattro domini

$$B_\varepsilon^{\pm, \pm} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) \gtrless 0, f_2(x, y) \gtrless 0\}$$

e quindi abbiamo

$$B_\varepsilon = (\gamma_1 \cap B_\varepsilon) \cup (\gamma_2 \cap B_\varepsilon) \cup_{\pm, \pm} B_\varepsilon^{\pm, \pm}.$$

I punti nel dominio

$$B_\varepsilon^{+, +} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) > 0, f_2(x, y) > 0\}$$

e nel dominio

$$B_\varepsilon^{-, -} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) < 0\}$$

soddisfano  $F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) > 0$ , mentre i punti nei domini

$$B_\varepsilon^{+, -} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) > 0, f_2(x, y) < 0\}$$

e nel dominio

$$B_\varepsilon^{-,+} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) > 0\}$$

soddisfano  $F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) < 0$ , possiamo dedurre che  $(x_0, y_0)$  non é punto di massimo o minimo relativo.

Prendendo

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$$

si calcola

$$\varphi_{v_1}(t) = F(t, 0) = 0$$

$$\varphi_{v_2}(t) = F(0, t) = -t^2$$

e quindi le condizioni della Definizione 11.2.2 sono state verificate. Abbiamo un punto di sella.

**Esempio 11.2.6.** Sia

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)$$

e

$$f_2(x, y) = x - 1$$

Il punto  $(1, 0)$  é punto critico per la funzione

$$F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y).$$

Ogni piccolo intorno di  $(x_0, y_0)$

$$B_\varepsilon = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

é tale che la circonferenza

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

e la retta

$$\gamma_2 : x = 1$$

lo divide in quattro domini

$$B_\varepsilon^{\pm, \pm} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) \gtrless 0, f_2(x, y) \gtrless 0\}$$



e quindi abbiamo

$$B_\varepsilon = (\gamma_1 \cap B_\varepsilon) \cup (\gamma_2 \cap B_\varepsilon) \cup_{\pm, \pm} B_\varepsilon^{\pm, \pm}.$$

I punti nel dominio

$$B_\varepsilon^{+,+} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) > 0, f_2(x, y) > 0\}$$

e nel dominio

$$B_\varepsilon^{-,-} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) < 0\}$$

soddisfano  $F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) > 0$ , mentre i punti nei domini

$$B_\varepsilon^{+,-} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) > 0, f_2(x, y) < 0\}$$

e nel dominio

$$B_\varepsilon^{-,+} = \{x; \|x - x_0\| < \varepsilon, f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) > 0\}$$

soddisfano  $F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) < 0$ , possiamo dedurre che  $(x_0, y_0)$  non é punto di massimo o minimo relativo.

Prendendo

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$$

si calcola

$$\varphi_{v_1}(t) = F(1+t, 0) = t(2t+t^2) = 2t^2 + o(t^2)$$

$$\varphi_{v_2}(t) = F(1, t) = 0$$

e quindi le condizione della Definizione 11.2.2 sono state verificate. Abbiamo un punto di sella.

**Esempio 11.2.7.** La funzione del Esempio 11.2.2

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)((x+1)^2 + y^2 - 4)$$

ha punto critico nel punto  $(1, 0)$ . Visto che per ogni vettore che  $(1, 0)$  NON é sella.

### 11.2.3 Condizioni sufficienti nello spazio

Nel caso di funzioni di 3 o più variabili, invece, si deve studiare il segno degli autovalori della matrice hessiana (nei punti critici, cioè dove si annulla il gradiente) e:

**Lemma 11.2.4.** *Abbiamo*

- a) *se gli autovalori sono strettamente maggiori di zero, il punto che annulla il gradiente è di minimo locale;*
- b) *se gli autovalori sono strettamente minori di zero, tale punto è di massimo locale;*
- c) *se gli autovalori cambiano segno, il punto è di sella;*
- d) *se gli autovalori sono tutti nulli, non danno informazioni sulla natura del punto.*

In caso di funzioni di due o più variabili, la ricerca dei punti di massimo e minimo non si esaurisce all'interno del dominio dove la funzione è derivabile, ma si devono cercare i massimi e i minimi anche sulla frontiera, in cui in generale la funzione non è differenziabile. In tal caso, nelle funzioni di due variabili si parametrizza la frontiera e si cercano i punti di massimo e di minimo come visto per una variabile reale.

## 11.3 Esercizi su massimi e minimi

**Problema 11.3.1.** *Trovare il minimo della funzione*

$$f(x, y) = (x - 4)^2 + 2y^2.$$

**Problema 11.3.2.** *Sia  $X$  un punto dentro il triangolo  $\triangle ABC$ . Trovare*

$$\min |XA| + |XB| + |XC|$$

*(minimo la somma delle distanze da un punto ai vertici di un triangolo e noto come punto di orricelli-Fermat).*

**Problema 11.3.3.** *Trovare il minimo della funzione*

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + 2y^2 - 1.$$

**Problema 11.3.4.** *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^6 + y^6 - 2x^3$$

*nel dominio  $x^3 + y^3 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$ .*

**Problema 11.3.5.** *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^2 + y^6 + 2x^4$$

*nel dominio  $x^2 + y^4 \leq 2, x \geq 0, y \leq 0$ .*

**Problema 11.3.6.** *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + z^4 - 5x^2$$

*nel dominio  $x^2 + y^2 \leq 2 - z^2, x \geq 0, y \geq 0$ .*

**Problema 11.3.7.** *Trovare i punti critici per la funzione*

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

**Problema 11.3.8.** *Trovare i punti stazionari della funzione*

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

*e dire se si tratta di punti di massimo o di minimo relativo.*

**Problema 11.3.9.** *Verificare la disequazione*

$$(x^2 + y^2) \leq 4e^{x+y-2} \quad (11.3.6)$$

*per  $x \geq 0, y \geq 0$ .*

**Problema 11.3.10.** *Sia*

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

*una funzione differenziabile tale che*

$$F(0) = 0, \sum_{j,k=1}^3 |\partial_j F_k(0)|^2 = c < 1.$$

*Mostrare che esiste  $r > 0$  tale che*

$$\|\mathbf{x}\| \leq r \implies \|F(\mathbf{x})\| \leq r.$$

**Problema 11.3.11.** *Sia*

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

*una funzione definita come segue*

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = x^2 + y^2 - Cx^\alpha y^\beta,$$

*dove  $C > 0$  e costante,  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Studiare*

$$\min_{x \geq 0, y \geq 0} F_{\alpha,\beta}(x, y).$$

Il Problema 11.3.11 si puo studiare seguendo i problemi successivi.

**Problema 11.3.12.** *Sia*

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

*una funzione definita come segue*

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = x^2 + y^2 - Cx^\alpha y^\beta,$$

*dove  $C > 0$  e costante,  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Vedere per quali  $\alpha, \beta$*

$$\inf_{x \geq 0, y \geq 0} F_{\alpha,\beta}(x, y) = -\infty.$$

**Problema 11.3.13.** *Sia*

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

*una funzione definita come segue*

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = x^2 + y^2 - Cx^\alpha y^\beta,$$

*dove  $C > 0$  e costante,  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Vedere per quali  $\alpha, \beta$*

$$\min_{x \geq 0, y \geq 0} F_{\alpha,\beta}(x, y) > -\infty$$

*esiste ed*

$$\min_{x \geq 0, y \geq 0} F_{\alpha,\beta}(x, y) = 0.$$

**Problema 11.3.14.** *Sia*

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

*una funzione definita come segue*

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = x^2 + y^2 - Cx^\alpha y^\beta,$$

*dove  $C > 0$  e costante,  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Vedere per quali  $\alpha, \beta$*

$$\min_{x \geq 0, y \geq 0} F_{\alpha,\beta}(x, y) > -\infty$$

*esiste ed*

$$\min_{x \geq 0, y \geq 0} F_{\alpha,\beta}(x, y) > 0.$$

**Problema 11.3.15.** *Data la funzione*

$$f(x, y) = y^3 + x^2y - 4x^2 - 8y^2 - 2xy + 8x + 17y - 4,$$

*trovare*

1. *i punti critici e la loro natura (massimo relativo, minimo relativo, né massimo né minimo, sella);*
2. *massimo assoluto (se esiste) e minimo assoluto (se esiste) nel dominio  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 \leq 0$ .*

*Soluzione. Punto a)*

Abbiamo

$$\partial_x f = 2xy - 8x - 2y + 8 = 0,$$

$$\partial_y f = 3y^2 + x^2 - 16y - 2x + 17 = 0.$$

La prima equazione ci da

$$2(x - 1)(y - 4) = 0$$

da qui abbiamo due possibilità:  $x = 1$  o/e  $y = 4$ . Se  $x_0 = 1$  troviamo l'equazione

$$3y^2 - 16y + 16 = 0$$

con due radici

$$y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{4}{3}.$$

Se  $y_0 = 4$  troviamo in modo simile

$$x_1 = x_2 = 1.$$

I punti critici sono

$$A(1, 4), \quad B(1, 4/3).$$

Per la matrice Hessiana troviamo

$$H(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad H(B) = \begin{pmatrix} -16/3 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

e quindi  $B$  é punto di massimo relativo con  $f(B) = 256/27 > 0$ . Per studiare il punto critico  $A$  usiamo il fatto che  $f(1, 4) = 0$  e la fattorizzazione

$$f(x, y) = [x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1](y - 4) = [(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4](y - 4).$$

Nel dominio

$$\{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4 < 0\} \cup \{y > 4\}$$

la funzione é positiva, mentre in

$$\{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4 > 0\} \cup \{y < 4\}$$

la funzione é negativa, quindi  $A$  NON é ne massimo, ne minimo relativo. Sulla retta  $y = 4$  la funzione é costante, mentre sulla retta  $x = 1$  nel punto  $x = 1$  abbiamo minimo locale, cosí deduciamo che  $A$  é punto di sella.

**Punto b)** L'insieme

$$\{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 \leq 0\}$$

é chiuso e limitato, quindi é un compatto. Il teorema di Weierstrass implica l'esistenza di minimo e di massimo per la funzione  $f$  che é continua. Sulla frontiera  $f(x, y) = 0$  e quindi il minimo assoluto é 0. Il massimo assoluto é  $f(B) = 256/27$ .

□

## 11.4 Molteplicatori di Lagrange

Consideriamo al inizio il caso bidimensionale. Supponiamo di avere un obiettivo,  $f(x_1, x_2)$  da massimizzare soggetto al vincolo:

$$g(x_1, x_2) = 0.$$

Possiamo considerare il caso

$$g(x_1, x_2) = x_2 - \varphi(x_1).$$

**Lemma 11.4.1.** *Se  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$  é punto di massimo (minimo) di  $f(x_1, x_2)$  soggetto al vincolo  $x_2 = \varphi(x_1)$ , allora esiste un numero reale  $\Lambda$  tale che*

$$\partial_{x_1} f(\mathbf{x}^*) - \Lambda \partial_{x_1} g(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (11.4.7)$$

$$\partial_{x_2} f(\mathbf{x}^*) - \Lambda \partial_{x_2} g(\mathbf{x}^*) = 0. \quad (11.4.8)$$

*Idea della dimostrazione.* Sia

$$F(x_1) = f(\varphi(x_1), x_1).$$

□

## 11.5 Teorema di Dini

Il teorema di Dini descrive le soluzione della equazione

$$F(x_1, x_2) = 0$$

quando il punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  é vicino ad un punto  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  tale che  $F(a_1, a_2) = 0$ .

**Lemma 11.5.1.** *(Teorema di Dini) Sia*

$$F(x_1, x_2) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

*una funzione definita in un dominio  $U$  aperto, sia  $F$  di classe  $C^1$  in  $U$ . Se il punto  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  in  $U$  soddisfa l'ipotesi*

$$F(\mathbf{a}) = 0, \partial_{x_2} F(\mathbf{a}) \neq 0, \quad (11.5.9)$$

allora esiste un intorno di  $a$  del tipo

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1 - a_1| < \varepsilon, |x_2 - a_2| < \delta\}$$

ed esiste una funzione

$$\varphi : (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \rightarrow (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$$

tale che:

a) per ogni  $x_1 \in (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon)$  abbiamo

$$F(x_1, \varphi(x_1)) = 0;$$

b) se  $(x_1, x_2) \in V$  è soluzione dell'equazione

$$F(x_1, x_2) = 0,$$

allora  $x_2 = \varphi(x_1)$ ;

c) la funzione

$$\varphi : (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \rightarrow (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$$

è di classe  $C^1$ .

*Idea della dimostrazione.* Si consideri il relativo sviluppo al primo ordine di Taylor:

$$F(x_1, x_2) = F(a_1, a_2) + \partial_{x_1} F(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \partial_{x_2} F(a_1, a_2)(x_2 - a_2) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$$

Tenendo conto che  $F(a_1, a_2) = 0$ , uguagliando a zero la prima parte del termine al primo ordine si ottiene:

$$\partial_{x_1} F(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + \partial_{x_2} F(a_1, a_2)(x_2 - a_2) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$$

Per ipotesi,

$$\partial_{x_2} F(a_1, a_2) \neq 0,$$

si può quindi ricavare  $x_2$  in funzione di  $x_1$ :

$$x_2 = a_2 - \frac{\partial_{x_1} F(\mathbf{a})}{\partial_{x_2} F(\mathbf{a})}(x_1 - a_1) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|).$$

Applicando il teorema della contrazione possiamo completare la dimostrazione (vedi la dimostrazione del Teorema 13.1.3).  $\square$



## 11.6 Esercizi su massimi, minimi vincolati

**Problema 11.6.1.** *Determinare il minimo e il massimo della funzione*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x + y + z)$$

*nell'insieme*

$$\{|x| + |y| + |z| = 1\}.$$

**Problema 11.6.2.** *Trovare fra tutti i triangoli di perimetro  $2p$  quello di area massima.*

*Suggerimento.* Ricordiamo la formula di Erone: dato un triangolo  $\Delta$  di lati di lunghezza  $x, y, z$  si ha che l'area é data da

$$A(\Delta) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

dove  $2p$  é il perimetro. □

**Problema 11.6.3.** *Tra tutti triangoli iscritti in circonferenza, quale/quale ha/hanno perimetro massimale*

**Problema 11.6.4.** *Tra tutti triangoli iscritti in circonferenza, quale ha area massimale*

**Problema 11.6.5.** *Trovare fra tutti i triangoli circoscritto alla circonferenza unitaria quello di area massima.*

**Problema 11.6.6.** *Sia  $F \subseteq \mathbb{R}^4$  definita da*

$$F = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

*Dato il punto*

$$P(1, 0, 0, 2)$$

*trovare la distanza euclidea tra  $P$  e  $F$ .*

**Problema 11.6.7.** *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|}$$

in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , dove  $\mathbf{a}$  é un vettore assegnato di modulo 1.

**Problema 11.6.8.** *Studiare*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

$$\inf_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2},$$

dove  $\mathbf{a}$  é un vettore assegnato di modulo 1.

**Problema 11.6.9.** *Se*

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é continua e omogenea di ordine  $a \in \mathbb{R}$ , allora studiare l'esistenza del minimo

$$I(\lambda) = \min_{\|x\|_2^2 = \lambda > 0} F(x)$$

al variare di  $a$ . Calcolare  $I(\lambda)$  dove  $I(\lambda)$  esiste.

**Problema 11.6.10.** *Se*

$$A$$

é una matrice simmetrica  $n \times n$  allora il problema

$$\min_{\|x\|^2=1} \langle Ax, x \rangle$$

ha almeno un minimizzante, cio' é ponendo

$$I = \inf_{\|x\|^2=1} \langle Ax, x \rangle$$

e scegliendo una successione

$$x_k, \quad \|x_k\|^2 = 1, \quad \langle Ax_k, x_k \rangle \rightarrow I,$$

si deve verificare che esiste una sottosuccessione di  $\{x_k\}$  che converge á  $x^*$  con

$$Ax^* = Ix^*.$$

**Problema 11.6.11.** *Se*

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*é un operatore lineare studiare l'esistenza del minimo*

$$I(\lambda) = \min_{\|x\|_2^2 = \lambda > 0} \langle Ax, x \rangle + \|x\|_p^p.$$

In generale vale la disequazione di Gagliardo Nirenberg (o la disequazione d'interpolazione)

$$\|x\|_\ell \leq C \|x\|_p^\theta \|x\|_q^{1-\theta} \quad (11.6.10)$$

per

$$\frac{1}{\ell} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \quad \theta \in (0, 1). \quad (11.6.11)$$

**Esempio 11.6.1.** *Scegliendo*

$$p = 2, q = 8, \ell = 4$$

*troviamo*

$$\theta = \frac{1}{3}$$

*e la disequazione di Gagliardo - Nirenberg diventa*

$$\|x\|_4 \leq C \|x\|_2^\theta \|x\|_8^{1-\theta} \quad (11.6.12)$$

*Per trovare la costante ottimale in (11.6.12) possiamo studiare*

$$\max_{\|x\|_8^8=1} \frac{\|x\|_4^3}{\|x\|_2}, \quad (11.6.13)$$

*oppure*

$$\min_{\|x\|_2^2=1} \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^3}, \quad (11.6.14)$$

*oppure*

$$\min_{\|x\|_4^4=1} \|x\|_8^2 \|x\|_2. \quad (11.6.15)$$

**Problema 11.6.12.** Sia  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e

$$\|x\|_p^p = |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p.$$

Trovare

$$\inf_{\|x\|_4^4=1} \|x\|_8^2 \|x\|_2.$$

*Suggerimento.* Possiamo supporre

$$x_j > 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Usiamo le relazioni

$$\partial_{x_j} \|x\|_p = \frac{x_j^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} \quad (11.6.16)$$

se  $x_j > 0, j = 1, \dots, n$ . Ponendo

$$F(x) = \|x\|_8^2 \|x\|_2,$$

troviamo

$$\partial_{x_j} F = 2\|x\|_8 \frac{x_j^7}{\|x\|_8^7} \|x\|_2 + \|x\|_8^2 \frac{x_j}{\|x\|_2}$$

e quindi

$$\partial_{x_j} (F(x) - \Lambda \|x\|_4^4) = 0$$

si può riscrivere come segue

$$2\|x\|_8 \frac{x_j^7}{\|x\|_8^7} \|x\|_2 + \|x\|_8^2 \frac{x_j}{\|x\|_2} - \Lambda 4x_j^3 = 0 \quad (11.6.17)$$

Da qui si deduce facilmente che  $\Lambda > 0$  perché

$$0 = \sum_{j=1}^n 2\|x\|_8 \frac{x_j^8}{\|x\|_8^7} \|x\|_2 + \|x\|_8^2 \frac{x_j^2}{\|x\|_2} - \Lambda 4x_j^4$$

ed il vincolo  $\|x\|_4^4 = 1$  implicano

$$\Lambda 4 = \sum_{j=1}^n 2\|x\|_8 \frac{x_j^8}{\|x\|_8^7} \|x\|_2 + \|x\|_8^2 \frac{x_j^2}{\|x\|_2} = 3\|x\|_8^2 \|x\|_2 > 0.$$

L'equazione (11.6.17) con  $\Lambda > 0$  ha due soluzioni positive perché ha la forma

$$A\mu^3 - B\mu + C = 0$$

con

$$A > 0, B > 0, C > 0, \mu = x_j^2.$$

In fatti abbiamo la seguente equazione per  $x_j^2 = \mu$

$$2\|x\|_8 \frac{x_j^6}{\|x\|_8^7} \|x\|_2 + \|x\|_8^2 \frac{1}{\|x\|_2} - 3\|x\|_8^2 \|x\|_2 x_j^2 = 0. \quad (11.6.18)$$

e quindi

$$2x_j^6 \|x\|_2^2 + \|x\|_8^8 - 3\|x\|_8^8 \|x\|_2^2 x_j^2 = 0. \quad (11.6.19)$$

Viceversa se  $x_j > 0$  soddisfano (11.6.19) si può vedere che automaticamente il vincolo

$$\|x\|_2^2 = 1$$

è soddisfatto. Per trovare il minimo della funzione  $F$  dobbiamo prendere  $x_j^2 = \mu$ , dove  $\mu$  è la radice positiva più piccola della equazione

$$2\|x\|_2^2 \mu^3 - 3\|x\|_8^8 \|x\|_2^2 \mu + \|x\|_8^8 = 0. \quad (11.6.20)$$

Così troviamo che il minimo si ammette al punto  $x^*$  definito con

$$x_1^* = x_2^* = \cdots = x_n^* = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

e quindi

$$\inf_{\|x\|_4^4=1} \|x\|_8^2 \|x\|_2 = F(x^*) = 1.$$

□

**Problema 11.6.13.** Sia  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e

$$\|x\|_p^p = |x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p.$$

Trovare

$$I_n = \inf_{\|x\|_2^2=1} \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^3}.$$

*Suggerimento.* Possiamo supporre

$$x_j > 0, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Usiamo le relazioni

$$\partial_{x_j} \|x\|_p = \frac{x_j^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} \quad (11.6.21)$$

se  $x_j > 0, j = 1, \dots, n$ . Ponendo

$$f(x) = \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^3}, \quad g(x) = \|x\|_2^2,$$

troviamo

$$\partial_{x_j} f(x) - \Lambda \partial_{x_j} g(x) = 2x_j^7 \|x\|_8^{-6} \|x\|_4^{-3} - 3x_j^3 \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^7} - \Lambda 2x_j$$

Moltiplicando per  $x_j$  e usando il vincolo, troviamo

$$2\Lambda = -\frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^3} < 0.$$

L'equazione

$$\partial_{x_j} f(x) - \Lambda \partial_{x_j} g(x) = 0$$

si può riscrivere come

$$2x_j^6 \|x\|_8^{-6} \|x\|_4^{-3} - 3x_j^2 \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^7} + \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^3} = 0$$

e quindi abbiamo

$$2\|x\|_4^4 \mu^3 - 3\mu \|x\|_8^8 + \|x\|_8^8 \|x\|_4^4 = 0 \quad (11.6.22)$$

$$\mu = x_j^2.$$

Viceversa se  $x_j > 0$  soddisfano

$$2\|x\|_4^4 x_j^6 - 3x_j^2 \|x\|_8^8 + \|x\|_8^8 \|x\|_4^4 = 0 \quad (11.6.23)$$

si può vedere che automaticamente il vincolo

$$\|x\|_2^2 = 1$$

è soddisfatto. Siccome la funzione

$$f(x) = \frac{\|x\|_8^2}{\|x\|_4^3},$$

non è monotona rispetto  $x_j$  non possiamo procedere come nella soluzione del problema (11.6.12) e concludere che dobbiamo prendere  $x_j^2 = \mu$ , dove  $\mu$  è la radice positiva più piccola della equazione (11.6.22).  $\square$

**Problema 11.6.14.** (*argomento per miniprogetto*) Verificare la disequazione d'interpolazione (11.6.10) per qualsiasi  $1 \leq p < q \leq \infty$ .

**Problema 11.6.15.** (*argomento per miniprogetto*) Tra tutti i triangoli iscritti in ellisse, quale/quale ha/hanno perimetro massimale.

# Chapter 12

## Funzioni convessi in $\mathbb{R}^n$

### 12.1 Insiemi convessi in spazi vettoriali

**Definizione 12.1.1.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un insieme  $A$  si dice convesso se per ogni coppia di punti  $x, y \in A$  il segmento che li congiunge:*

$$(1 - t)x + ty : t \in (0, 1)$$

*è interamente contenuto in  $A$ .*

L'intersezione di due insiemi convessi è ancora un insieme convesso.

#### Invilupo convesso

Inviluppo convesso (o talvolta involucro convesso) di un qualsiasi sottoinsieme  $I$  di uno spazio vettoriale reale l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono  $I$ .

Poiché l'intersezione di insiemi convessi è a sua volta convessa, una definizione alternativa di inviluppo convesso è "il più piccolo insieme convesso contenente  $I$ ".

L'inviluppo convesso si può costruire come l'insieme di tutte le combinazioni convesse di punti di  $I$ , cioè tutti i punti del tipo

$$\sum_j \alpha_j x_j,$$



dove gli  $x_j$  sono punti di  $I$  e  $\alpha_j$  sono numeri reali positivi a somma 1, ovvero

$$\sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0.$$

Evidentemente, se  $I$  é convesso, il suo involucro convesso é  $I$  stesso.

### Politopi convessi

Si possono dare due definizioni di politopi convessi che, abbastanza facilmente, si dimostrano equivalenti.

**Definizione 12.1.2.** *Si dice  $V$ -politopo l'involuppo convesso di un insieme finito di punti di uno spazio  $\mathbb{R}^d$ .*

**Definizione 12.1.3.** *Si dice  $H$ -politopo una intersezione di un certo numero di semispazi di uno spazio  $\mathbb{R}^d$  che sia limitato, cioe' che non contenga nessuna semiretta.*

Per dimensione di un politopo convesso si intende la dimensione del minimo sottospazio che lo contiene. Ad es. un poligono collocato nello spazio reale a tre dimensioni va considerato come un 2-politopo.

Due politopi convessi  $P$  e  $Q$  si dicono affinemente isomorfi se esiste una trasformazione affine tra i due spazi che li contengono che e' una biiezione fra i due insiemi di punti  $P$  e  $Q$ .

## 12.2 Funzioni convesse in domini convessi

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso e chiuso.

**Definizione 12.2.1.** *Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice strettamente convessa se per ogni coppia di punti  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  del dominio si ha:*

$$\lambda \in (0, 1) \implies f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

### Convessità della funzioni di più variabili e collegamento con funzioni convesse di una variabile

**Lemma 12.2.1.** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  convesso e siano*

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A; \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

*Posto*

$$\phi(t) = f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

*provare l'implicazione seguente:*

$$f \text{ (strettamente) convessa} \implies \phi \text{ (strettamente) convessa.}$$

### Disequazione di Jensen

**Lemma 12.2.2.** *Data una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa e dati  $x_j$  punti di  $\mathbb{R}^n$  abbiamo*

$$f\left(\sum_j \alpha_j x_j\right) \leq \sum_j \alpha_j f(x_j),$$

dove  $\alpha_j$  sono numeri reali positivi a somma 1, ovvero

$$\sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0.$$

La dimostrazione si può vedere in [4]

### Covessità e limitatezza superiormente

**Problema 12.2.1.** *(ogni funzione strettamente convessa e localmente limitata sup. nei punti interni di  $A$ ) Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa e  $x_0$  interno di  $A$  vedere se esiste  $\delta > 0$  e  $C > 0$  tale che*

$$\|x - x_0\| \leq \delta \implies x \in A, f(x) \leq C.$$

*Suggerimento.* Usare la disequazione di Jensen e il fatto che ogni palla

$$\{x; \|x\| \leq R\}$$

e' contenuta (e contiene) in un politopo. □

**Definizione 12.2.2.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Una funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice *lipschitziana* su  $\Omega$  se esiste  $K > 0$  tale che:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$$

per ogni  $x, y \in \Omega$ .

**Definizione 12.2.3.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Una funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice *LOCALMENTE lipschitziana* su  $\Omega$  se per ogni  $x_0 \in \Omega$  esiste  $\delta > 0$  e  $K > 0$  tale che:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$$

per ogni

$$x, y \in \Omega, \|x - x_0\| \leq \delta, \|y - x_0\| \leq \delta.$$

**Problema 12.2.2.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Se  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e *LOCALMENTE* lipschitziana e  $\Omega$  é connesso per archi, allora  $f$  é lipschitziana in  $\Omega$ .

**Problema 12.2.3.** Sia  $A$  aperto e connesso. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa vedere se

$$\|x - x_0\| \leq r \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|,$$

dove

$$M = \sup_{\|x - x_0\|=r} f(x).$$

*Suggerimento.* Vogliamo verificare la disequazione

$$\|x - x_0\| \leq r \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|,$$

dove

$$M = \sup_{\|x - x_0\|=r} f(x).$$

La disequazione si puo riscrivere come

$$\|x - x_0\| \leq r \implies f(x) - f(x_0) \leq \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\| \quad (12.2.1)$$

$$\|x - x_0\| \leq r \implies -f(x) + f(x_0) \leq \frac{M - f(x_0)}{r} \|x - x_0\|. \quad (12.2.2)$$

Per (12.2.1) si può prendere  $y_1$  tale che

$$\|y_1 - x_0\| = r, x = (1 - \alpha)x_0 + \alpha y_1, 0 < \alpha < 1,$$

dove

$$\alpha = \frac{\|x - x_0\|}{r}.$$

La funzione  $f(x)$  è convessa, quindi

$$f(x) \leq \alpha f(y_1) + (1 - \alpha)f(x_0) \implies f(x) - f(x_0) \leq (M - f(x_0))\alpha.$$

e quindi abbiamo (12.2.1).

Per (12.2.2) si prende  $y_2$  tale che

$$\|y_2 - x_0\| = r, x_0 = \beta x + (1 - \beta)y_2, 0 < \beta < 1,$$

dove

$$\beta = \frac{r}{r + \|x - x_0\|}, 1 - \beta = \frac{\|x - x_0\|}{r + \|x - x_0\|}.$$

La funzione  $f(x)$  è convessa, quindi si ha

$$\begin{aligned} f(x_0) \leq \beta f(x) + (1 - \beta)f(y_2) &\implies (r + \|x - x_0\|)f(x_0) \leq r f(x) + \|x - x_0\| M \implies \\ &\implies r(f(x_0) - f(x)) \leq \|x - x_0\|(M - f(x_0)) \end{aligned}$$

e quindi otteniamo (12.2.2) □

**Problema 12.2.4.** *Sia  $A$  aperto e connesso. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa vedere se  $f$  è continua.*

**Problema 12.2.5.** *Sia  $A$  aperto e connesso. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa ed due numeri reali  $0 < r < r_0$  vedere se*

$$\|x - x_0\| \leq r, \|y - x_0\| \leq r \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{M - m}{r_0 - r} \|x - y\|,$$

dove

$$M = \sup_{\|x - x_0\| \leq r_0} f(x), \quad m = \min_{\|x - x_0\| \leq r_0} f(x)$$

**Problema 12.2.6.** (Teorema di Locale Lipschitzianità.) Sia  $A$  aperto e connesso. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa vedere se  $f$  é localmente Lipschitziana.

**Problema 12.2.7.** Data una funzione differenziabile  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é strettamente convessa vedere se per ogni coppia di punti

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

del dominio si ha:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y}), (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle > 0.$$

**Lemma 12.2.3.** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ha derivate parziali seconde continue, allora  $f$  é convessa se e solo se la matrice hessiana  $H_f(x)$  é semidefinita positiva in ogni punto  $x \in A$ .

**Lemma 12.2.4.** Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ha derivate parziali seconde continue, allora  $f$  é strettamente convessa se e solo se la matrice hessiana  $H_f(x)$  é definita positiva in ogni punto  $x \in A$ .

**Problema 12.2.8.** (Mini - progetto da svolgere.) Sia  $A$  aperto e connesso. Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa e derivabile vedere se  $f$  é differenziabile.

### Unicitá del minimo delle funzione convesse

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso e convesso.

**Lemma 12.2.5.** Sia  $f : A \Rightarrow \mathbb{R}$  strettamente convessa e sia  $x_0$  punto di minimo assoluto. Allora si ha che non esistono altri punti di minimo assoluto.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  punto di minimo assoluto, al quale associamo il minimo assoluto

$$m = f(\mathbf{x}_0).$$

Si ha quindi per definizione di minimo assoluto che:

$$m = f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Supponiamo per assurdo che esista, un altro punto di minimo assoluto

$$\mathbf{x}_1 \in A,$$

necessariamente si ha che:

$$f(\mathbf{x}_1) = m$$

(altrimenti contraddirebbe la definizione di minimo assoluto)

Costruiamo il segmento

$$\lambda \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1 \quad \lambda \in [0, 1].$$

Usando il fatto che  $A$  è convesso e  $f$  è strettamente convessa, otteniamo:

$$f(\lambda \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1) < \lambda f(\mathbf{x}_0) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_1) = \lambda m + (1 - \lambda) m = m$$

Cioè abbiamo determinato un intero segmento

$$\lambda \mathbf{x}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_1$$

formato da punti la cui immagine tramite  $f$  è minore del minimo assoluto il che è un assurdo. Questo assurdo è nato dall'aver supposto l'esistenza di un altro punto di minimo assoluto, e quindi non può esistere.  $\square$

## 12.3 Esercizi sulle funzioni convesse

**Problema 12.3.1.** *Poniamo*

$$J_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_p^2,$$

dove

$$\|\mathbf{x}\|^p = \sum_{j=1}^n |x_j|^p$$

è  $p > 1$ .

*Si provi che:  $J_0$  è una funzione strettamente convessa e differenziabile.*

**Problema 12.3.2.** Sia  $\langle, \rangle$  prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

Si provi che:  $J$  é una funzione strettamente convessa e differenziabile.

**Problema 12.3.3.** Sia  $\langle, \rangle$  prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

Si provi che:

$$\|\mathbf{x}_k\| \rightarrow \infty \implies J(\mathbf{x}_k) \rightarrow \infty.$$

**Problema 12.3.4.** Sia  $\langle, \rangle$  prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

Si provi che:  $J$  ha minimo su  $\mathbb{R}^n$  ed il punto di minimo é  $\mathbf{v}$ .

**Problema 12.3.5.** Sia  $\langle, \rangle$  prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle$$

Se  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  é un convesso chiuso, allora  $J$  ha minimo su  $K$  ed il punto di minimo  $\mathbf{u}$  é l'unica soluzione in  $K$  della disequazione variazionale

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle \geq \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{u} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in K.$$

**Problema 12.3.6.** Sia

$$\|x\|_p^p = x_1^p + x_2^p, p > 1$$

e sia

$$c = \min_{\|x\|_2=1} \|x\|_4^4.$$

Descrivere l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_4^4 = c, \|x\|_2 = 1\}.$$

Risposta. Sia

$$f(x) = \|x\|^4$$

e  $\lambda$  é moltiplicatore di Lagrange tale che

$$\partial_1 f(x) = 2\lambda x_1,$$

$$\partial_2 f(x) = 2\lambda x_2.$$

e quindi abbiamo il sistema

$$\begin{aligned} 4x_1^3 &= 2\lambda x_1, \\ 4x_2^3 &= 2\lambda x_2. \end{aligned} \tag{12.3.3}$$

Le soluzioni dell'equazione

$$4y^3 = 2\lambda y$$

sono

$$y = 0, y = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{2}}.$$

Cos'le soluzioni del sistema (12.3.3) sono

$$\left(0, \pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\right), \left(\pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}, 0\right) \tag{12.3.4}$$

e

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}, \pm\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\right). \tag{12.3.5}$$

Il vincolo  $\|x\|_2 = 1$  implica

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1. \tag{12.3.6}$$

Abbiamo  $f(12.3.4) = 1$  e  $f(12.3.5) = 1/2$  e quindi  $c = 1/2$  e

$$\mathbf{Card}\{x : \|x\|_4^4 = c\} = 4.$$

□



**Problema 12.3.7.** *Sia*

$$f(x) = x_1^p + x_2^p, p > 2$$

e sia

$$c = \min_{\|x\|_2=1} f(x).$$

*Descrivere l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}^2; f(x) = c, \|x\|_2 = 1\}.$$

Risposta.

$$\mathbf{Card}\{x : f(x) = c\} = 4.$$

□

**Problema 12.3.8.** *Sia*

$$f(x) = q(x_1) + q(x_2),$$

dove

$$q(y) = y^2 + y^4 - a \sin(by).$$

Se

$$c = \min_{\|x\|_2=1} f(x).$$

*Descrivere l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}^2; f(x) = c, \|x\|_2 = 1\}.$$

Risposta.

$$\mathbf{Card}\{x : f(x) = c\} = 4.$$

□

**Problema 12.3.9.** *In ogni insieme  $A$  convesso, chiuso, non vuoto e contenuto in uno spazio di Hilbert esiste un unico elemento  $x_0 \in A$  tale che:*

$$\|x_0\| < \|x\|, \forall x \in A \setminus \{x_0\}.$$

# Chapter 13

## I teoremi della funzione inversa e della funzione implicita

### 13.1 La funzione inversa

Prima ricordiamo il teorema della funzione inversa di una variabile.

**Teorema 13.1.1.** *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un aperto e  $x_0$  un punto di  $I$ . Se  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  é una funzione di classe  $C^1$  tale che il  $F'(x_0) \neq 0$ . Allora esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che la restrizione di  $F$  su  $U$*

$$F : U \rightarrow F(U)$$

*é invertibile ed esiste*

$$G : F(U) \rightarrow U$$

*tale che*

$$G(F(x)) = x, \quad \forall x \in U, \quad F(G(y)) = y, \quad \forall y \in F(U).$$

*Inoltre, tale inversa é anche differenziabile e per ogni  $y \in f(U)$  vale:*

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{F'(G(y))}.$$

Il passo successivo é il caso di "dipendenza di un parametro  $u \in \mathbb{R}^n$ ", cioé quando la funzione  $F$  é tale che

$$F : I \times J \rightarrow K,$$

dove  $I \subset \mathbb{R}$  é un intorno di  $x_0$ ,  $J \subset \mathbb{R}^n$  é un intorno di  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $K \subset \mathbb{R}$  é un intorno di  $y_0 = F(x_0, u_0)$ .

**Teorema 13.1.2.** *Sia  $F : I \times J \rightarrow K$  é una funzione di classe  $C(I \times J)$  tale che  $\partial_x F(x, u)$  esiste ed é in classe  $C(I \times J)$ . Se  $\partial_x F(x_0, u_0) \neq 0$ , allora esiste un intorno  $W \subset K \times J$  di  $(y_0, u_0)$  ed un intorno  $U \subset I$  di  $x_0$  tale che*

a) *per ogni  $(y, u) \in W$  esiste unico  $x \in U$  tale che*

$$y = F(x, u)$$

b) *se si pone  $x = G(y, u)$ , allora  $G \in C(W)$  la derivata parziale  $\partial_y G(y, u)$  esiste appartiene a  $C(W)$  e vale la relazione*

$$\partial_y G(y, u) = \frac{1}{\partial_x F(x, u)}, \quad y = F(x, u).$$

**Dimostrazione.** L'ipotesi  $\partial_x F(x_0, u_0) \neq 0$  e la continuita' di  $\partial_x F$  implica  $\partial_x F(x, u) \neq 0$  per un piccolo intorno  $U$  di  $(x_0, u_0)$ . Senza perdita di generalita supponiamo

$$\partial_x F(x, u) > 0, \quad \forall (x, u) \in U.$$

Usando il teorema della permanenza del segno ed applicando il teorema della funzione inversa per funzioni continui e strettamente monotoni deduciamo che per un piccolo intorno  $W$  di  $(y_0, u_0)$  per ogni  $(y, u) \in W$  si puo definire la funzione  $(y, u) \rightarrow x$ , tale che  $y = F(x, u)$ . Sia  $x = G(y, u)$ .

Per verificare la differenziabilita' rispetto  $y$  di  $G(y, u)$  fissiamo  $x_1 \in U$ ,  $(y_1, u_1) \in W$  tale che  $y_1 = F(x_1, u_1)$  e usiamo la relazione

$$F(x_1 + h, u_1) = F(x_1, u_1) + \partial_x F'(x_1, u_1)h + o(|h|).$$

Ponendo  $k = k(h, u_1) = F(x_1 + h, u_1) - F(x_1, u_1)$ , si ottiene

$$y_1 + k(h, u_1) = F(x_1 + h, u_1) = y_1 + \partial_x F(x_1, u_1)h + o(|h|)$$

e

$$k(h, u_1) = \partial_x F(x_1, u_1)h + o(|h|), \quad h \rightarrow 0 \quad (13.1.1)$$

e la condizione  $\partial_x F(x_0, u_0) > 0$  per vedere che esistono due costanti  $C_1, C_2 > 0$  tali che

$$C_1|h| \leq k(h, u_1) \leq C_2|h|$$

cioé  $k(h, u_1) \sim h$ . La relazione (13.2.10) implica

$$h = \frac{k(h, u_1)}{\partial_x F(x_1, u_1)} + o(|h|)$$

mentre  $k(h, u_1) \sim h$  ci permette di ottenere

$$h = \frac{k(h, u_1)}{F'(x)} + o(|h|) = \frac{k(h, u_1)}{F'(x)} + o(|k(h, u_1)|) \quad (13.1.2)$$

Usando il fatto che  $G(y, u_1)$  é tale che  $G(F(x, u_1), u_1) = x$ , possiamo ottenere

$$h = x_1 + h - x_1 = G(y_1 + k(h, u_1), u_1) - G(y_1, u_1)$$

e (13.2.11) ci da

$$G(y_1 + k(h, u_1), u_1) - G(y_1, u_1) = h = \frac{k(h, u_1)}{F'(x_1, u_1)} + o(k(h, u_1))$$

così otteniamo  $\partial_y G(y, u_1)$  e differenziabile in  $y_1$  e

$$\partial_y G(y_1, u_1) = \frac{1}{\partial_x F(x_1, u_1)}.$$

□

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}^n$  un intervallo aperto e  $x_0$  un punto di  $I$ .

**Teorema 13.1.3.** [Il teorema della funzione inversa] Se

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é una funzione di classe  $C^1$  tale che il determinante Jacobiano di  $F$  in  $x_0$  é non nullo:

$$\det J(x_0) = \det F'(x_0) \neq 0 \quad (13.1.3)$$

allora esistono  $\delta > 0$  e una funzione

$$G : V_\delta(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - y^0\|_\infty < \delta\} \rightarrow U,$$

dove  $y^0 = F(x^0)$ , tale che

- a)  $F(G(y)) = y$ , per ogni  $y \in V_\delta(y)$ ;
- b)  $G(y) \in C^1(V_\delta(y_0); U)$ ;
- c)  $G'(y) = (F'(x))^{-1}$ ,  $x = G(y)$ ,  $y \in V_\delta(y_0)$ .

*Prima Dimostrazione con il teorema delle contrazioni.* Sappiamo che

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + o(\|h\|).$$

Sia  $\varepsilon > 0$ . Primo passo é la verifica che esiste  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tale che per ogni  $k$ ,  $\|k\| \leq \delta$  l'equazione

$$k = F(x_0 + h) - F(x_0) \quad (13.1.4)$$

$$k = F(x_0 + h) - F(x_0)$$

ha unica soluzione  $h$ ,  $\|h\| \leq \varepsilon$ . Per verificare questa proprietá poniamo

$$A = F'(x_0)$$

allora l'equazione (13.1.4) diventa

$$k = Ah + o(\|h\|).$$

Visto che  $A$  é invertibile abbiamo

$$A^{-1}k = h + g(h), \quad g(h) = o(\|h\|),$$

e quindi

$$\|h\| \sim \|k\|. \quad (13.1.5)$$

Abbiamo inoltre

$$\|g(h_1) - g(h_2)\| \leq \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\|, \quad (13.1.6)$$

quando  $\|h_1\|, \|h_2\|$  sono abbastanza piccoli. Infatti

$$g(h) = A^{-1}F(x_0 + h) - F(x_0) - h$$

ed applicandi il teorema di Taylor troviamo

$$\|g(h_1) - g(h_2)\| \leq \sup_{\xi \text{ é in segmento } [h_1, h_2]} \|g'(\xi)\| \|h_1 - h_2\|.$$

Sappiamo che

$$g'(0) = A^{-1}F'(x_0) - I = 0$$

e' quindi la continuitá di  $F'$  vicino a  $x_0$  implica (13.1.6). Il teorema delle contrazioni implica che esiste  $\delta > 0$  tale che l'equazione (13.1.4) con  $\|k\| \leq \delta$  ha unica soluzione  $h, \|h\| \leq \varepsilon$ .

Ponendo

$$G(y_0 + k) = G(y_0) + h = x_0 + h$$

abbiamo la relazione

$$F(G(y_0 + k)) = F(x_0 + h) = F(x_0) + F(x_0 + h) - F(x_0) = y_0 + k.$$

Per verificare il punto b), cioé la differenziabilita della funzione inversa  $G$  usiamo le relazioni

$$\begin{aligned} G(y_0+k) - G(y_0) - A^{-1}k &= h - A^{-1}(F(x_0+h) - F(x_0)) = h - A^{-1}Ah + o(\|h\|) = \\ &= o(\|h\|) \end{aligned}$$

cosí (13.1.5) implica

$$G(y_0 + k) - G(y_0) - A^{-1}k = o(\|k\|)$$

e quindi

$$G'(y) = (F'(x))^{-1}$$

per  $x = G(y)$  in piccolo intorno di  $x_0$ . La continuità della funzione  $G'(y)$  segue dalla relazione

$$G'(y) = (F'(x))^{-1}$$

per  $x = G(y)$  in piccolo intorno di  $x_0$  e della seguente osservazione semplice: se  $A(y) = F'(x)$  è una matrice con elementi funzioni continui per  $y$  in piccolo aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $A(y)$  è invertibile, allora la matrice  $(A(y))^{-1}$  è una matrice con elementi funzioni continui<sup>1</sup>.  $\square$

**Seconda Dimostrazione.** Sia

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x^0\|_\infty < \varepsilon\}$$

un intervallo con centro  $x^0$  e raggio  $\varepsilon > 0$ . Il teorema afferma che ogni funzione

$$F : U_\varepsilon(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x^0\|_\infty < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che soddisfa la proprietà (13.1.3), soddisfa anche la proprietà, descritta nella seguente definizione,

**Definizione 13.1.1.** *La proprietà  $\mathcal{P}(F, x^0, y^0, \varepsilon)$ , è vera se esiste  $\delta > 0$  e una funzione*

$$G : V_\delta(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|y - y^0\|_\infty < \delta\} \rightarrow U_\varepsilon(x_0),$$

*tale che*

- a)**  $F(G(y)) = y$ , per ogni  $y \in V_\delta(y^0)$ ;
- b)**  $G(y_0) = x_0$ ;
- c)**  $G(y) \in C^1(V_\delta(y_0); U_\varepsilon(x_0))$ ;
- d)**  $G'(y) = (F'(x))^{-1}$ ,  $y = F(x)$ .

---

<sup>1</sup>segue della formula di rappresentazione della matrice inversa

Prima notiamo che se

$$U_1 = U_{\varepsilon_1}(x^0), U_2 = U_{\varepsilon_2}(y^0)$$

sono due intervalli aperti in  $\mathbb{R}^n$  e se

$$F_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n, F_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono due funzioni che soddisfano (13.1.3),  $\mathcal{P}(F_1, x^0, y^0, \varepsilon_1)$  e  $\mathcal{P}(F_2, y^0, z^0, \varepsilon_2)$  con  $y^0 = F_1(x_0)$ ,  $z_0 = F_2(y_0)$ , allora la composizione  $F_2 \circ F_1$  soddisfa (13.1.3) e la proprietà  $\mathcal{P}(F_2 \circ F_1, x^0, z^0, \varepsilon_3)$  con  $\varepsilon_3 > 0$  abbastanza piccolo.

L'altra osservazione é che la proprietà  $\mathcal{P}(A, x^0, y^0, \varepsilon_1)$  ovviamente é vera se

$$A(x) = B(x - x_0) + y_0$$

é una trasformatata affine, cioè  $B$  una matrice invertibile e  $x_0, y_0$  vettori fissi (vettori di traslazione).

Per quello possiamo introdurre un cambiamento di variabili

$$\tilde{y} = B(y - y^0), \tilde{x} = x - x^0$$

e usare le proprietà

$$y = F(x) \iff B(y - y_0) = B(F(x) - F(x^0)) \iff \tilde{y} = \Phi(\tilde{x}),$$

dove

$$\Phi(\tilde{x}) = B(F(x^0 + \tilde{x}) - F(x^0)) = BF'(x^0)\tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|).$$

Scegliendo

$$B = (F'(x^0))^{-1}$$

otteniamo

$$y = F(x) \iff \tilde{y} = \Phi(\tilde{x}),$$

dove

$$\Phi(\tilde{x}) = \tilde{x} + o(\|\tilde{x}\|)$$

Così senza perdita di generalità possiamo supporre  $x^0 = y^0 = 0$ , e

$$F'(0) = I. \quad (13.1.7)$$



Come passo successivo possiamo osservare che le proprietà  $x^0 = y^0 = 0$ , e (13.1.7) implicano che

$$F = F_1 \circ F_2 \circ \cdots \circ F_n, \quad (13.1.8)$$

dove  $y = F_j(x)$  é definito come

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ \dots\dots\dots \\ y_{j-1} = x_{j-1}, \\ y_j = x_j + r_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n), \\ y_{j+1} = x_{j+1}, \\ \dots\dots\dots \\ y_n = x_n. \end{cases} \quad (13.1.9)$$

e

$$r_j(x) = o(\|x\|), \quad \nabla r_j(x) = o(1).$$

Applicando Teorem 13.2.1 della funzione inversa per  $F_j$  concludiamo che ogni  $F_j$  soddisfa la proprietà descritta nella definizione (13.1.1) e quindi  $F = F_1 \circ F_2 \circ \cdots \circ F_n$ , soddisfa la proprietà descritta nella definizione (13.1.1).  $\square$

Una funzione differenziabile che possiede inversa locale differenziabile si dice un diffeomorfismo locale.

## 13.2 Il teorema della funzione implicita

Il teorema della funzione implicita puo essere considerato come teorema della funzione inversa nel caso di "dipendenza di un parametro  $u \in \mathbb{R}^k$ ", cioè quando la funzione  $F$  é tale che

$$F : I \times J \rightarrow K,$$

dove  $I \subset \mathbb{R}^n$  é un intorno di  $x_0$ ,  $J \subset \mathbb{R}^k$  é un intorno di  $u_0 \in \mathbb{R}^k$  e  $K \subset \mathbb{R}^n$  é un intorno di  $y_0 = F(x_0, u_0)$ .

**Teorema 13.2.1.** *Sia  $F : I \times J \rightarrow K$  é una funzione di classe  $C^1(I \times J)$  tale che  $\partial_x F(x, u)$  esiste ed é in classe  $C(I \times J)$ . Se*

$$rk(\partial_x F(x_0, u_0)) = n,$$

*allora esiste un intorno  $W = K_1 \times J_1 \subset K \times J$  di  $(y_0, u_0)$  ed un intorno  $U \subset I$  di  $x_0$  tale che*

*a) per ogni  $(y, u) \in W$  esiste unico  $x \in U$  tale che*

$$y = F(x, u)$$

*b) se si pone  $x = G(y, u)$ , allora  $G \in C(W)$  il differenziale  $G'_y(y, u)$  esiste appartiene a  $C(W)$  e vale la relazione*

$$G'_y(y, u) = (F'_x(x, u))^{-1}, \quad y = F(x, u).$$

**Dimostrazione.** L'ipotesi  $\det(F'_x(x_0, u_0)) \neq 0$  e la continuita' di  $F'_x$  implica  $\det(F'_x(x, u)) \neq 0$  per un piccolo intorno  $W_1$  di  $(x_0, u_0)$ . Usando il teorema della funzione inversa deduciamo che per un piccolo intorno  $W = K_1 \times J_1 \subseteq W_1$  di  $(y_0, u_0)$  per ogni  $(y, u) \in W$  si puo definire la funzione  $(y, u) \rightarrow x$ , tale che  $y = F(x, u)$ . Sia  $x = G(y, u)$ .

Per verificare la differenziabilita' rispetto  $y$  di  $G(y, u)$  fissiamo  $x_1 \in U$ ,  $(y_1, u_1) \in W$  tale che  $y_1 = F(x_1, u_1)$  e usiamo la relazione

$$F(x_1 + h, u_1) = F(x_1, u_1) + \partial_x F(x_1, u_1)h + o(\|h\|).$$

Ponendo  $k = k(h, u_1) = F(x_1 + h, u_1) - F(x_1, u_1)$ , si ottiene

$$y_1 + k(h, u_1) = F(x_1 + h, u_1) = y_1 + \partial_x F(x_1, u_1)h + o(\|h\|)$$

e

$$k(h, u_1) = \partial_x F(x_1, u_1)h + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0 \quad (13.2.10)$$

e la condizione  $\det(F'_x(x_0, u_0)) \neq 0$  per vedere che esistono due costanti  $C_1, C_2 > 0$  tali che

$$C_1\|h\| \leq \|k(h, u_1)\| \leq C_2\|h\|$$

cioé  $\|k(h, u_1)\| \sim \|h\|$ . La relazione (13.2.10) implica

$$h = (F'_x(x_1, u_1))^{-1} k(h, u_1) + o(\|h\|)$$

mentre  $\|k(h, u_1)\| \sim \|h\|$  ci permette di ottenere

$$h = (F'_x(x, u_1))^{-1}k(h, u_1) + o(\|h\|) = (F'_x(x, u_1))^{-1}k(h, u_1) + o(\|k(h, u_1)\|) \quad (13.2.11)$$

Usando il fatto che  $G(y, u_1)$  é tale che  $G(F(x, u_1), u_1) = x$ , possiamo ottenere

$$h = x_1 + h - x_1 = G(y_1 + k(h, u_1), u_1) - G(y_1, u_1)$$

e (13.2.11) ci da

$$G(y_1 + k(h, u_1), u_1) - G(y_1, u_1) = h = (F'_x(x_1, u_1))^{-1}k(h, u_1) + o(k(h, u_1))$$

cosi otteniamo  $\partial_y G(y, u_1)$  e differenziabile in  $y_1$  e

$$\partial_y G(y_1, u_1) = (F'_x(x_1, u_1))^{-1}.$$

□

Come corollario abbiamo il seguente.

**Teorema 13.2.2.** *(II Teorema del Dini, per funzioni di 3 variabili)*  
Sia  $f : U(\text{aperto}) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1(U)$ . Sia

$$x^0 = (x_1; x_2; x_3) \in U$$

tale che

$$f(x^0) = c,$$

ovvero,  $x^0$  appartiene all'insieme di livello

$$\{f = c\} = \{x \in U; f(x) = c\}.$$

Se

$$\partial_{x_3} f(x^0) \neq 0$$

allora esiste un intorno

$$J \times I,$$

dove  $J$  é un intervallo con centro  $(x^0)' = (x_1^0, x_2^0)$  in  $\mathbb{R}^2$  del tipo

$$J = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \|x' - (x^0)'\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

e  $I$  é un intervallo con centro  $(x^0)'' = x_3^0$  tale che

$$I = \{x'' = (x_3) \in \mathbb{R}^1; \|x'' - (x^0)''\|_\infty \leq \delta\}$$

tale che l'insieme

$$\{f = c\} \cap (J \times I)$$

e' il grafico di una funzione

$$x'' = h(x'),$$

con

$$h : J \rightarrow I$$

di classe  $C^1(J)$ , ovvero

**a)** per ogni  $x' \in J$  esiste un unico  $x'' = h(x') \in I$  tale che

$$f(x', h(x')) = c$$

**b)** inoltre si ha

$$h \in C^1(J);$$

**c)** in particolare deve essere

$$h((x^0)') = (x^0)''.$$

### 13.3 Esercizi sulla funzione inversa e la funzione implicita

**Problema 13.3.1.** **a)** La funzione  $z(x, y)$  é differenziabile e soddisfa  $z(1, 1) = 1$  e

$$\frac{x}{z} = 1 + \log\left(\frac{z}{y}\right).$$

Calcolare  $\partial_x^2 z(1, 1)$  se esiste;

b) Se  $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e  $n, k, \ell$  sono numeri naturali si può costruire la funzione composta

$$z(x, u, v) = v^k \Psi \left( \frac{u}{v^n}, \frac{x}{v^{2\ell}} \right).$$

Descrivere il codominio della funzione

$$f(x, u, v) = v \partial_v z + nu \partial_u z + 2\ell x \partial_x z, \quad x, u, v \in \mathbb{R}, v \neq 0,$$

sapendo che il codominio di  $z$  è  $\mathbb{R} \setminus \{\log \sqrt[4]{11}\}$ .

Soluzione punto a). Derivando la relazione

$$\frac{x}{z} = 1 + \log \left( \frac{z}{y} \right),$$

otteniamo le relazioni

$$\partial_x z(x+z) = z. \quad (13.3.12)$$

La derivata successiva ci dà

$$\partial_x^2 z(x+z) + \partial_x z + (\partial_x z)^2 = \partial_x z$$

e quindi

$$\partial_x^2 z(x+z) + (\partial_x z)^2 = 0. \quad (13.3.13)$$

L'identità (26.13.61) implica  $\partial_x z(1, 1) = 1/2$ . Usando questa relazione e (26.13.62) si trova  $\partial_x^2 z(1, 1) = -1/8$ .

□

**Problema 13.3.2. a)** La funzione  $z(x, y)$  è differenziabile e soddisfa  $z(\pi/4, \pi/4) = \pi/2$  e

$$z = x + \arctan \left( \frac{y}{z-x} \right).$$

Calcolare  $\partial_x z(\pi/4, \pi/4)$  se esiste.

b) Se  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$  e  $n, k, \ell$  sono numeri naturali si può costruire la funzione composta

$$w(u, y, v) = u^{2n+1} \varphi \left( \frac{y}{u^{2k+1}}, \frac{v}{u^{2\ell+1}} \right).$$

Descrivere il codominio della funzione

$$f(u, y, v) = u \partial_u w + (2k+1)y \partial_y w + (2\ell+1)v \partial_v w, \quad u, y, v \in \mathbb{R}, u \neq 0,$$

sapendo che il codominio di  $w$  è  $\mathbb{R} \setminus [1, 2]$ .

Soluzione punto a). Derivando la relazione

$$z = x + \arctan \left( \frac{y}{z-x} \right).$$

otteniamo le relazioni

$$\partial_x z = 1 + \frac{1}{1 + y^2/(z-x)^2} \left( \frac{-y(\partial_x z - 1)}{(z-x)^2} \right) = 1 + \frac{y(1 - \partial_x z)}{(z-x)^2 + y^2}.$$

Nel punto  $x = \pi/4, y = \pi/4, z = \pi/2$  troviamo

$$\partial_x z = 1 + \frac{2\pi(1 - \partial_x z)}{\pi^2} \implies \partial_x z(\pi/4, \pi/4) = 1.$$

□

Soluzione punto b). La funzione  $f$  è in  $C^1$ , perché  $w \in C^2$ . Abbiamo inoltre le relazioni

$$\partial_u w = (2n+1)u^{2n} \varphi - (2k+1)yu^{2n-2k-1} \partial_{x_1} \varphi - (2\ell+1)vu^{2n-2\ell-1} \partial_{x_2} \varphi,$$

$$\partial_y w = u^{2n-2k} \partial_{x_1} \varphi,$$

$$\partial_v w = u^{2n-2\ell} \partial_{x_2} \varphi.$$

Così troviamo

$$f = (2n+1)w.$$

Il codominio di  $f$  è  $\mathbb{R} \setminus [(2n+1), 2(2n+1)]$ .

□



## Part III

### Seconda Parte: Equazioni e sistemi di equazioni differenziali ordinarie





## Chapter 14

# Richiami sulle Equazioni Ordinarie del corso di Analisi Matematica 1

L'equazione  $y'(x) = f(y)$  é una equazione ordinarie. La soluzione si trova integrando:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx.$$

Se  $F(y)$  é una primitiva di  $1/f(y)$  allora  $1/f(y) = F'(y)$  e tutti soluzioni  $y(x)$  sono soluzioni di

$$F(y) = x + C.$$

Il problema di Cauchy

$$y'(x) = f(y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (14.0.1)$$

con  $f(y_0) \neq 0$  ha unica soluzione  $y = y(x)$  in un intorno di  $x_0$  definita dalla equazione

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{f(t)} = x - x_0. \quad (14.0.2)$$

L'equazione

$$y'(x) = f(y)g(x),$$

é equazione a variabili separabili.

Il problema di Cauchy

$$y'(x) = f(y)g(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (14.0.3)$$

con  $f(y_0) \neq 0$  ha unica soluzione  $y = y(x)$  in un intorno di  $x_0$  definita dalla equazione

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{f(t)} = \int_{x_0}^x g(s)ds. \quad (14.0.4)$$

**Problema 14.0.1.** *Trovare tutti soluzioni di*

$$y' = y^2, \quad y' = \sin y, \quad y' = 2y + 3.$$

**Problema 14.0.2.** *Risolvere le equazioni*

$$xy + (x+1)^2 y' = 0, \quad y' \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}.$$

Risp.

$$y = \frac{c}{x+1} e^{-1/(x+1)}, \quad y + \sqrt{1+y^2} = c(x + \sqrt{1+x^2}).$$

## 14.1 Equazioni ordinarie lineari

L'equazione

$$y' = a(t)y(t) + b(t), \quad (14.1.5)$$

dove  $t \in I$  e  $I$  e' un intervallo in  $\mathbb{R}$  si chiama equazione lineare. Se  $b(t) = 0$  l'equazione si chiama omogeneo. Tutte le soluzioni di questa equazione si possono rappresentare come

$$y(t) = e^{A(t)} \left( c + \int b(s)e^{-A(s)} ds \right),$$

dove  $A(t) = \int a(s)ds$  e' una primitiva di  $a(t)$ . Il problema di Cauchy

$$y' = a(t)y(t) + b(t), \quad y(x_0) = y_0 \quad (14.1.6)$$

ha unica soluzione definita da

$$y(t) = e^{A(t)} \left( y_0 + \int_{x_0}^x b(s)e^{-A(s)} ds \right), \quad A(t) = \int_{x_0}^t a(s)ds.$$

## 14.2 Esercizi sulle equazioni ordinarie lineari del primo ordine

**Problema 14.2.1.** *Trovare tutti soluzioni di*

$$1) y' = 3t^2y(t) + t^5, \quad 2) y' = y + \sin t, \quad 3) 2ty' + y = y^3t^3e^{2t}$$

Risp.

$$1) y(t) = ce^{t^3} - \frac{1}{3}(t^3 + 1), \quad 2) y(t) = ce^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

$$3) y^2(t) = ct - e^{2t} \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} \right).$$

**Problema 14.2.2.** *Trovare tutti soluzioni della equazione di Riccati*

$$3t^2y' + y^2t^2 + 2 = 0,$$

Suggerimento. Una soluzione particolare  $e'$  del tipo  $y(t) = a/t$ , dove  $a = 1, 2$  Dopo la sostituzione  $y = x + 1/t$  otteniamo l'equazione di Bernoulli

$$3tx' + x^2t + 2x = 0$$

Le soluzioni sono  $x = 0$  o  $x = (t + ct^{2/3})^{-1}$ .

**Problema 14.2.3.** *Sia  $f(t)$  e  $T$ - periodica e continua. Verificare che l'equazione  $y'(t) = f(t)$  ha una soluzione periodica con periodo  $T$  se e solo se  $\int_0^T f(t)dt = 0$ .*

**Problema 14.2.4.** *Sia  $f(t)$  e  $T$ - periodica e continua. Se l'equazione  $y'(t) = f(t)$  ha una soluzione limitata allora  $\int_0^T f(t)dt = 0$ .*

**Problema 14.2.5.** *Sia  $a(t)$  e  $T$ - periodica e continua. Verificare che l'equazione  $y'(t) = a(t)y(t)$  ha una soluzione periodica con periodo  $T$  se e solo se  $\int_0^T a(t)dt = 0$ .*

**Problema 14.2.6.** *Sia  $a(t), b(t)$  sono funzioni continui con periodo  $T$  e  $\int_0^T a(t)dt \neq 0$ . Quante soluzione periodiche con periodo  $T$  ha l'equazione lineare  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ .*

**Problema 14.2.7.** (Peron) Sia  $a(t), b(t)$  sono funzioni continui in  $\mathbb{R}$  tali che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = a_0 < 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = b_0$$

calcolare  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ , dove  $y(t)$  è la soluzione di  $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ .

Risp.  $b_0/a_0$ .

### 14.3 Equazioni particolari

L'equazione di Bernoulli

$$z' = a(t)z(t) + b(t)z^k, \quad k \neq 0, 1, \quad (14.3.7)$$

si può trasformare in (14.1.5) con la trasformata

$$z^A = y,$$

dove il parametro  $A$  si sceglie in modo opportuno. Abbiamo le relazioni

$$\underbrace{Az^{A-1}z'}_{y'} = Az^{A-1}(az + bz^k) = Aay + Abz^{A-1+k},$$

quindi con  $A = 1 - k$  deduciamo

$$y' = Aay + Ab.$$

L'equazione di Riccati

$$z' = a(t)z^2(t) + b(t)z + c(t), \quad (14.3.8)$$

non si può risolvere esplicitamente in generale. Se conosciamo una soluzione  $z_0(t)$  usando la sostituzione

$$z(t) = u(t) - z_0(t)$$

possiamo ottenere una equazione (rispetto  $u(t)$ ) tale che questa equazione è una equazione di Bernoulli.

## 14.4 Un'altro tipo di equazioni omogenee

Sia

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Allora si sostituisce  $v = yt$  da cui

$$v'(t) = \frac{f(v) - v}{t}$$

e dunque

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log |t| + C.$$

Risostituendo e risolvendo rispetto a  $y$  si ottiene la soluzione cercata.

## 14.5 Equazioni ordinarie di secondo ordine

**Problema 14.5.1.** *Se  $y(t)$  soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove  $a$  e' costante, allora l'energia*

$$E(t) = \frac{|y'(t)|^2}{2} - a \frac{|y(t)|^2}{2}$$

*e' costante. Concludere che se  $a < 0$ ,  $y(t)$  soddisfa  $y(0) = y'(0) = 0$ , allora  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Problema 14.5.2.** *Se  $y(t)$  soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove  $a$  e' costante, e  $y(t)$  soddisfa  $y(0) = y'(0) = 0$ , allora  $y(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Problema 14.5.3.** *Se  $y(t)$  soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove  $a < 0$  e' costante, allora esistono due costanti  $A, B$  tali che*

$$y(t) = A \cos(\sqrt{-a} t) + B \sin(\sqrt{-a} t)$$

*per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

# Chapter 15

## Equazioni ordinarie di ordine $n \geq 1$ .

Sia  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \neq \emptyset$  un insieme aperto e connesso e  $n \geq 1$  intero. Si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  una relazione del tipo:

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad (15.0.1)$$

dove con  $u^{(j)}(x)$ ,  $j = 1, \dots, n$  si indica la derivata  $j$ -esima della funzione  $u(x)$ .

**Definizione 15.0.1.** *Sia  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ . Si definisce soluzione o integrale dell'equazione differenziale ordinaria una funzione  $u = u(x)$  tale che:*

$$u(x) \in C^n(I) \quad F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale ordinaria si dice autonoma se  $F$  non dipende esplicitamente da  $x$ , cioè (15.0.1) diventa

$$F(u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad (15.0.2)$$

L'equazione differenziale ordinaria (15.0.1) si dice scritta in forma normale se può essere esplicitata rispetto  $u^{(n)}(x)$  :

$$u^{(n)}(x) = G(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}). \quad (15.0.3)$$



Si dice inoltre che l'equazione differenziale ordinaria (15.0.1) è lineare se  $F$  è combinazione lineare di  $u, u', \dots, u^{(n)}$ , ovvero:

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = s(x) + b_0(x)u + b_1(x)u' + \dots + b_n(x)u^{(n)}$$

o, l'equazione (15.0.1) si può riscrivere come segue

$$u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)u^{(i)} + f(x)$$

dove:

$$f(x), a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x) \in C^0(I)$$

Il termine  $f(x)$  è detto sorgente o forzante, e se è nullo l'equazione differenziale lineare si dice omogenea.

## 15.1 Sistema di equazioni di ordine 1

Sia  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega \neq \emptyset$  un insieme aperto e connesso e  $n \geq 1$  intero. Si definisce un sistema di equazioni differenziali ordinarie di ordine 1 in forma normale come segue

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}) \quad (15.1.4)$$

**Definizione 15.1.1.** Sia  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e

$$\omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

con  $\omega \neq \emptyset$  un insieme aperto, connesso e tale che

$$I \times \omega \subseteq \Omega.$$

Si definisce soluzione o integrale del sistema di equazioni (15.1.4) una funzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) : I \rightarrow \omega$$

tale che:

$$\mathbf{u}(x) \in C^n(I; \mathbb{R}^n) \quad \mathbf{u}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) \quad \forall x \in I.$$

## 15.2 Riduzione a sistema di equazioni di ordine 1

Di particolare rilevanza é la riduzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  in forma normale ad un sistema differenziale del primo ordine. Questa tecnica permette di semplificare notevolmente alcuni tipi di problemi. Sia:

$$u^{(n)}(x) = G(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

un'equazione differenziale di ordine  $n$  di tipo normale. Si definiscono:

$$u_j = u^{(j-1)}(x) \quad \mathbf{u} = (u_j) \quad j \in \{1, \dots, n\}$$

in modo che

$$u'_j = u_{j+1}, j = 1, \dots, n-1,$$

e

$$u'_n = G(x, u_1, u_2, \dots, u_n).$$

L'equazione differenziale é dunque equivalente al sistema:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \vdots \\ u'_{n-1} = u_n \\ u'_n = G(x, u_1, u_2, \dots, u_n) = G(x, \mathbf{u}) \end{cases}$$

Ponendo:

$$\mathbf{f}(x, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ G(x, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

si ottiene:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u})$$

ovvero, detto in altri termini, si puo' sempre tradurre tutto in un'equazione di ordine 1.

### 15.2.1 Teorema di esistenza e prolungamento della soluzioni

Sia  $\mathbf{f}$  una funzione definita in un intorno del punto  $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  della forma:

$$\Omega = I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq b\}$$

con  $a, b$  reali positivi, e si ponga che  $f$  é almeno di classe  $C^0$  in tale intorno. Si supponga inoltre  $f$  lipschitziana rispetto alla variabile  $u$  e uniformemente continua rispetto alla variabile  $x$  :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall t \in I \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in J \quad (15.2.5)$$

con  $L > 0$  costante di Lipschitz.

**Theorem 15.2.1.** *Se  $f$  é uniformemente continua rispetto alla variabile  $t$  e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianitá (16.0.2), allora esiste  $T > 0$ , tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & |t - t_0| < T; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (15.2.6)$$

*possiede una soluzione unica*

$$\mathbf{u}(t) \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); J),$$

dove

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < b\}.$$

La dimostrazione sará fatta nelle sezioni successivii.

Il seguente teorema di prolungamento ha un ruolo fondamentale nello studio qualitativo delle equazioni e sistemi di equazioni ordinarie.

La frontiera di  $\Omega$  é

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2,$$

dove

$$S_1 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| = a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < b\},$$

$$S_2 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| = b\}.$$

**Theorem 15.2.2.** (*Prolungamento massimale a destra della soluzione del Problema di Cauchy*) Sia

$$f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 15.2.1 di esistenza ed unicità locale. Allora ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (15.2.6) ha un unico prolungamento massimale a destra

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che abbiamo le due possibilità: o

$$T_{max} = A \tag{15.2.7}$$

o per ogni successione  $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$ , tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

abbiamo

$$u^* \in \{y; \|y - u_0\| = B\}. \tag{15.2.8}$$

### 15.3 Principio di confronto

**Lemma 15.3.1.** (*Principio di confronto*) Siano

$$y(t); Y(t) : [t_0, t_1] \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$$

funzioni derivabili,

$$f, F : [t_0, t_1] \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

funzioni continue, con

$$f(t, y) < F(t, y), \quad \forall (t, y) \in [t_0, t_1] \times V \tag{15.3.9}$$

tali che:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{15.3.10}$$

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (15.3.11)$$

Se

$$y(t_0) \leq Y(t_0) \quad (15.3.12)$$

allora

$$y(t) < Y(t) \quad (15.3.13)$$

per ogni  $t \in (t_0, t_1)$ .

*Idea della dimostrazione.* Sappiamo che  $y(t_0) < Y(t_0)$  e quindi l'insieme

$$P = \{t; y(\tau) < Y(\tau), \forall \tau \in [t_0, t]\}$$

non é vuoto,  $P$  é chiuso ed e connesso. Se  $P = [t_0, t^*]$  con  $t^* < t_1$  allora abbiamo

$$y(t^*) = Y(t^*), y(t) < Y(t), \forall t \in [t_0, t^*]. \quad (15.3.14)$$

Abbiamo inoltre

$$y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) < Y'(t^*) = F(t^*, Y(t^*)) \quad (15.3.15)$$

visto che  $y(t^*) = Y(t^*)$  e vale (15.3.9). Usando le disequazioni (15.3.14) troviamo

$$\frac{y(t^*) - y(t^* - h)}{h} \geq \frac{Y(t^*) - Y(t^* - h)}{h}$$

per ogni  $h > 0$  abbastanza piccolo. Prendendo il limite  $h \rightarrow 0$  si puo scrivere

$$y'(t^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t^*) - y(t^* - h)}{h} \geq Y'(t^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(t^*) - Y(t^* - h)}{h}$$

e quindi

$$y'(t^*) = f(t^*, y(t^*)) \geq y'(t^*) = f(t^*, Y(t^*)).$$

L'ultima disequazione contraddice (15.3.15).  $\square$

La stessa dimostrazione funziona per la seguente variante del principio del confronto.

**Lemma 15.3.2.** (*Principio di confronto*) Siano

$$y(t); Y(t) : [t_0, t_1] \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}$$

funzioni derivabili,

$$f : [t_0, t_1] \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

funzione continua, tali che

$$y'(t) < f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (15.3.16)$$

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (15.3.17)$$

Se

$$y(t_0) \leq Y(t_0) \quad (15.3.18)$$

allora

$$y(t) < Y(t) \quad (15.3.19)$$

per ogni  $t \in (t_0, t_1)$ .

### 15.3.1 Applicazione del principio del confronto, lemma di Gronwall

Adesso possiamo discutere lemma di Gronwall.

**Lemma 15.3.3.** Sia  $I$  un intervallo chiuso del tipo  $[a, \infty)$  o  $[a, b]$  o  $[a, b)$  con  $a < b$ . Sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni continue. Se  $u$  è differenziabile nella parte interna  $I^\circ$  e soddisfa

$$u'(t) \leq f(t) u(t), \quad t \in I^\circ,$$

allora

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right)$$

per tutti  $t \in I$ .

*Idea della Dimostrazione.* Sia

$$v(t) = u(a) \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right), \quad t \in I.$$

Applichiamo il principio del confronto (vedi Lemma 15.3.2) e troviamo

$$u(t) \leq v(t).$$

□

### 15.3.2 Altri applicazioni del principio del confronto

Sia

$$f : \Omega = I \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 15.2.1 di esistenza ed unicit  locale. Supponiamo che esiste una funzione

$$H(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (15.2.6) abbiamo la disequazione

$$\|u(t)\| \leq H(T), \quad \forall t \in (0, T).$$

Allora esiste un unico prolungamento massimale della soluzione

$$\tilde{u} : (t_0 - T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

che   soluzione del Problema di Cauchy (15.2.6).

**Problema 15.3.1.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) = x^5 u - u^3, & x \in (0, \infty); \\ u(0) = 1 \end{cases}, \quad (15.3.20)$$

*ha una soluzione (globale) in  $C([0, \infty))$ .*

*Suggerimento.* Moltiplicazione dell'equazione per  $u$  implica

$$E'(x) \leq x^5 u^2(x), E(x) = \frac{u^2(x)}{2}.$$

Cosí otteniamo

$$E'(x) \leq Cx^5 E(x).$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall é concludere che

$$E(x) = \frac{u^2(x)}{2} \leq Ce^{x^6/6}. \quad (15.3.21)$$

Il Teorema del prolungamento implica che abbiamo due possibilitá: o esiste  $T > 0$  e  $u(t) \in C([0, T])$  soluzione del problema di Cauchy scritto nella forma integrale

$$u(t) = 1 + \int_0^t (s^5 u(s) - u^3(s)) ds, \quad (15.3.22)$$

tale

$$\lim_{t \nearrow T} |u(t)| = \infty \quad (15.3.23)$$

o esiste soluzione globale

$$u(t) \in C([0, \infty))$$

di (15.3.22). La disequazione (15.3.21) implca che la proprietá (15.3.23) non puo essere soddisfatta, quindi esiste soluzione globale.  $\square$

## 15.4 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti é un sistema

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), \quad (15.4.24)$$

dove  $A$  é una matrice  $n \times n$  con elementi in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{C}$ .



Possiamo esprimere le soluzioni di questo sistema mediante l'esponenziale della matrice  $tA$ , ove  $t$  é numero reale.

L'esponenziale di matrici gode delle seguenti proprietà:

$$e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} \forall s, t \in \mathbb{R},$$

$$\det e^{tA} = e^{t \operatorname{tr}(A)}, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

**Lemma 15.4.1** (Soluzione di un sistema di ordine 1 a coefficienti costanti). *Per ogni (vettore colonna)  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ , la funzione*

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA} \mathbf{u}_0$$

*é soluzione dell (15.4.24) su tutto  $\mathbb{R}$ .*

## 15.5 Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie

**Problema 15.5.1.** *Sia  $I$  un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ . Verificare che la condizione  $\mathbf{u}(t) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  é soluzione di (15.4.24) implica che*

$$\mathbf{v}(t) = e^{-tA} \mathbf{u}(t)$$

*soddisfa*

$$\mathbf{v}'(t) = 0, \forall t \in I.$$

Il problema di Cauchy associato á (15.4.24) si puo descrivere come segue

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t), & t \in I; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (15.5.25)$$

dove  $t_0 \in I$  e  $I$  é un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ .

**Problema 15.5.2.** *Sia  $I$  un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ . Verificare che la condizione  $\mathbf{u}(t) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$  é soluzione di (15.5.25) implica che*

$$\mathbf{v}(t) = e^{-tA} \mathbf{u}(t)$$

soddisfa

$$\mathbf{v}'(t) = 0, \forall t \in I$$

e

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_0, \forall t \in I.$$

**Problema 15.5.3.** Verificare che il problema di Cauchy (15.5.25) ha unica soluzione

$$\mathbf{u}(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

definita con

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)A}\mathbf{u}_0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Problema 15.5.4.** Trovare le soluzioni del sistema

$$u'(t) = Au(t), \quad (15.5.26)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 12/5 & 4/5 \\ -1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \quad (15.5.27)$$

**Idea della soluzione.** Le soluzioni del sistema (15.5.26) sono Calcolare

$$u(t) = e^{At}u_0,$$

dove

$$u_0 = (C_1, C_2)^t = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica e

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \frac{12}{5}\right) \left(\lambda - \frac{8}{5}\right) + \frac{4}{25} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

e quindi abbiamo un autovalore di molteplicitá (algebraica) 2. Abbiamo autovettore proprio

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_1 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

e un autovettore generalizzato

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t_1.$$

Sia

$$T = [t_1 t_2], S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

e

$$A = TJS, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} e^{At} &= T e^{Jt} S, \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \\ e^{At} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 2t/5 & 4t/5 \\ -t/5 & 1 - 2t/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alla fine abbiamo

$$\begin{aligned} u(t) = e^{At}u_0 &= \frac{e^{2t}}{5} \begin{pmatrix} 1 + 2t & 4t \\ -t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{e^{2t}}{5} \begin{pmatrix} C_1 + t(2C_1 + 4C_2) \\ C_2 - t(C_1 + 2C_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Problema 15.5.5.** *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (15.5.28)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 17/5 & 4/5 \\ -1/5 & 13/5 \end{pmatrix} \quad (15.5.29)$$

**Problema 15.5.6.** *Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (15.5.30)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 13/5 & -4/5 \\ -4/5 & 7/5 \end{pmatrix} \quad (15.5.31)$$

**Problema 15.5.7.** *Sia*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (15.5.32)$$

dove

$$A = \sigma_1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2.$$

**Problema 15.5.8.** *Sia*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

*Trovare le soluzioni del sistema*

$$u'(t) = Au(t), \quad (15.5.33)$$

dove

$$A = \cos \theta \sigma_1 + \sin \theta \sigma_2.$$

## 15.6 Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti

Un sistema lineare non omogeneo (a coefficienti costanti) di equazioni differenziali e' un sistema del tipo

$$\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), \quad (15.6.34)$$

Una soluzione particolare e' definita dal

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds.$$

Il problema di Cauchy associato a (15.6.34)

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t), & t \in I; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}, \quad (15.6.35)$$

dove  $t_0 \in I$  e  $I$  e' un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ .

Allora si ha che

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds$$

ovvero si somma alla soluzione generale del sistema omogeneo associato la soluzione particolare trovata in precedenza.

**Problema 15.6.1.** *Verificare che il problema di Cauchy (15.6.35) ha unica soluzione*

$$\mathbf{u}(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

definita con

$$\mathbf{u}(t) = e^{(t-t_0)A} \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds, \forall t \in \mathbb{R}.$$

## Chapter 16

# Teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy

Il teorema di esistenza e unicita' per un problema di Cauchy, noto anche teorema di Picard-Lindelöf, teorema di esistenza di Picard o teorema di Cauchy - Lipschitz, stabilisce le condizioni di esistenza e unicita' della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & t \in I; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (16.0.1)$$

Sia  $\mathbf{f}$  una funzione definita in un intorno del punto  $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  della forma:

$$I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq b\}$$

con  $a, b$  reali positivi, e si ponga che  $f$  é almeno di classe  $C^0$  in tale intorno. Si supponga inoltre  $f$  lipschitziana rispetto alla variabile  $u$  e uniformemente continua rispetto alla variabile  $x$  :

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall t \in I \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in J \quad (16.0.2)$$

con  $L > 0$  costante di Lipschitz.

**Theorem 16.0.1.** *Se  $f$  é uniformemente continua rispetto alla variabile  $t$  e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianitá (16.0.2), allora esiste  $T > 0$ , tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & |t - t_0| < T; \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}, \quad (16.0.3)$$

*possiede una soluzione unica*

$$\mathbf{u}(t) \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); J),$$

dove

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < b\}.$$

Sotto l'ipotesi di continuitá della funzione é possibile dimostrare l'equivalenza tra il problema di Cauchy e la seguente equazione integrale, detta equazione di Volterra:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{u}(\tau)) d\tau \quad \forall t \in I_T,$$

dove:

$$I_T = (t_0 - T, t_0 + T).$$

## 16.1 Dimostrazione del Teorema di Cauchy

Sia

$$T < \min \left\{ a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M} \right\}$$

dove

$$M \geq \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in I \times J\}.$$

Si noti che  $I \times J$  é compatto ed il teorema di Weierstrass implica che  $\mathbf{f}$  é limitata, cosí  $M \in \mathbb{R}$  é ben definito. Ovviamente si puó supporre  $M > 0$ .

Sia  $I_T = [t_0 - T, t_0 + T]$ . Si puó considerare lo spazio di Banach

$$(X, \|\cdot\|_{C^0})$$

delle funzioni

$$\mathbf{y} : I_T \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continue con la norma dell'estremo superiore,

$$\|\mathbf{y}\|_{C^0} = \sup_{t_0-T \leq t \leq t_0+T} \|\mathbf{y}(t)\|.$$

Consideriamo la palla, definita da:

$$B = B(\mathbf{u}_0, R) = \{\mathbf{y} \in X : \|\mathbf{y} - \mathbf{u}_0\|_{C^0} \leq R\}.$$

Essendo lo spazio  $X$  completo, e  $B \subseteq X$  chiuso, allora anche quest'ultimo risulta essere uno spazio completo rispetto alla norma indotta.

Si procede quindi definendo l'operatore

$$K : B(\mathbf{u}_0, R) \rightarrow X,$$

detto "operatore di Volterra", tale che

$$K(\mathbf{y})$$

è definito da:

$$K\mathbf{y} = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds$$

Si nota innanzitutto che  $K$  è ben definito e abbiamo la proprietà

$$\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{u}_0, b)$$

si ha

$$K(\mathbf{y}) \in B(\mathbf{u}_0, b).$$

Infatti:

$$\|K(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_0\|_{C^0} = \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right\|_{C^0} \leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\|_{C^0} ds \right|.$$

Ma per ipotesi  $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq M$ , da cui si deduce che:

$$\|K(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_0\|_{C^0} \leq \left| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s))\|_{C^0} ds \right| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq b.$$



Una volta assicurata la buona definizione di  $K$  é sufficiente dimostrare che questa é una contrazione su  $B$  per  $T > 0$  abbastanza piccolo. Il teorema delle contrazioni infatti ci assicura l'esistenza di un unico punto fisso (o punto unito) di  $K$  in  $B(\mathbf{u}_0, b)$ , quindi nel nostro caso di una funzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in C^0(I_T; \mathbb{R}^n)$$

tale che  $K(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , cioé

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds.$$

definita sull'intervallo  $I_T$ , e risolvete dunque il problema di Cauchy (16.0.3). Tenendo conto delle ipotesi su  $\mathbf{f}$  (in particolare la lipschitzianita') si puo' scrivere:

$$\|K(\mathbf{y}_1) - K(\mathbf{y}_2)\|_{C^0} = \sup_{t \in I_T} \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{y}_1(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{y}_2(s))] ds \right\| \leq \quad (16.1.4)$$

$$\leq \sup_{t \in I_T} \left| \int_{t_0}^t L \|\mathbf{y}_1(s) - \mathbf{y}_2(s)\| ds \right| \leq LT \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{C^0} \quad (16.1.5)$$

e quindi abbiamo

$$\|K(\mathbf{y}_1) - K(\mathbf{y}_2)\|_{C^0} \leq LT \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{C^0}$$

e poiche'  $LT < 1$ ,  $K$  é una contrazione.

**Osservazione 16.1.1.** *Un tipico esempio di un problema che non rispetta l'ipotesi di Lipschitzianita' (16.0.2) é*

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{\frac{2}{3}}(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

*La funzione  $f$  non é localmente lipschitziana rispetto a  $y$  in nessun intorno dell'origine e infatti non si ha un'unica soluzione con questa condizione iniziale (anzi, se ne possono trovare infinite: é il fenomeno del pennello di Peano), quali ad esempio*

$$y(t) = t^3, \quad y(t) = 0.$$

## 16.2 Varianti del lemma di Gronwall e unicit  della soluzione. Esercizi.

**Lemma 16.2.1.** *Se  $T > 0$  e*

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_j \in C^1((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

*sono due soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_j(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T, t_0 + T); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (16.2.6)$$

*allora*

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

*per*

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T).$$

*Idea della Dimostrazione.* La funzione

$$v(t) = \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|^2$$

soddisfa la disequazione

$$v'(t) \leq Cv(t), v(t_0) = 0.$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall e concludere che  $v(t) = 0$ .  $\square$

**Problema 16.2.1.** *Sia  $I$  un intervallo chiuso del tipo  $[a, \infty)$  o  $[a, b]$  o  $[a, b)$  con  $a < b$ . Sia*

$$f(t), u(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$$

*due funzioni continui. Se  $u$  soddisfa*

$$u(t) \leq A + \int_a^t f(s) u(s) ds, \quad t \in I,$$

*allora*

$$u(t) \leq A \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right)$$

*per tutti  $t \in I$ .*

**Problema 16.2.2.** Sia  $A > 0$ ,  $I = [0, T)$ ,  $T > 0$  e sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow (0, \infty)$$

due funzioni continue ed esiste  $M > 0$  tale che

$$f(x) \leq M \quad t \in I$$

Se  $u$  soddisfa

$$u(t) \leq A + \int_a^t f(s) u(s) ds, \quad t \in I,$$

allora esiste costante  $C = C(M, T, A) > 0$  tale che

$$u(t) \leq C \quad t \in I.$$

Una situazione dove si può applicare modificazione opportuna del lemma di Gronwall è la seguente.

**Lemma 16.2.2.** Sia  $0 < \alpha < 1$ ,  $I = [0, T)$ ,  $T > 0$  e sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow [0, \infty)$$

due funzioni continue ed esiste  $M > 0$  tale che

$$u(t) \in C^1(0, T), \quad f(t) \leq M, \quad t \in I, \quad \int_I f(t) dt \leq M$$

Se  $u$  soddisfa

$$u'(t) \leq f(t) u(t)^\alpha, \quad t \in I,$$

allora esiste costante  $C = C(M, T, \alpha) > 0$  tale che

$$u(t) \leq C u(0) + C \quad t \in I.$$

*Idea della dimostrazione.* Integrando la disequazione differenziale, si ottiene

$$u(t) \leq u(0) + \int_0^t f(s) u(s)^\alpha ds. \quad (16.2.7)$$

Possiamo supporre che  $u(t)$  é crescente. In fatti, ponendo

$$U(t) = \sup_{s \in [0, t]} u(s)$$

si applica (16.2.7) é si vede che

$$u(t) \leq u(0) + \int_0^t f(s) ds U(t)^\alpha$$

e quindi

$$U(t) \leq u(0) + \int_0^t f(s) ds U(t)^\alpha.$$

Usiamo la disequazione di Young

$$A^{1-\alpha} B^\alpha \leq (1-\alpha)A + \alpha B$$

é quindi abbiamo

$$U(t) \leq u(0) + (1-\alpha) \left( \int_0^t f(s) ds \right)^{1/(1-\alpha)} + \alpha U(t)$$

é alla fine abbiamo

$$U(t) \leq \frac{u(0)}{(1-\alpha)} + \left( \int_0^t f(s) ds \right)^{1/(1-\alpha)}. \quad (16.2.8)$$

□

**Problema 16.2.3.** Sia  $0 < \alpha < 1$ ,  $A > 0$ ,  $I = [0, T)$ ,  $T > 0$  e sia

$$f(t), u(t) : I \rightarrow (0, \infty)$$

due funzioni continui ed esiste  $M > 0$  tale che

$$f(x) \leq M \quad t \in I$$

Se  $u$  soddisfa

$$u(t) \leq A + \int_a^t f(s) u(s)^\alpha ds, \quad t \in I,$$

allora esiste costante  $= C(M, T, A, \alpha) > 0$  tale che

$$u(t) \leq C \quad t \in I.$$

**Problema 16.2.4.** Sia  $\alpha > 1$ ,  $T > 0$ ,  $I = [0, T)$  e sia

$$f(t) : I \rightarrow (0, \infty)$$

una funzione continua tale che esiste  $M > 0$  con

$$\inf_I f(x) \leq M \quad t \in I.$$

Allora si possano trovare  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, M) > 0$ , e  $C = C(\alpha, M)$  tale che la disequazione

$$u(t) \leq \varepsilon + \int_a^t f(s) u(s)^\alpha ds, \quad t \in I,$$

con  $\varepsilon < \varepsilon_0$  implica

$$u(t) \leq C\varepsilon \quad t \in I.$$

**Problema 16.2.5.** Vedere se la costante  $C$  del Problema 16.2.4 dipende da  $T$ .

**Problema 16.2.6.** Se  $T > 0$  e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_j \in C((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

con  $j = 1, 2$  sono due soluzioni dell'equazione di Volterra

$$\mathbf{u}_j(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)) dt, \quad t \in (t_0 - T, t_0 + T) \quad (16.2.9)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T).$$

### 16.3 Dipendenza continua dei dati iniziali

Sia  $a > 0, b > 0$  e  $\mathbf{f}$  una funzione definita in un intorno del punto  $(t_0, \mathbf{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  della forma:

$$I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq b\}.$$

**Theorem 16.3.1.** *Se  $f$  é uniformemente continua rispetto alla variabile  $t$  e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianitá (16.0.2), allora esistono  $T > 0, \delta > 0$  ed una applicazione*

$$S : \{\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_0\| \leq \delta\} \rightarrow C([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R}^n), \quad (16.3.10)$$

tale che

a)  $S(\mathbf{v}_0) = \mathbf{u}(t; \mathbf{v}_0)$  é soluzione dell'equazione

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + T]; \quad (16.3.11)$$

b) l'applicazione (16.3.12) é Lipschiziana.

**Dimostrazione.** Supponiamo  $t_0 = 0$  per simplicitá. Sappiamo (dal teorema di Cachy ) che la scelta

$$T < \min \left\{ a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M} \right\}$$

dove

$$M \geq \max\{|f(t, y)| : (t, y) \in I \times J\}.$$

é sufficiente per applicare il teorema delle contrazione. Così l'esistenza della soluzione

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0)$$

del problema (16.3.11) é verificata.

Per la continuitá consideriamo due soluzioni

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0), \quad \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{v}}_0).$$

Allora

$$w(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0) - \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{v}}_0)$$

soddisfa

$$w(t) = \mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0 + \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s, \mathbf{v}_0)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s, \tilde{\mathbf{v}}_0))] ds.$$

Possiamo procedere seguendo la dimostrazione dell'unicitá (Lemma 16.2.1) ponendo

$$v(t) = \|w(t)\|^2$$

e usando la disequazione

$$v'(t) \leq Cv(t), v(0) = \|\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0\|^2.$$

Possiamo applicare lemma di Gronwall e concludere che

$$v(t) \leq C(T)\|\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0\|^2.$$

In questo modo otteniamo

$$\|\mathbf{u}(t, \mathbf{v}_0) - \mathbf{u}(t, \tilde{\mathbf{v}}_0)\|^2 \leq C(T)\|\mathbf{v}_0 - \tilde{\mathbf{v}}_0\|^2.$$

□

**Lemma 16.3.1.** *Se  $f$  è uniformemente continua rispetto alla variabile  $t$  e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianità (16.0.2), e se  $T > 0, \delta > 0$  sono definiti secondo Theorema 16.3.1, allora l'applicazione*

$$s \in (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow u(t; s, v) \quad (16.3.12)$$

*tale che  $u(t; s, v)$  è soluzione dell'equazione*

$$u(t; s, v) = v + \int_s^t f(\sigma, u(\sigma; s, v))d\sigma, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T] \quad (16.3.13)$$

*è Lipschiziana.*

**Dimostrazione.** Si usa la disequazione di Gronwall come nella dimostrazione del Teorema 16.3.1. □

**Lemma 16.3.2.** *(unicità e dipendenza continua dei dati iniziali)*

*Sia  $f$  uniformemente continua rispetto alla variabile  $t$  e soddisfa l'ipotesi di Lipschizianità (16.0.2). Sia*

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_k \nearrow t_0, \quad t_0 - T < t_1 < t_0.$$

*Se*

$$u(t) \in C((t_0 - T, t_0); \mathbb{R}^n), \quad \tilde{u}(t) \in C((t_0 - T, t_0 + T); \mathbb{R}^n)$$

sono soluzioni di

$$u(t) = u_k + \int_{t_k}^t f(s, u(s)) ds, \quad t \in [t_0 - T, t_0), \quad (16.3.14)$$

$$\tilde{u}(t) = u^* + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T], \quad (16.3.15)$$

tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u^*, \quad (16.3.16)$$

allora

$$u(t) = u(t), \forall t \in (t_0 - T, t_0).$$

**Dimostrazione.** Usando Teorema 16.3.1 possiamo affermare che l'applicazione

$$v^* \rightarrow u(t; t^*, v^*)$$

dove  $u(t; t^*, v^*)$  é soluzione di

$$u(t; t^*, v^*) = v^* + \int_{t^*}^t f(s, u(s; t^*, v^*)) ds$$

é Lipschiziana.

Possiamo scrivere

$$u(t) = u(t; t_k, u_k) \quad \tilde{u}(t) = u(t; t_0, u^*)$$

e

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \|u(t; t_k, u_k) - u(t; t_0, u^*)\| \leq \\ &\leq \|u(t; t_k, u_k) - u(t; t_k, u^*)\| + \|u(t; t_k, u^*) - u(t; t_0, u^*)\|. \end{aligned}$$

Per il primo termine usiamo la Lipschizianitá del Teorema 16.3.1 e scriviamo la disequazione

$$\|u(t; t_k, u_k) - u(t; t_k, u^*)\| \leq C \|u_k - u^*\|,$$

mentre per il Lemma 16.3.1 abbiamo

$$\|u(t; t_k, u^*) - u(t; t_0, u^*)\| \leq C |t_0 - t_k|.$$



In conclusione abbiamo

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leq C\|u_k - u^*\| + C|t_0 - t_k|.$$

Fissando  $t \in (t_0 - T, t_0)$  é prendendo il limite quando  $k \rightarrow \infty$  deduciamo che

$$\|u(t) - \tilde{u}(t)\| = 0.$$

□

Il Teorema 16.3.1 ci permette di definire l'applicazione

$$(s, v) \in I \times J \rightarrow u(t; s, v) \in C([s - T, s + T]; \mathbb{R}^n),$$

tale che  $u(t; s, v)$  é soluzione dell'equazione

$$u(t; s, v) = v + \int_s^t \mathbf{f}(\sigma, u(\sigma; s, v)) d\sigma, \quad t \in [s - T, s + T]. \quad (16.3.17)$$

**Problema 16.3.1.** Se  $f(t, u) = f(u)$  (caso autonomo), allora

$$u(t + \delta; s + \delta, v) = u(t; s, v).$$

per

$$t, t + \delta, s + \delta \in [s - T, s + T].$$

**Idea della soluzione.** La relazione (16.3.17) implica che

$$u(t; s + \delta, v)$$

$$u(t; s + \delta, v) = v + \int_{s+\delta}^t f(u(\sigma; s + \delta, v)) d\sigma$$

e quindi

$$u(t + \delta; s + \delta, v) = v + \int_{s+\delta}^{t+\delta} f(u(\sigma; s + \delta, v)) d\sigma$$

La sostituzione

$$\sigma = \theta + \delta$$

implica

$$u(t + \delta; s + \delta, v) = v + \int_s^t f(u(\theta + \delta; s + \delta, v)) d\theta$$

ed applicando il teorema di unicitá arriviamo alla conclusione. □

## 16.4 Principio di prolungamento.

Sia

$$\Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

un aperto definito da

$$I \times J = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < A, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\}$$

La frontiera di  $\Omega$  é

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2,$$

dove

$$S_1 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| = A, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\},$$

$$S_2 = \{(t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < A, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| = B\}.$$

**Theorem 16.4.1.** (*Prolungamento massimale a destra della soluzione del Problema di Cauchy*) Sia

$$f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 16.0.1 di esistenza ed unicita' locale. Allora ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (16.0.3) ha un unico prolungamento massimale a destra

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che abbiamo le due possibilita': o

$$T_{max} = A \tag{16.4.18}$$

o per ogni successione  $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$ , tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

abbiamo

$$u^* \in \{y; \|y - u_0\| = B\}. \tag{16.4.19}$$

*Idea della dimostrazione.* (prolungabilità a destra della soluzione di un problema di Cauchy)

Sia

$\mathcal{T} = \{T_1 \in (0, A); \exists u \in C((t_0 - T, t_0 + T_1); J) \text{ soluzione del Problema di Cauchy } \}$

con

$$J = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| < B\}.$$

Ovviamente  $T \in \mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}$  non è vuoto ed è un insieme limitato. Sia

$$T_{max} = \sup_{T_1 \in \mathcal{T}} T_1.$$

Usando Lemma di Gronwall si può vedere che

**Lemma 16.4.1.** *Se*

$$0 < T_1 < T_2, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{S}$$

e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T, t_0 + T_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_j(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T, t_0 + T_j); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (16.4.20)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T, t_0 + T_1).$$

Così abbiamo unica soluzione

$$u(t) \in C([t_0 - T, t_0 + T_{max}); \mathbb{R}^n)$$

che è soluzione di

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\sigma, u(\sigma)) d\sigma$$

per

$$t \in [t_0 - T, t_0 + T_{max}).$$

Se esiste successione  $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$ , tale che

$$t_k \nearrow t_0 + T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

e  $(t_0 + T_{max}, u^*)$  é un punto interno di  $\Omega$  allora possiamo definire

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*)$$

come l'unica soluzione locale del problema

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*) = u^* + \int_{t_0 + T_{max}}^t f(\sigma, \tilde{u}(\sigma; t_0 + T_{max}, u^*)) d\sigma$$

e usando il Lemma 16.3.2 concludiamo che

$$\tilde{u}(t; t_0 + T_{max}, u^*) = u(t),$$

per  $t < t_0 + T$  e  $t$  vicino a  $t_0 + T_{max}$ .

Allora

$$u : (t_0 - T, t_0 + T_{max}) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é prolungabile a destra di  $t_0 + T_{max}$  che é in contraddizione con la definizione di  $T_{max}$ .

Così la traiettoria

$$\{(t, u(t)); t \in (t_0 - T, t_0 + T_{max})\}$$

deve avere punto di accumulazione sulla frontiera

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2.$$

□

**Theorem 16.4.2.** (*Prolungamento massimale a sinistra della soluzione del Problema di Cauchy*) Sia

$$f : \Omega = I \times J \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione per cui valgano le stesse ipotesi del Teorema 16.0.1 di esistenza ed unicità locale. Allora ogni soluzione locale

$$u : (t_0 - T, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

del Problema di Cauchy (16.0.3) ha un unico prolungamento massimale a sinistra

$$u : (t_0 - T_{max}, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che abbiamo le due possibilità: o

$$T_{max} = A \quad (16.4.21)$$

o per ogni successione  $\{t_k\}_{k \rightarrow \infty}$ , tale che

$$t_k \searrow t_0 - T_{max}, u(t_k) \rightarrow u^*$$

abbiamo

$$u^* \in \{y; \|y - u_0\| = B\}. \quad (16.4.22)$$

*Idea della dimostrazione.* (prolungabilità a destra della soluzione di un problema di Cauchy)

Sia

$$\mathcal{S} = \{T_1 \in (0, A); \exists u \in C(t_0 - T_1, t_0 + T) \text{ soluzione del Problema di Cauchy}\}.$$

Ovviamente  $T \in \mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}$  non è vuoto ed è un insieme limitato. Sia

$$T_{max} = \sup_{T_1 \in \mathcal{S}} T_1.$$

Usando Lemma di Gronwall si può vedere che

**Lemma 16.4.2.** *Se*

$$0 < T_1 < T_2, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{S}$$

e

$$\mathbf{u}_j : (t_0 - T_j, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_j(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}_j(t)), & t \in (t_0 - T_j, t_0 + T); \\ \mathbf{u}_j(t_0) = \mathbf{u}_0 & , \end{cases} \quad (16.4.23)$$

allora

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$$

per

$$t \in (t_0 - T_1, t_0 + T).$$

Per comodità poniamo:

$$t_0 - T_{max} = a^+.$$

Se

$$\lim_{t \searrow a^+} u(t) = y_1$$

e

$$(a^+, y_1)$$

é un punto interno di  $\Omega$ , allora possiamo procedere come prima e concludere che

$$u : (a^+, t_0 + T) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

e' prolungabile a sinistra di  $a^+$ .

Così la traiettoria

$$\{(t, u(t)); t \in (a, t_0 + T)\}$$

deve avere punto di accumulazione sulla frontiera

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2.$$

□

## 16.5 Risoluzione globale di un problema di Cauchy

Vediamo ora le condizioni sufficienti per la risoluzione globale in un intervallo  $(\alpha, \beta)$  assegnato a priori.

**Theorem 16.5.1.** *(di esistenza ed unicita' globale della soluzione di un Problema di Cauchy):*

Sia

$$f : [(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n] \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che

1.  $f$  sia continua in  $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n$ ;
2.  $f$  sia localmente lipschitziana rispetto a  $y$ , uniformemente rispetto a  $t$ ;
- 3.

$$\|f(t, y)\| \leq A(t) + B(t)\|y\|,$$

dove  $A(t)$  e  $B(t)$  siano funzioni continue in  $(\alpha, \beta)$ .

Allora

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \forall y^0 \in \mathbb{R}^n$$

esiste un'unica soluzione globale del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y^0 \end{aligned}$$

ossia esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy definita su tutto  $(\alpha, \beta)$ .

Ci sono due casi tipici.

(a) Sempre assumendo che valgano le (1) e (2) si richiede (al posto dell'ipotesi (3)) che  $f$  sia limitata su

$$(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^n.$$

$$\|f(t, y)\| \leq A(t)$$

ovvero la limitatezza di  $f$ .

(b) Si richiede la funzione  $f$  sia continua nel suo insieme di definizione, ossia che valga l'ipotesi (1) e che essa sia globalmente lipschitziana.

## 16.6 Esercizi sul prolungamento della soluzioni

Stime a priori ed esistenza globale

**Problema 16.6.1.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t + 2 + e^{-2u}, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.24)$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 16.6.2.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t - e^{-u^2}, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.25)$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 16.6.3.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t^2 + \sqrt{1+u^2} \sin u, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.26)$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 16.6.4.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(t) = -u - u^3, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.27)$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 16.6.5.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + e^{t-y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (16.6.28)$$

a) *ha una soluzione (globale);*

b) *se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "esponenziale"*

$$y(t) \leq Ce^t;$$



c) (parte pi' u difficile) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "polinomiale"

$$y(t) \leq C(1+t)^N.$$

**Problema 16.6.6.** Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = e^{1/(1+t)-1/y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (16.6.29)$$

a) ha una soluzione (globale);

b) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "esponenziale"

$$|y(t)| \leq C(1+t).$$

**Problema 16.6.7.** Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ye^{1/(1+t)-1/y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad (16.6.30)$$

ha una soluzione (globale).

**Problema 16.6.8.** Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^3 + y^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.31)$$

ha una soluzione (globale) in  $t \in (-\infty, 0]$ .

**Problema 16.6.9** (Difficoltá: \*). Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2+t^4} - y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.32)$$

ha una soluzione (globale) in  $t \in [0, +\infty)$ .

**Suggerimento.** Applicare il principio di confronto (Lemma 15.3.1) e dimostrare che

$$y(t) > 0.$$

□

**Problema 16.6.10** (Difficoltà: \*). *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)^4} - e^{t^4}, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.33)$$

*ha una soluzione (globale) in  $t \in [0, +\infty)$ .*

**Suggerimento.** Applicare il principio di confronto (Lemma 15.3.1) usando il fatto che  $y_{\pm}(t) = \pm t$  sono soluzioni di

$$y'_+(t) > e^{y_+(t)^4} - e^{t^4}.$$

$$y'_-(t) < e^{y_-(t)^4} - e^{t^4}.$$

□

**Problema 16.6.11** (Difficoltà: \*). *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - (t + y(t))^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.34)$$

*ha una soluzione (globale) in  $t \in [0, +\infty)$ .*

### Esplosione della soluzione

**Problema 16.6.12.** *(La buccia di banana) Studiare il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

*Risp.* Il problema di Cauchy ha un'unica soluzione massimale (e non globale) data da

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

□

**Problema 16.6.13.** *Sia  $a > 0$ . Studiare il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{aligned} y'(t) &= (1+t)^a y^2 \\ y(0) &= A > 0 \end{aligned}.$$

*Risp.* Integrando l'equazione a variabili separati, troviamo

$$-\frac{1}{y(t)^2} + \frac{1}{y(0)} = \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}$$

e quindi

$$\frac{1}{y(t)^2} = 1 - \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}.$$

Ovviamente la funzione

$$\varphi(t) = 1 - \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}$$

é decrescente e ha unico zero  $t^*$  tale che

$$\varphi(t^*) = 0 \implies \lim_{t \nearrow t^*} y(t) = \infty.$$

La soluzione

$$y(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$$

esiste in  $[0, t^*)$  e

$$\lim_{t \nearrow t^*} y(t) = \infty.$$

significa che  $[0, t^*)$  é l'intervallo massimale di esistenza, la soluzione "esplode" in  $t^*$ .  $\square$

**Problema 16.6.14.** *Studiare l'esistenza della soluzione*

$$u(t) \in C^2([0, \infty))$$

della equazione

$$u''(t) - u^5(t) = (1+t)^{-3}u'(t)^3 \quad (16.6.35)$$

con dati iniziali

$$u(0) = 0, u'(0) = a \quad (16.6.36)$$

al variare del parametro  $a > 0$ .

*Soluzione.* Supponiamo per assurdo che esiste una soluzione

$$u(t) \in C^2([0, \infty))$$

della equazione (16.6.35) con dati iniziali (16.6.36). Abbiamo l'identità

$$E'(t) = (1+t)^{-3}u'(t)^4,$$

dove

$$E(t) = \frac{|u'(t)|^2}{2} - \frac{|u(t)|^6}{6}.$$

Usando i dati iniziali

$$E(0) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

si trova

$$E(t) \geq E(0) > 0.$$

Le disequazioni

$$|u'(t)|^2 - \frac{|u(t)|^6}{3} > 0$$

e

$$u'(0) > \frac{u(0)^3}{\sqrt{3}} = 0$$

implicano

$$u'(t) > \frac{u(t)^3}{\sqrt{3}}, \forall t > 0, \quad (16.6.37)$$

e quindi

$$u(t) > 0, \forall t > 0.$$

La disequazione (16.6.38) ed il principio del confronto implicano

$$u(t) \geq v(t),$$

dove  $v(t)$  é la soluzione di

$$v'(t) = \frac{v(t)^3}{\sqrt{3}}, \forall t \geq \delta, \quad (16.6.38)$$

con dati iniziali

$$v(\delta) = u(\delta) > 0.$$

Usando la relazione

$$\left(\frac{1}{v^2(t)}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ed integrando in  $(\delta, t)$  troviamo

$$\frac{1}{v^2(t)} - \frac{1}{v^2(\delta)} < -\frac{t - \delta}{\sqrt{3}}$$

e prendendo il limite,  $t \rightarrow \infty$ , otteniamo contraddizione.  $\square$

**Problema 16.6.15.** Sia  $a < 0$ . Studiare l'esistenza della soluzione globale del problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (1+t)^a y^2 \\ y(0) &= A > 0 \end{aligned}$$

al variare del parametro  $a < 0$ .

**Problema 16.6.16.** Sia  $a < 0, b > 1$ . Studiare l'esistenza della soluzione globale del problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} y'(t) &= (1+t)^a y^b \\ y(0) &= A > 0 \end{aligned}$$

al variare dei parametri  $a < 0, b, A$ .

**Problema 16.6.17.** Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = (t+y)^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.39)$$

ha una soluzione (globale) in  $t \in [0, \infty)$ .

**Suggerimento.** Dopo la sostituzione  $t + y = u$  abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u'(t) &= u^3 + 1 \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \quad (16.6.40)$$

Si può dimostrare che la traiettoria

$$(t, u(t)); t \in [0, T)$$

non può intersecare la retta  $u = 1$  perché  $u_1(t) = 1$  è una soluzione del problema

$$u'(t) = u^3 - 1.$$

Quindi abbiamo la disequazione

$$u(t) < 1, t \in [0, T), \quad (16.6.41)$$

dove  $T > 0$  è tale che

$$\forall t \in (0, T), u'(t) < 0.$$

Così otteniamo

$$\forall t \in (0, T), u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau) d\tau < 0.$$

Otteniamo la disequazione

$$u(t) = \int_0^t (-1 + u^3(\tau)) d\tau < -t.$$

La disequazione

$$u(t) < \int_0^t (u^3(\tau)) d\tau$$

mostra che

$$u(t) < u_2(t)$$

dove

$$u_2'(t) = u_2^3(t), u_2(0) = 0, u_2(t) < 0$$

è una soluzione che esplosa cioè

$$\lim_{t \nearrow T} u_2(t) = -\infty.$$

□

**Problema 16.6.18.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t - y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad (16.6.42)$$

*ha una soluzione (globale) in  $t \in [0, +\infty)$ .*

## 16.7 Esercizi sui sistema di biomatemat- ica.

Le equazioni di Lotka - Volterra si possano scrivere come segue:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (A - By)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (Cx - D)y\end{aligned}\tag{16.7.43}$$

dove

$\begin{cases} y, & \text{é la popolazione della specie predatore;} \\ x, & \text{é la popolazione della specie preda;} \\ t, & \text{é il tempo;} \\ A, B, C, D, & \text{sono i parametri positivi di interazione tra le specie.} \end{cases}$

**Problema 16.7.1.** Sia  $A = B = C = D = 1$  nel sistema di Lotka - Volterra. Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  é un intervallo aperto con  $0 \in I$  e

$$(x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$$

é una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2\end{aligned}\tag{16.7.44}$$

allora la traiettoria rimane sempre nel primo quadrante.

*Suggerimento.* Vedere che ogni traiettoria

$$(x(t), y(t))$$

che é soluzione del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= x_0, y(0) = y_0\end{aligned}\tag{16.7.45}$$

con punto di partenza

$$(x_0, y_0) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x, 0 < y\}$$

rimane sempre in  $U$ . Infatti, se  $t_1$  é tale che

$$(x(t_1), y(t_1))$$

é sulla frontiera, possiamo supporre per esempio

$$x(t_1) = 0, 0 < y(t_1) = y^*.$$

Adesso possiamo usare il fatto che

$$\tilde{x}(t) = 0, \tilde{y}(t) = Ce^{-t}$$

é una soluzione del

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(t_1) = 0, y(t_1) &= y^*. \end{aligned} \tag{16.7.46}$$

Le due soluzioni

$$(x(t), y(t)), (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy (16.7.46), ovviamente questo é assurdo perche il Teorema di Cauchy afferma che la soluzione é unica. La contraddizione dimostra che la curva  $(x(t), y(t))$  rimane sempre nel I quadrante.  $\square$

**Problema 16.7.2.** (*modello Rosenzweig - Macarthur*) *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1 - u_1) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 \frac{u_1 u_2}{1 + u_1}. \end{aligned} \tag{16.7.47}$$

con dati iniziali

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

rimane sempre nel I quadrante.



**Problema 16.7.3.** (*modello Rosenzweig - Macarthur*) *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1 - u_1) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 + \frac{u_1 u_2}{1 + u_1}. \end{aligned} \quad (16.7.48)$$

con dati iniziali

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

rimane sempre nel I quadrante ed esiste costant  $C > 0$  tale che

$$u_1(t) + u_2(t) \leq C.$$

*Suggerimento.* Supponiamo che per ogni  $C > 0$  la traiettoria interseca il segmento aperto

$$u_1 + u_2 = C, 0 < u_1 < C,$$

cioé esiste (il primo)  $t_1$  tale che

$$u_1(t_1) + u_2(t_1) = C, u_1'(t_1) > 0, u_2'(t_1) > 0. \quad (16.7.49)$$

Prendendo la somma delle equazioni in (16.7.50), si orriene

$$u_1'(t_1) + u_2'(t_1) = u_1(t_1)(1 - u_1(t_1)) - u_2(t_1) = u_1(t_1)(1 - u_1(t_1)) - C + u_1(t_1).$$

Ponendo

$$G(u) = u(2 - u)$$

si vede che la funzione é limitata superiormente

$$G(u) \leq G(1) = 1.$$

Se  $C > 1$  otteniamo

$$u_1'(t_1) + u_2'(t_1) < 1 - C < 0$$

e questo é in contraddizione con (16.7.49).

□

**Problema 16.7.4.** (*modello Rosenzweig - Macarthur*) Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1 - u_1) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 + \frac{u_1 u_2}{1 + u_1}. \end{aligned} \quad (16.7.50)$$

con dati iniziali

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

ha soluzione globale?

**Problema 16.7.5.** Sia  $A = B = C = D = 1$  nel sistema di Lotka - Volterra. Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2 \end{aligned} \quad (16.7.51)$$

ha una soluzione

$$x(t), y(t) \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$$

globale ?

## 16.8 Teorema di esistenza di Peano

Sia  $D$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sia

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione continua e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad (t, y(t)) \in D \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (16.8.52)$$

dove  $(t_0, y_0) \in D$ . L'esistenza di una soluzione

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n, y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$$

di (16.8.52) é equivalente all'esistenza della soluzione

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}^n, y \in C(I; \mathbb{R}^n)$$

dell'equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in I. \quad (16.8.53)$$

**Theorem 16.8.1.** (teorem di Peano) Sia  $D$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , sia

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione continua e si consideri l'equazione integrale (16.8.53) Allora esiste un intervallo  $I$  aperto tale che  $x_0 \in I$  e l'equazione (16.8.53) possiede una soluzione locale

$$v: I \rightarrow \mathbb{R}^n, v \in C(I; \mathbb{R}^n).$$

La soluzione puo' non essere unica, in quanto lo stesso valore iniziale  $(t_0, y_0)$  puo' dare origine a diverse soluzioni  $v$ .

*Idea della dimostrazione.* Il problema di Cauchy si puo' riscrivere come equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \quad (16.8.54)$$

Sia

$$I = (t_0 - T, t_0 + T)$$

con  $T > 0$  piccolo. Si puo' costruire una successione di funzioni che soddisfa il problema di Cauchy (con "ritardo" e "anticipo")

$$v_n(t) = \begin{cases} y_0, & \text{se } |t - t_0| \leq \frac{T}{n}; \\ y_0 + K_+(v_n)(t), & \text{se } t_0 + T/n \leq t \leq t_0 + T. \\ y_0 + K_-(v_n)(t), & \text{se } t_0 - T \leq t \leq t_0 - T/n. \end{cases} \quad (16.8.55)$$

dove

$$K_+(v_n)(t) = \int_{t_0}^{t-T/n} f(s, v_n(s)) ds, \quad x_0 + T/n \leq t \leq t_0 + T,$$

$$K_-(v_n)(t) = - \int_{t+T/n}^{t_0} f(s, v_n(s)) ds, \quad t_0 - T \leq t \leq t_0 - T/n.$$

Per la successione si applica il Teorema di Arzella - Ascoli.  $\square$

## 16.9 Facoltativo: varie dimostrazioni del teorema di Peano

*Dimostrazione, variante uno, "congelare  $t, y$ ".* La funzione  $f$  é continua in un intorno di  $(t_0, y_0)$  quindi esiste  $a > 0$  tale che  $f$  é continua in

$$Q := I \times J := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq a\}. \quad (16.9.56)$$

Sia  $M = \max_Q |f(t, y)|$  (il massimo esiste perche  $f$  é continua e  $Q$  é compatto). Sia

$$\alpha := \frac{a}{M}$$

Sappiamo che  $y = y(t)$  é soluzione del problema di Cauchy se e solo se soddisfa l'equazione integrale (16.8.53).

La continuitá uniforme di  $F$  sul compatto  $Q$  significa che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $\delta = \delta(\epsilon)$  tale che

$$|t - \hat{t}| < \delta, \|y - \hat{y}\| < \delta$$

implica

$$\|f(t, y) - f(\hat{t}, \hat{y})\| < \epsilon$$

per ogni  $(t, y), (\hat{t}, \hat{y}) \in Q$ . Scegliamo

$$\epsilon = \epsilon_n = \frac{1}{n}, \delta = \delta_n.$$

Si possano trovare punti  $t_j^{(n)}$  tali che

$$t_0^{(n)} = t_0, \quad t_{k(n)} = t_0 + \alpha, \quad 0 \leq j \leq k(n)$$

e

$$|t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| \leq \frac{\delta_n}{M}.$$

Scegliamo una successione (approssimazione della soluzione vera)  $y_n$  definita in  $[t_0, t_0 + \alpha]$  con  $y_n(t_0) = y_0$  e

$$y_n'(x) = f(t_0, y_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1^{(n)}.$$

Sia

$$y_1^{(n)} = y_n(t_1^{(n)}).$$

Si va avanti con la procedura iterativa scegliendo  $y_n'(t) = f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)})$  per  $t_j^{(n)} \leq t \leq t_{j+1}^{(n)}$ . Ovviamente  $\phi_n$  é  $C^1$  a tratti e continua. Sia

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} y_n'(t) - f(t, y_n(t)), & t_j^{(n)} < t < t_{j+1}^{(n)} \\ 0, & t = t_j^{(n)} \end{cases}$$

Abbiamo

$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t y_n'(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y_n(s)) + \Delta_n(s)] ds$$

Abbiamo inoltre  $|\Delta_n(t)| < \frac{1}{n}$  e

$$y_n'(t) = f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)}), \quad t \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$$

Allora

$$\|\Delta_n(t)\| = \|f(t_j^{(n)}, y_j^{(n)}) - f(t, y_n(t))\|, \quad t \in [t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$$

e quindi

$$|t - x_j^{(n)}| \leq |x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}| \leq \delta_n$$

$$\begin{aligned} \|y_j^{(n)} - \phi_n(t)\| &\leq \|y_j^{(n)} - y_{j+1}^{(n)}\| \leq M|t_j^{(n)} - t_{j+1}^{(n)}| \\ &\leq \delta_n. \end{aligned}$$

Da qui deduciamo

$$\|\Delta_n(t)\| \leq \epsilon_n = \frac{1}{n}.$$

Il teorema di Ascoli-Arzelà implica che esiste una sottosuccessione di  $\{y_n\}$  uniformemente convergente a

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}(t), \quad t \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha].$$

Così abbiamo

$$y_{n_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, y_{n_k}(s)) + \Delta_{n_k}(s)] ds$$

e concludiamo con

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

□

*Dimostrazione, variante due.* : Usiamo la definizione di  $Q$  in (16.9.56), Di nuovo, sia

$$M := \max_Q \|f(t, y)\|, \quad \alpha := \frac{a}{M}.$$

La successione di approssimazione  $\Psi_n, n = 1, 2, \dots$  si definisce come segue:

$$\Psi_n(t) := \begin{cases} y_0, & t \leq t_0 \\ y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n})) ds, & t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha \end{cases}$$

Abbiamo

$$s - \frac{\alpha}{n} \leq t_0 \implies \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n}) = y_0$$

quindi

$$\Psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n})) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0) ds$$

é ben definita in  $[t_0, t_0 + \frac{\alpha}{n}]$ .

In modo simile sia

$$I_k = \left[ t_0, t_0 + \frac{k\alpha}{n} \right], 1 \leq k \leq n$$

e supponiamo che  $\Psi_n(t)$  é ben definita in  $I_k$ . Ponendo

$$y_n(t) = \Psi_n(t - \frac{\alpha}{n}),$$

otteniamo

$$s \in I_{k+1} \implies s - \frac{\alpha}{n} \in I_k \implies \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n}) = y_n(s)$$

e  $y_n(t)$  é ben definita in  $I_{k+1}$ . In questo modo deduciamo

$$\Psi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_n(s - \frac{\alpha}{n})) ds = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds$$

é ben definita in  $I_{k+1}$ . Applicando il principio di induzione rispetto  $k$  vediamo che  $\Psi_n(t)$  é ben definita in  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

Applichiamo il teorema di Ascoli - Arzela per la successione  $\{\Psi_n(t)\}$  definita nel intervallo  $[t_0, t_0 + \alpha]$  e troviamo una sottosuccessione di  $\{\Psi_n(t)\}$  uniformemente convergente. Senza perdita di generalita possiamo supporre che  $\{\Psi_n(t)\}$  converge uniformemente e tenda a  $\Psi(t)$ . Abbiamo

$$\Psi_{n_k}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi_{n_k}(s - \frac{\alpha}{n_k})) ds$$

e

$$\Psi(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \Psi(s)) ds.$$

□

*Dimostrazione, variante tre, approccio topologico.* Si cerca punto fisso dell'equazione

$$K(u)(t) := y_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

L'operatore  $C : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , where

$$\mathcal{X} := C(I; \mathbb{R}^n), \quad I = [t_0, t_0 + \alpha]$$

dove

$$\alpha = \frac{a}{M}, \quad M = \max_Q \|f(x, y)\|.$$

Lo spazio  $\mathcal{X}$  ha la norma

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \max_{t \in I} \|u(t)\|$$

La convergenza della successione  $u_n \rightarrow u$  in  $\mathcal{X}$  implica

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ . Sia  $B \subset \mathcal{C}$  definito come segue

$$B := \{u \in \mathcal{X} : \|u(t) - y_0\| \leq a, \|u(t_1) - u(t_2)\| \leq M|t_1 - t_2|, \text{ for all } t, t_1, t_2 \in I\}.$$

L'insieme  $A$  é chiuso in  $\mathcal{X}$ ,  $B$  é convesso (segue della disequazione triangolare)

$$u, v \in B \implies w = tu + (1 - t)v \in B, \forall 0 \leq t \leq 1$$

Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà si deduce che  $B$  sia compatto.

L'operatore soddisfa la proprietà

$$K : B \rightarrow B$$

(si veda come nel teorema di Cauchy).

L'esistenza del punto fisso segue adesso dal teorema seguente.



**Theorem 16.9.1.** (*Teorema di Schauder-Tychonoff*) Sia  $X$  un spazio di Banach, sia  $K : X \rightarrow X$  una applicazione continua e sia  $A \subset X$  un sottospazio convesso e compatto in  $X$  tale che

$$K(A) \subset A,$$

allora  $K$  ha un punto fisso in  $A$ .

□

# Chapter 17

## Equazioni e sistemi lineari

### 17.1 Equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

Si consideri l'equazione lineare omogenea

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (17.1.1)$$

dove  $a_j$  sono costanti.

Per trovare le soluzioni si devono trovare le radici dell'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0$$

Se le radici  $\lambda_j$  sono tutte distinte allora le soluzioni sono della forma:

$$y = e^{\lambda_j \cdot x}$$

Se una radice, ad esempio  $\lambda_1$ , è soluzione multipla di molteplicità  $s$ , allora affinché le sue soluzioni siano indipendenti devono avere la forma:

$$e^{\lambda_1 \cdot x} \quad x e^{\lambda_1 \cdot x} \quad x^2 e^{\lambda_1 \cdot x} \quad \dots \quad x^{s-1} e^{\lambda_1 \cdot x}$$

Se una radice è unica ed è la complessa coniugata di un'altra, ovvero

$$\lambda_{1,2} = c \pm id,$$

allora:

$$e^{cx} \cos(dx), e^{cx} \sin(dx)$$

Se la radice complessa coniugata

$$\lambda = c \pm id$$

é multipla con molteplicita'  $r$  si ha:

$$e^{cx} \cos(dx) \quad xe^{cx} \cos(dx) \quad x^2 e^{cx} \cos(dx) \quad \cdots \quad x^{r-1} e^{cx} \cos(dx)$$

$$e^{cx} \sin(dx) \quad xe^{cx} \sin(dx) \quad x^2 e^{cx} \sin(dx) \quad \cdots \quad x^{r-1} e^{cx} \sin(dx)$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene determinando il valore delle  $n$  costanti di integrazione che appaiono nella soluzione dell'omogenea.

**Problema 17.1.1.** *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 7y'' - 6y' + 2 = 0$$

*Suggerimento.* L'equazione caratteristica é

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0.$$

Abbiamo l'identita

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Le soluzioni sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^t \sin t, e^t \cos t.$$

□

## 17.2 Sistemi di ordine uno e teorema di Liouville

Nel caso di un sistema lineare non autonomo

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{17.2.2}$$

in cui la matrice  $A(t)$  dei coefficienti dipende dal tempo,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

abbiamo il seguente.

**Lemma 17.2.1.** *Sia  $a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R})$ . Per ogni vettore  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{17.2.3}$$

ha unica unica soluzione

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n).$$

*Idea della dimostrazione.* Rescriviamo il problema di Cauchy nella forma integrale

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(s)u(s)ds. \tag{17.2.4}$$

L'esistenza della soluzione locale

$$u(t) \in C(-T, T); \mathbb{R}^n$$

segue dal Teorema di Cauchy. Per prolungare la soluzione usiamo lemma di Gronwal per la funzione

$$E(t) = \|u(t)\|^2.$$

Abbiamo la disequazione

$$E'(t) = 2\langle u(t), u'(t) \rangle = 2\langle u(t), A(t)u(t) \rangle \leq 2\|A(t)\|\|u(t)\|^2 = 2A(t)E(t).$$

Lemma di Gronwall implica

$$E(t) \leq E(0)e^{a(t)}, \quad a(t) = \int_0^t 2\|A(s)\|ds.$$

Il principio di prolungamento completa la dimostrazione.  $\square$

Se  $e_1, \dots, e_n$  é una base canonica in  $\mathbb{R}^n$ , Il Lemma 17.2.1 garantisce l'esistenza delle soluzioni

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

tali che

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= A(t)f_j(t) \\ f_j(0) &= e_j \end{aligned} \tag{17.2.5}$$

Per vedere che

$$f_1(t), \dots, f_n(t)$$

sono linearmente indipendenti, ci servono due lemmi del campo di algebra lineare.

**Lemma 17.2.2.** *Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  allora abbiamo l'identita*

$$\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + o(\varepsilon)$$

per  $\varepsilon \searrow 0$ .

**Lemma 17.2.3.** *Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  allora abbiamo l'identita*

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A},$$

dove

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

é la traccia di  $A$ .

*Idea della dimostrazione.* Nella identita

$$e^A = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (I + \varepsilon A)^{1/\varepsilon}$$

scegliamo

$$\varepsilon = \frac{1}{k}$$

e usando Lemma 17.2.2 troviamo

$$\det \left( I + \frac{A}{k} \right)^k = \left( \det \left( I + \frac{A}{k} \right) \right)^k = \left( 1 + \frac{\operatorname{tr} A}{k} + o \left( \frac{1}{k} \right) \right)^k$$

quindi

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\operatorname{tr} A}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right)^k = e^{\operatorname{tr} A}.$$

□

Il Wronskiano é il determinante della matrice

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\},$$

cioé

$$W(t) = \det \Phi(t),$$

dove  $f_1, \dots, f_n$  sono considerati come vettori colonna.

Vale il seguente Lemma di Liouville

**Lemma 17.2.4.** Sia  $a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R})$  e

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

allora abbiamo

$$W'(t) = \operatorname{tr} A(t) W(t).$$

*Idea della dimostrazione.* Sviluppando in serie per  $t \sim t_0$  la soluzione di  $f_j'(t) = A(t)f_j(t)$  si ottiene

$$f_j(t) = f_j(t_0) + f_j'(t_0)(t-t_0) + o(|t-t_0|) = f_j(t_0) + A(t_0)(t-t_0)f_j(t_0) + o(|t-t_0|),$$

ottenendo così anche lo sviluppo della matrice di  $W(t)$

$$\Phi(t) = (I + A(t_0)(t-t_0)) \Phi(t_0) + o(|t-t_0|)$$

Calcolando il Wronskiano e usando Lemma 17.2.2 si ottiene

$$W(t) = (1 + \operatorname{tr} A(t_0)(t-t_0)) W(t_0) + o(|t-t_0|)$$

Dunque per un generico  $t_0$

$$W'(t_0) = \operatorname{tr} A(t_0) W(t_0).$$

□

Così abbiamo il seguente

**Lemma 17.2.5.** *Sia*

$$\Phi(0) = \{e_1, \dots, e_n\}.$$

*Allora*

$$W(t) = \det \Phi(t)$$

*soddisfa*

$$W(t) = W(0)e^{a(t)}, \quad a(t) = \int_0^t \operatorname{tr} A(s) ds$$

*e dunque*

$$W(t) \neq 0$$

*per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Possiamo concludere che*

$$f_1(t), \dots, f_n(t)$$

*sono linearmente indipendenti per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Lemma 17.2.6.** *Ogni soluzione del problema*

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{17.2.6}$$

*si può presentare nella forma*

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(t),$$

*dove*

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

*sono soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= A(t)f_j(t) \\ f_j(0) &= e_j \end{aligned} \tag{17.2.7}$$

*e  $e_1, \dots, e_n$  è una base canonica in  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni soluzione

$$u'(t) = A(t)u(t) \quad (17.2.8)$$

possiamo trovare  $c_1, \dots, c_n$  tali che

$$u(0) = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n. \quad (17.2.9)$$

Allora

$$U(t) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(t)$$

é una soluzione di (17.4.14) tale che

$$U(0) = u(0).$$

Il teorema di unicita della soluzione implica

$$U(t) = u(t).$$

□

### 17.3 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine $n$

**Lemma 17.3.1.** *Ogni soluzione del problema*

$$u'(t) = A(t)u(t) + F(t) \quad (17.3.10)$$

*si puo presentare nella forma*

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) f_j(t),$$

*dove*

$$\mathbf{c}'(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t))$$

*é soluzione del sistema lineare*

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = F(t), \quad (17.3.11)$$



$\Phi(t)$  é la matrice Wronskiana

$$\Phi(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\},$$

$$f_1(t), \dots, f_n(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} f'_j(t) &= A(t)f_j(t) \\ f_j(0) &= e_j \end{aligned} \tag{17.3.12}$$

e  $e_1, \dots, e_n$  é una base canonica in  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sum_{j=1}^n c'_j(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^n c_j(t)f'_j(t) = \\ &= \sum_{j=1}^n c'_j(t)f_j(t) + \sum_{j=1}^n A(t)c_j(t)f_j(t) = \sum_{j=1}^n c'_j(t)f_j(t) + A(t)u(t) \end{aligned}$$

e quindi (17.3.10) é equivalente a

$$\sum_{j=1}^n c'_j(t)f_j(t) = F(t).$$

□

## 17.4 Wronskiano per equazioni di ordine $n$

Nel caso di equazioni di ordine  $n$ :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0$$

si pone

$$u(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

e

$$u'(t) = A(t)u(t),$$

dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Il wronskiano é definito come segue.

**Definizione 17.4.1.** *Dato un insieme di  $n$  funzioni  $y_1, \dots, y_n$ , il Wronskiano  $W(y_1, \dots, y_n)(t)$  é definito come:*

$$W(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

ovvero come il determinante della matrice costruita mettendo le funzioni nella prima riga, la derivata prima di ogni funzione nella seconda riga, e cosi' fino alla derivata  $n - 1$ , formando cosi' una matrice quadrata chiamata anche matrice fondamentale.

Sia  $e_1, \dots, e_n$  una base canonica in  $\mathbb{R}^n$ . Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y_j^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y_j^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y_j(t) &= 0 & (17.4.13) \\ (y_j(0), y_j'(0), \dots, y_j^{(n-1)}(0)) &= e_j, \end{aligned}$$

**Lemma 17.4.1.** *Ogni soluzione del problema*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = 0 \quad (17.4.14)$$

si puo presentare nella forma

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(t),$$

dove

$$y_1(t), \dots, y_n(t) \in C^n(\mathbb{R})$$

sono soluzioni del problema di Cauchy (17.4.13).

In una equazione differenziale lineare del secondo ordine, il wronskiano può essere calcolato facilmente con l'identità di Abel.

## 17.5 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni di ordine $n$

Nel caso di equazioni di ordine  $n$ :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = f(t)$$

si considerano le  $n$  soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea e si cerca una soluzione particolare dell'equazione nella forma:

$$\tilde{y} = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \dots + c_n(t)y_n(t)$$

Si risolve quindi il sistema lineare nelle  $n$  incognite  $c'_i(t)$  :

$$\begin{cases} c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) + \dots + c'_n(t)y_n(t) = 0 \\ c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) + \dots + c'_n(t)y'_n(t) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c'_1(t)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ c'_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-1)}(t) = f(t). \end{cases} \quad (17.5.15)$$

Il determinante di questo sistema viene detto determinante wronskiano e, si può dimostrare che è sempre non nullo a partire dall'indipendenza delle soluzioni dell'equazione omogenea. Si determinano le funzioni incognite integrando gli  $n$  termini soluzioni del sistema di cui sopra, per ricavare l'integrale generale dell'equazione.

Nello specifico, data un'equazione ordinaria lineare non omogenea:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)}(t) = b(t)$$

sia  $y_1(t) \dots, y_n(t)$  un sistema fondamentale di soluzioni della corrispondente equazione omogenea:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)y^{(i)}(t) = 0$$

Allora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e' data da:

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)y_i(t)$$

dove  $c_i(t)$  sono funzioni differenziabili che si assume soddisfino le condizioni:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t)y_i^{(j)}(t) = 0 \quad j = 0, \dots, n-2$$

Considerando la soluzione particolare dell'equazione omogenea, differenziando ripetutamente e utilizzando le condizioni precedenti:

$$y_p^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t)y_i^{(j)}(t) \quad j = 0, \dots, n-1$$

Con un'ultima differenziazione si ha:

$$y_p^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n c'_i(t)y_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t)y_i^{(n)}(t)$$

Sostituendo quindi la soluzione particolare nell'equazione di partenza e applicando le ultime due relazioni si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n c'_i(t)y_i^{(n-1)}(t) = b(t)$$

Questa equazione e la precedente sono sistemi lineari che possono essere risolti con la regola di Cramer:

$$c'_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} \quad i = 1, \dots, n$$

dove  $W(t)$  e' il wronskiano del sistema fondamentale di soluzioni e  $W_i(t)$  e' il wronskiano del sistema fondamentale con l' $i$ -esima colonna rimpiazzata da  $(0, 0, \dots, b(t))$ .

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea puo' essere scritta come:

$$\sum_{i=1}^n y_i(t) \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dx.$$

### 17.5.1 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni a coefficienti costanti di ordine $n$

Si consideri l'equazione lineare non - omogenea

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t) \quad (17.5.16)$$

dove  $a_j$  sono costanti reali.

Nella sezione 17.1 abbiamo studiato le soluzioni del problema omogeneo (17.1.1). partendo delle soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (17.5.17)$$

Possiamo trovare soluzioni del problema omogeneo usando l'aproccio basato sulla soluzione del sistema (17.5.15).

In alcuni casi si puo trovare un metodo piu' veloce per costruire una soluzione.

**Il caso**  $f(t) = P_m(t)$ .

Sia:

$$f(t) = P_m(t),$$

dove  $P_m(t)$  e' un polinomio di grado  $m$ . In questo caso si cerca una soluzione particolare del tipo

$$u(t) = Q_m(t),$$

dove  $Q_m(t)$  e' un polinomio formale di grado  $m$ . Se  $\lambda = 0$  e' una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicita'  $r$ , allora si deve cercare una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r P_m(t).$$

**Il caso**  $f(t) = A \cdot e^{\alpha t}$ .

Sia:

$$f(t) = A \cdot e^{\alpha t}$$

dove  $A$  é una costante data. Se  $\alpha$  non é una radice dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = B \cdot e^{\alpha t},$$

dove  $B$  é una costante da determinare. Nel caso  $\alpha$  sia radice dell'equazione caratteristica di molteplicitá  $r$  si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r \cdot B \cdot e^{\alpha t}.$$

**Il caso**  $f(t) = P_m(t) \cdot e^{\alpha t}$ .

Sia:

$$f(t) = P_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

dove  $P_m(t)$  é un polinomio di grado  $m$ . Se  $\alpha$  non é una radice dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = Q_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

dove  $Q_m$  é un polinomio di grado  $m$ . Nel caso  $\alpha$  sia radice di molteplicitá  $r$  si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r \cdot Q_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

**Il caso**  $f(t) = P_m(t) \cos(\beta t)e^{\alpha t} + Q_m(t) \sin(\beta t)e^{\alpha t}$

Se  $f$  possiede una delle seguenti espressioni:

$$f(x) = P_m(t) \cos(\beta t)e^{\alpha t} + Q_m(t) \sin(\beta t)e^{\alpha t},$$

dove  $P_m(t)$  e  $Q_m(t)$  sono polinomi di grado  $m$ , allora se  $\alpha + i\beta$  non é una radice dell'equazione caratteristica si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = R_m(t) \cos(\beta t)e^{\alpha t} + S_m(t) \sin(\beta t)e^{\alpha t}$$

dove  $R_m(t)$  e  $S_m(t)$  sono polinomi di grado  $m$  da determinare. Nel caso  $\alpha + i\beta$  sia radice di molteplicitá  $r$  si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r R_m(t) \cos(\beta t)e^{\alpha t} + t^r S_m(t) \sin(\beta t)e^{\alpha t}$$

## 17.6 Esercizi sulle equazioni lineari di ordine $n$ : livello standard.

**Problema 17.6.1.** *Risolvere l'equazione*

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = e^{3t}. \quad (17.6.18)$$

**Idea della soluzione.** Prima consideriamo l'equazione omogenea

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = 0. \quad (17.6.19)$$

L'equazione caratteristica é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0. \quad (17.6.20)$$

Abbiamo

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Tutte le soluzioni del problema omogeneo (17.6.19) sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^{2t}$$

Siccome 3 non é soluzione del (17.6.20) una soluzione del (17.6.22) deve avere la forma

$$y_0(t) = Ae^{3t}.$$

Sostituzione in (17.6.22) da

$$A = \frac{1}{4}$$

e tutte le soluzioni di (17.6.22) sono

$$y(t) = y_0(t) + C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t} = \frac{e^{3t}}{4} + C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t}.$$

□

**Problema 17.6.2.** *Risolvere l'equazione*

$$y'''(t) - 2y''(t) + 4y'(t) - 8y(t) = e^{2t} \sin(2t). \quad (17.6.21)$$

**Problema 17.6.3.** *Vedere se per ogni soluzione dell'equazione*

$$y''(t) + 9y(t) = e^{-t} \log(2 + t^4) \quad (17.6.22)$$

esistono due costanti  $C_1, C_2$  tali che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t) = 0.$$

## 17.7 Esercizi sulle equazioni lineari di ordine $n$ : livello elevato.

Trasformata di Liouville

**Problema 17.7.1.** *Sia*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy(t)}{dt} + a_2(t)y(t) = 0. \quad (17.7.23)$$

Usando la sostituzione

$$t = t(x), u(x) = A(x)y(t(x)),$$

scegliere

$$t(x), A(x)$$

in modo tale che (17.7.23) si trasforma in

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + W(x)u(x) = 0. \quad (17.7.24)$$

*Suggerimento.* Sia

$$v(x) = y(t(x)).$$

Abbiamo le relazioni

$$v'(x) = \frac{d}{dx}(y(t(x))) = t'(x)\frac{dy}{dt}(t(x)),$$

$$v''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(y(t(x))) = t''(x)\frac{dy}{dt}(t(x)) + (t'(x))^2\frac{d^2y}{dt^2}(t(x))$$

e quindi

$$\frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{d}{dx}(A(x)v(x)) = A'(x)v(x) + A(x)t'(x)\frac{dy}{dt}(t(x)),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(u(x)) &= \frac{d^2}{dx^2}(A(x)v(x)) = A''(x)v(x) + 2A'(x)v'(x) + A(x)v''(x) = \\ &= A''(x)y(t(x)) + 2A'(x)t'(x)\frac{dy}{dt}(t(x)) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +A(x) \left( t''(x) \frac{dy}{dt}(t(x)) + (t'(x))^2 \frac{d^2y}{dt^2}(t(x)) \right) = \\
& A''(x)y(t(x)) + (2A'(x)t'(x) + A(x)t''(x)) \frac{dy}{dt}(t(x)) + \\
& +A(x) (t'(x))^2 \frac{d^2y}{dt^2}(t(x)).
\end{aligned}$$

Confrontando con (17.7.23), si vede che

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t(x)) + a_1(t(x)) \frac{dy}{dt}(t(x)) + a_2(t(x))y(t(x)) = 0. \quad (17.7.25)$$

si trasforma in

$$u''(x) - W(x)u(x) = 0$$

se e' solo se

$$2A'(x)t'(x) + A(x)t''(x) = At'(x)a_1(t(x)).$$

Moltiplicando per  $A$  troviamo

$$\frac{d}{dx} (A(x)^2 t'(x)) = A^2(x) t'(x) a_1(t(x))$$

Ponendo

$$z(x) = A(x)^2 t'(x)$$

si puo scrivere

$$z'(x) = a_1(x)z_1(x).$$

Scegliamo

$$z(x) = e^{\int_0^x a_1(t(s))ds}.$$

Se per esempio

$$t(x) = x$$

e

$$A(x) = e^{\int_0^x a_1(s)ds/2}$$

abbiamo (17.7.24). □

**Problema 17.7.2.** Sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  e

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_2(t)y(t) + \lambda b(t)y(t) = 0, \quad (17.7.26)$$

dove  $b(t) > 0$ . Usando la sostituzione

$$t = t(x), u(x) = A(x)y(t(x)),$$

scegliere

$$t(x), A(x)$$

in modo tale che (17.7.26) si trasforma in

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + W(x)u(x) + \lambda u(x) = 0. \quad (17.7.27)$$

*Suggerimento.* Scegliere

$$t'(x(t)) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{\sqrt{b(t)}},$$

cioé

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{b(s)} ds.$$

Seguire la soluzione del Problema 17.7.1. □

**Problema 17.7.3.** Sia  $A$  una matrice  $(n \times n)$  e  $f \in \mathbb{R}^n$ . Si considerano  $y(t), z(t)$  due soluzioni dei due sistemi

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t) \\ y(0) &= f \end{aligned} \quad (17.7.28)$$

$$\begin{aligned} z'(t) &= A^* z(t) \\ z(0) &= f \end{aligned} \quad (17.7.29)$$

Provare che la condizione

$$\|y(t)\| + \|z(t)\| \leq C(1+t)^{-2}, \quad \forall t \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}^n,$$

implica

- esiste una matrice  $S$  definita positiva tale che

$$\int_0^\infty \langle y(t), z(t) \rangle dt = \langle f, Sf \rangle;$$

- vale l'identità

$$AS + SA^* = -I.$$

*Soluzione.* Abbiamo le relazioni

$$y(t) = e^{At}f, \quad z(t) = e^{A^*t}f.$$

L'ipotesi

$$\|y(t)\| + \|z(t)\| \leq C(1+t)^{-2}, \quad \forall t \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}^n,$$

implica

$$\lambda \in sp(A) \implies \operatorname{Re}\lambda < 0$$

e quindi esiste  $\delta > 0$ , tale che

$$\|e^{At}\| + \|e^{A^*t}\| \leq ce^{-\delta t} \quad \forall t \geq 0.$$

La matrice  $S$  é definita con

$$S = \int_0^\infty e^{At}e^{A^*t}dt.$$

Abbiamo le relazioni

$$AS + SA^* = \int_0^\infty Ae^{At}e^{A^*t} + e^{At}e^{A^*t}A^*dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{At}e^{A^*t})dt = -I.$$

□

## Problema di Sturm

**Problema 17.7.4.** Considerare il problema

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0, \pi) \quad (17.7.30)$$

dove  $\lambda > 0$ . Vedere che ogni soluzione

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi])$$

tale

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (17.7.31)$$

é identicamente zero.

**Problema 17.7.5.** Considerare il problema

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0, \pi) \quad (17.7.32)$$

Vedere per quali valori del parametro  $\lambda > 0$  esiste soluzione

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi])$$

del problema (27.3.13), tale che

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (17.7.33)$$

**Problema 17.7.6.** Verificare che il problema di Sturm

$$y''(x) + y(x) = 0, x \in (0, \pi) \quad (17.7.34)$$

con dati al bordo

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (17.7.35)$$

ha unica soluzione

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi])$$

definita con

$$y(x) = \sin x.$$

## Equazione di Bessel

**Problema 17.7.7.** Costruire una soluzione dell'equazione di Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - N^2)y(x) = 0,$$

dove  $N \geq 1$  é numero naturale usando la sostituzione

$$y(x) = x^N f(x),$$

dove

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Risposta.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!(k+N)!}.$$

□

**Problema 17.7.8.** Costruire una soluzione dell'equazione di Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

dove  $\nu \geq 0$  é numero reale usando la sostituzione

$$y(x) = x^\nu f(x),$$

dove

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

converge per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Risposta.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)},$$

dove la funzione  $\Gamma(z)$  é la funzione Gamma definita come segue

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Se  $\operatorname{Re} z > 0$  l'integrale converge assolutamente. Ricordiamo che usando l'integrazione per parti, si può dimostrare che:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z).$$

□

La funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{1}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, \quad (17.7.36)$$

é nota come funzione di Bessel.

**Problema 17.7.9.** *Costruire due soluzioni dell'equazione di Bessel*

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

dove  $\nu > 0$  é numero reale. usando la sostituzione

*Risposta.*

$$J_\nu(x), J_{-\nu}(x).$$

□

**Problema 17.7.10.** *Sia*

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

*l'operatore di Laplace in  $\mathbb{R}^2$ . Usando i coordinati polari*

$$x + iy = re^{i\varphi}$$

*costruire soluzione del problema*

$$\Delta u(x, y) = -u(x, y)$$

*usando la sostituzione*

$$u(x, y) = f(r)e^{ik\varphi},$$

*dove  $k \geq 0$  é un numero intero.*

*Suggerimento.* L'operatore di Laplace in coordinati polari si puo rappresentare nella forma

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2.$$

Usando l'ansatz

$$u(x, y) = f(r)e^{ik\varphi},$$

troviamo

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{k^2}{r^2}f(r) = -f(r). \quad (17.7.37)$$

Soluzione é

$$f(r) = J_k(r),$$

dove  $J_\nu$  é la funzione di Bessel del problema 17.7.8.

□

**Problema 17.7.11.** *Trovare una soluzione del problema*

$$y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + by(x) = 0$$

*usando rescalamento*

$$y(x) = \lambda^A v(\lambda x),$$

dove  $\lambda > 0$  e  $A \in \mathbb{R}$  devono essere scelti in modo oportuno.

*Suggerimento.* Prima si fa la sostituzione

$$y(x) = x^\alpha z(x), \alpha = \frac{1-a}{2}.$$

La funzione  $z(x)$  soddisfa

$$z''(x) + \frac{1}{x}z'(x) + bz(x) - \frac{\nu^2}{x^2}z(x) = 0, \nu = \alpha.$$

Usare rescalamento

$$z(x) = \lambda^A v(\lambda x),$$

dove  $\lambda > 0$  e  $A \in \mathbb{R}$  devono essere scelti in modo oportuno.

□

**Soluzioni rappresentati con serie di potenze****Problema 17.7.12.** *Sia*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

*serie di potenze con raggio di convergenza 1. Verificare che il problema di Cauchy*

$$y'' - W(x)y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad (17.7.38)$$

*ha soluzione*

$$y(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k$$

*con raggio di convergenza 1.*





# Chapter 18

## Stabilità intorno di punto di equilibrio

### 18.1 Punti di equilibrio

**Definizione 18.1.1.** *Il punto di equilibrio per sistema autonomo*

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(u(t))$$

*é un punto  $u^*$  tale che  $f(u^*) = 0$ . Questa condizione implica infatti che  $\frac{d}{dt}u(t) = 0$  e quindi, integrando, otteniamo*

$$u(t) = \text{costante}$$

*indipendentemente dal tempo  $t$ .*

Un punto d'equilibrio può essere semplicemente stabile o asintoticamente stabile.

### 18.2 Classificazione dei punti di equilibrio nel piano

Consideriamo il sistema di equazioni ordinarie nel piano

$$u'(t) = f(u)$$

nel caso  $f(u) = Au$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Scriveremo le equazioni per  $x(t), y(t)$  nella forma

$$x'(t) = ax(t) + by(t), \quad y'(t) = cx(t) + dy(t). \quad (18.2.1)$$

L'equazione per trovare autovalori di  $A$  si scrive nella forma

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}A\lambda + \det A = 0 \quad (18.2.2)$$

dove  $\operatorname{tr}A$  é la somma degli elementi diagonali della matrice, e  $\det A = ad - bc$  é il determinante. Trattandosi di un'equazione di secondo grado sappiamo che occorre tener conto del segno del discriminante

$$D = (\operatorname{tr}A)^2 - 4 \det A. \quad (18.2.3)$$

Dovremo dunque discutere separatamente i tre casi:

$$D > 0, \quad \text{due radici reali e distinte;} \quad (18.2.4)$$

$$D < 0, \quad \text{due radici reali e distinte;} \quad (18.2.5)$$

$$D = 0, \quad \text{il caso degenero di due radici reali e coincidenti.} \quad (18.2.6)$$

### 18.3 Il caso di nodo; due radici reali con lo stesso segno

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda_1 x(t), \quad y'(t) = \lambda_2 y(t). \quad (18.3.7)$$

con

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Se  $e_1, e_2$  é la base canonica, tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2,$$

cioé

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}.$$

Si puo vedere nella figura 18.1 il comportamento delle soluzioni.

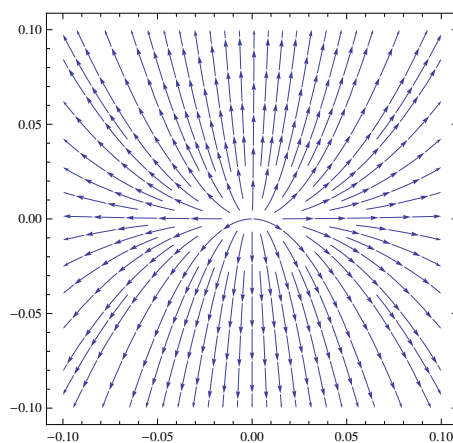


Figure 18.1: Il caso di nodo instabile

**Esempio 18.3.1.** Consideriamo il sistema

$$x'(t) = 2x(t) + 1y(t), \quad y'(t) = 2x(t) + 3y(t). \quad (18.3.8)$$

*Autovalori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sono

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1,$$

Autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} f_1 + C_2 e^t f_2,$$

cioé

$$x(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^t,$$

$$y(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^t,$$

Si può vedere nella figura 18.2 il comportamento del nodo (instabile).

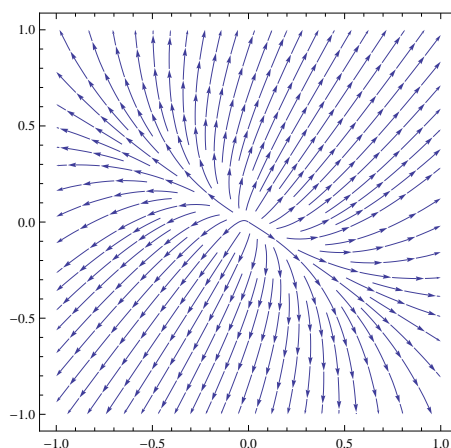


Figure 18.2: Il caso di nodo instabile

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda_1 x(t), \quad y'(t) = \lambda_2 y(t). \quad (18.3.9)$$

con

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0.$$

Se  $e_1, e_2$  é la base canonica, tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2,$$

cioé

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}.$$

Si puo vedere nella figura 18.3 il comportamento delle soluzioni.

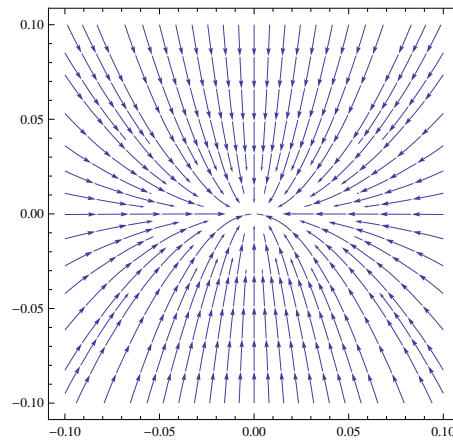


Figure 18.3: Il caso di nodo stabile

**Esempio 18.3.2.** Consideriamo il sistema

$$x'(t) = -2x(t) + 1y(t), \quad y'(t) = 2x(t) - 3y(t). \quad (18.3.10)$$

*Autovalori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sono

$$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1,$$

Autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t} f_1 + C_2 e^{-t} f_2,$$

cioé

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \\ y(t) &= 2C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}, \end{aligned}$$

Si può vedere nella Figura 18.4 il comportamento delle soluzioni.

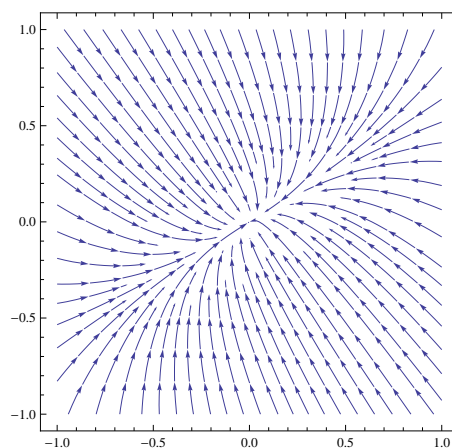


Figure 18.4: Il caso di nodo stabile

## 18.4 Il caso di sella; due radici reali con segno opposto

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda_1 x(t), \quad y'(t) = \lambda_2 y(t). \quad (18.4.11)$$

con

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0.$$

Se  $e_1, e_2$  é la base canonica, tutte le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2,$$

cioé

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Il primo integrale nel primo quadrante é

$$I(x, y) = \frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}.$$

Si puo vedere nella figura 18.5 il comportamento delle soluzioni.

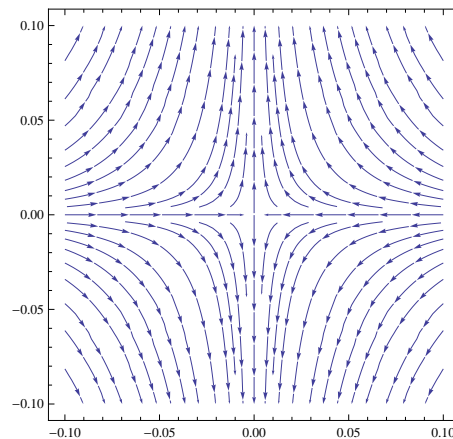


Figure 18.5: Il caso di sella

**Esempio 18.4.1.** *Consideriamo il sistema*

$$x'(t) = -x(t) + y(t), \quad y'(t) = 5x(t) - 3y(t). \quad (18.4.12)$$



*Autovalori della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

*sono*

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2,$$

*Autovettori sono*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Tutte le soluzioni sono*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{4t} f_1 + C_2 e^{-2t} f_2,$$

*cioé*

$$x(t) = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t},$$

$$y(t) = 5C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t},$$

*Si puo vedere nella Figura 18.6 il comportamento delle soluzioni vicino alla sella.*

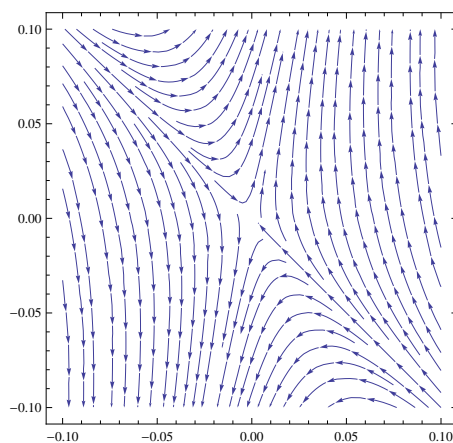


Figure 18.6: Il caso di sella

## 18.5 Il caso di fuoco; due radici complessi coniugati

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \mu x(t) + \omega y(t), \quad y'(t) = -\omega x(t) + \lambda y(t). \quad (18.5.13)$$

con

$$\omega > 0.$$

Ponendo

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

si vede che (18.5.13) si può riscrivere come

$$z'(t) = \lambda z(t), \quad \lambda = \mu + i\omega. \quad (18.5.14)$$

Tutte le soluzioni si possono presentare con

$$z(t) = Ce^{\lambda t}, \quad C = C_1 + iC_2,$$

così deduciamo

$$x(t) = \operatorname{Re}z(t) = C_1 e^{\mu t} \cos(\omega t) - C_2 e^{\mu t} \sin(\omega t),$$

$$y(t) = \operatorname{Im}z(t) = C_1 e^{\mu t} \sin(\omega t) + C_2 e^{\mu t} \cos(\omega t).$$

Moltiplicando la prima equazione in (18.5.13) con  $x(t)$  e la seconda con  $y(t)$  si ottiene

$$E'(t) = 2\mu E(t), \quad E(t) = x^2(t) + y^2(t) = |z(t)|^2.$$

In questo modo abbiamo dimostrato il seguente.

**Lemma 18.5.1.** *Abbiamo la relazione*

$$E(t) = E(0)e^{2\mu t}.$$

*Se  $\mu = 0$ , un primo integrale è  $E(t)$ .*

Se  $\mu > 0$  la traiettoria si allontana dal origine, il nodo è instabile.

Si può vedere nella figura 18.7 il comportamento del fuoco instabile.

Se  $\mu < 0$  la traiettoria si avvicina all'origine, il nodo è stabile.

Si può vedere nella figura 18.8 il comportamento del fuoco stabile.

Se  $\mu = 0$  la traiettoria è circonferenza, abbiamo un centro.

Si può vedere nella figura 18.9 il comportamento quando abbiamo un centro.

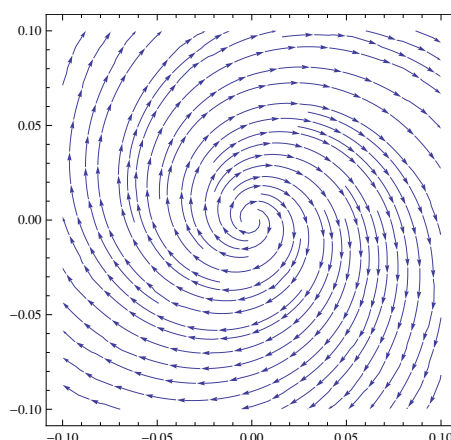


Figure 18.7: Il caso di fuoco instabile

### 18.5.1 I casi di degenerazione degli autovalori con molteplicit  algebraica e geometrica 2 : stelle

Un caso tipico   autovalore reale doppio con molteplicit  algebraica e geometrica 2.

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad y'(t) = \lambda y(t). \quad (18.5.15)$$

con

$$\lambda \neq 0.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Il primo integrale nel primo quadrante  

$$I(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Se  $\lambda > 0$  le traiettorie partono dal origini   vanno al infinito, abbiamo stella instabile

Si puo vedere nella figura 18.10 il comportamento delle soluzioni.

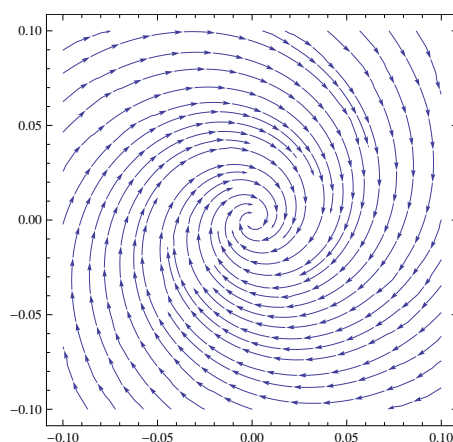


Figure 18.8: Il caso di fuoco stabile

Se  $\lambda < 0$  le traiettorie convergono all'origine, abbiamo stella stabile.

Si può vedere nella figura 18.11 il comportamento delle soluzioni come stella stabile.

### 18.5.2 I casi di degenerazione degli autovalori : autovalore reale, molteplicità algebrica 2, molteplicità geometrica 1 - nodo degenero

Un altro caso di degenerazione è autovalore reale doppio con molteplicità algebrica 2, molteplicità geometrica 1

Consideriamo il sistema

$$x'(t) = \lambda x(t) + y(t), \quad y'(t) = \lambda y(t). \quad (18.5.16)$$

con

$$\lambda \neq 0.$$

Tutte le soluzioni sono

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 t e^{\lambda t}, \\ y(t) &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

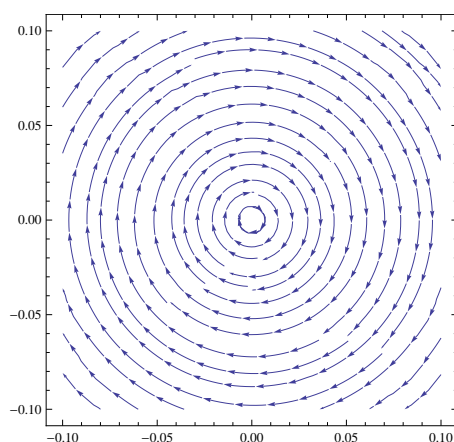


Figure 18.9: Il caso di centro

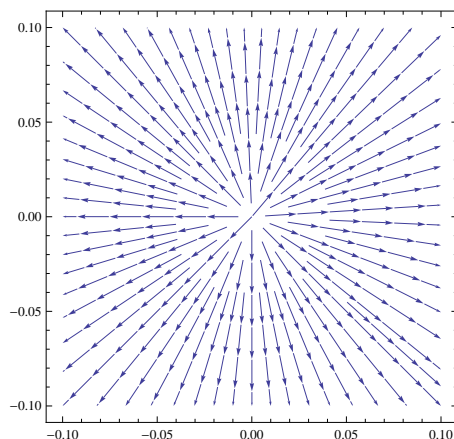


Figure 18.10: Il caso di stella instabile

Se  $\lambda > 0$  le traiettorie partono dal origini é vanno al infinito, abbiamo nodo degenere instabile

Si puo vedere nella figura 18.12 il comportamento delle soluzioni.

Se  $\lambda < 0$  le traiettorie convergono all'origine , abbiamo nodo degenere stabile.

Si puo vedere nella figura 18.13 il comportamento delle soluzione come stella stabile.

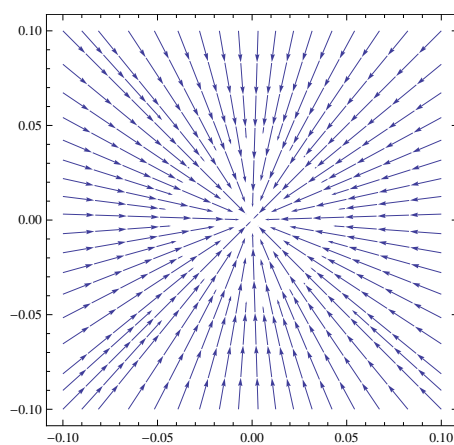


Figure 18.11: Il caso di stella stabile

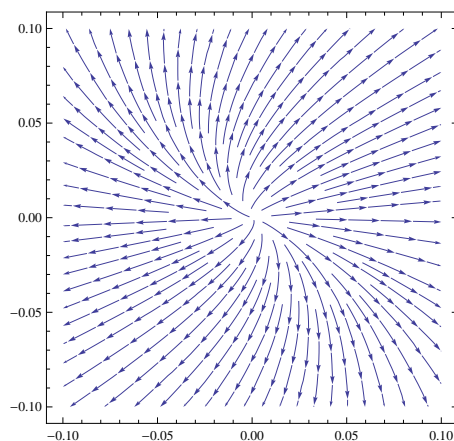


Figure 18.12: Il caso di nodo degenerare instabile

## 18.6 Studio di sistemi di equazioni differenziali intorno dei punti stazionari

**Esempio 18.6.1.** *Se si cerca di trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -6u_1(t) - 5u_2(t) \\ u_2'(t) &= -2u_1(t) - 3u_2(t). \end{aligned} \tag{18.6.17}$$

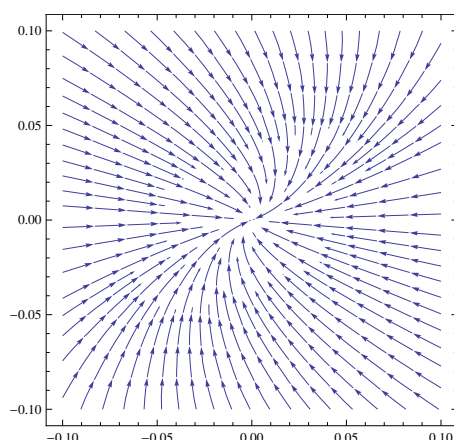


Figure 18.13: Il caso di nodo degenere stabile

e tracciare le curve integrali (le traiettorie delle soluzioni) intorno dei punti stazionari, possiamo procedere come segue. Il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} -6x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (18.6.18)$$

ha unica soluzione  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . L'unico punto stazionario é  $(0, 0)$ . La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

ha due autovalori

$$\lambda_1 = -8, \lambda_2 = -1.$$

Gli autovettori sono

$$f_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo punto di nodo stabile, vedi la Figura 18.14.

In alcuni casi é utile a stabilire le curve isocline, cioé le curve sulle quali la pendenza di tutte le curve integrali che le attraversano é la stessa. In questo caso se abbiamo il sistema

$$u' = Au$$

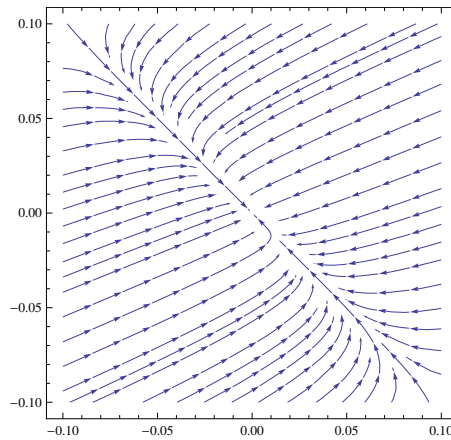


Figure 18.14: Il caso di nodo stabile

e  $f_1$  é autovettore di  $A$  con autovalore  $\lambda_1$ , allora le curve

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} f_1$$

sono curve isocline. Viceversa, si puo vedere che ogni curva isocline é del tipo

$$u(t) = e^{\lambda_1 t} f_1$$

Nel esempio (18.6.1) le due isocline sono parametrizzati (vedi Figura 18.14) come segue

$$u_1(s) = 5s, u_2(s) = 2s,$$

$$u_1(s) = -s, u_2(s) = s.$$

**Problema 18.6.1.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$u_1'(t) = 3u_1(t) - 2u_2(t) \tag{18.6.19}$$

$$u_2'(t) = 4u_1(t) - 6u_2(t).$$

*e tracciare le curve integrali (le traiettorie delle soluzioni) intorno dei punti stazionari.*

**Risposta.** L'unico punto stazionario é  $(0,0)$ , perche autovalori sono  $(-5, 2)$ . Il punto stazionario é sella.



Per un sistema autonomo di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= f_1(u) \\u_2'(t) &= f_2(u)\end{aligned}\tag{18.6.20}$$

prima si devono trovare tutti punti stazionari, cioè dobbiamo risolvere il sistema Il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}f_1(u_1, u_2) &= 0 \\f_2(u_1, u_2) &= 0.\end{aligned}\tag{18.6.21}$$

Se

$$u^* = (u_1^*, u_2^*)$$

é una soluzione del sistema (18.6.21) (un punto stazionario) usiamo lo sviluppo di Taylor

$$f(u) = f(u^*) + f'(u^*)(u - u^*) + o(\|u - u^*\|)$$

Abbiamo il seguente risultato che ci permette di studiare (vicino al punto stazionario  $u^*$ ) il comportamento della soluzione del sistema generico (18.6.21) studiando le soluzioni del problema

$$\begin{aligned}y'(t) &= Ay, \\A &= f'(u^*).\end{aligned}\tag{18.6.22}$$

**Lemma 18.6.1.** *Sia*

$$U \subseteq \mathbb{R}^2$$

*un aperto,  $u^* \in U$  un punto stazionario per (18.6.20) e  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$ . Esiste  $\varepsilon > 0$  e  $T > 0$  tale che per ogni*

$$y \in V_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u - u^*\| < \varepsilon\}$$

*la soluzione  $u(t)$  del problema di Cauchy*

$$\begin{aligned}u'(t) &= f(u(t)), \quad |t| < T, \\u(0) &= y,\end{aligned}\tag{18.6.23}$$

e la soluzione  $u_0(t)$  del problema "linearizzato"

$$\begin{aligned} u'_0(t) &= Au_0, \quad A = f'(u^*) \quad |t| < T, \\ u(0) &= y, \end{aligned} \quad (18.6.24)$$

sono "vicini" cioè

$$\|u(t) - u_0(t)\| \leq 2\varepsilon$$

per ogni  $t$  tale che  $|t| \leq T$ .

**Idea della dimostrazione .** Ponendo

$$E(t) = \frac{\|u(t) - u_0(t)\|^2}{2},$$

si ottiene

$$E'(t) \leq \varepsilon^2 + CE(t).$$

Lemma di Gronwall ci da

$$E(t) \leq E(0)e^{Ct} < 4\varepsilon^2$$

se  $|t| \leq T$  e  $T$  é piccolo. □

**Problema 18.6.2.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= 2u_1(t) + u_2(t) \\ u'_2(t) &= u_1(t) - 2u_2(t) - 5. \end{aligned} \quad (18.6.25)$$

**Idea della soluzione.** Il punto di equilibrio é soluzione del sistema

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 &= 0 \\ u_1 - 2u_2 &= 5. \end{aligned} \quad (18.6.26)$$

La soluzione é

$$(u_1^*, u_2^*) = (1, -2).$$

La matrice Jacobiana e

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con due autovalori  $\pm\sqrt{5}$ . Il punto  $(1, -2)$  é sella.

## 18.7 Esercizi sui punti stazionari dei sistemi $(2 \times 2)$

**Problema 18.7.1.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2(t) & (18.7.27) \\ u_2'(t) &= u_1^2(t) - u_2^2(t) - 1. \end{aligned}$$

*e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.*

**Idea della soluzione.** I punti di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} 2u_2 &= 0 & (18.7.28) \\ u_1^2 - u_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono  $v_1 = (1, 0)$ , e  $v_2 = (-1, 0)$ . la funzione

$$f(u) = \begin{pmatrix} 2u_2 \\ u_1^2 - u_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

é differenziabile in  $v_1, v_2$  e'

$$f'(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

con due autovalori  $\pm 2$  e

$$f'(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con due autovalori complessi e coniugati ( $\pm i2$ ) Il punto  $(1, 0)$  è sella, mentre  $(-1, 0)$  è fuoco (centro).

**Problema 18.7.2.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2(t) + 10u_2^4 & (18.7.29) \\ u_2'(t) &= u_1^2(t) - u_2^2(t) - 4. \end{aligned}$$

*e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.*

**Problema 18.7.3.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned}u_1'(t) &= u_1^2 + u_2^2 - 2 & (18.7.30) \\u_2'(t) &= u_1 - u_2.\end{aligned}$$

*e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.*

**Risposta.** Punti stazionari sono del problema  $u' = f(u)$  con

$$f_1(u) = u_1^2 + u_2^2 - 2, \quad f_2(u) = u_1 - u_2$$

sono

$$P_1(1, 1), P_2(-1, -1).$$

Abbiamo

$$f'(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

In  $P_1$  abbiamo punto di sella. Abbiamo

$$f'(P_2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{-3 + i\sqrt{17}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-3 - i\sqrt{17}}{2}$$

In  $P_2$  abbiamo punto di fuoco stabile.

**Problema 18.7.4. a)** *Studiare la stabilità dei punti stazionari nel I quadrante  $x > 0, y > 0$  del sistema*

$$x'(t) = x(2 - x - y), \quad (18.7.31)$$

$$y'(t) = y(4x - x^2 - 3) \quad (18.7.32)$$

b) Vedere se esiste curva chiusa nel I quadrante che e' traiettoria del sistema (18.7.31).

Soluzione a). L'unico punto stazionario e  $(1, 1)$ . con

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

$$f_1(x, y) = x(2 - x - y), f_2(x, y) = y(4x - x^2 - 3).$$

La matrice

$$A = f'(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha autovalori

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

e quindi abbiamo nodo stabile. □

Soluzione del punto b). Sia

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{xy}.$$

La funzione é ben definita nel I quadrante e abbiamo

$$\partial_x(\varphi f_1) + \partial_y(\varphi f_2) = -\frac{(1-x)^2 + y}{xy} < 0$$

per  $x, y > 0$ . Se esiste una curva  $\gamma$  integrale chiusa, possiamo chiamare  $U$  il dominio interno e abbiamo le relazioni

$$\int_U \underbrace{(\partial_x(\varphi f_1) + \partial_y(\varphi f_2))}_{F(x,y)} dx dy = \int_\gamma -\varphi f_2 dx + \varphi f_1 dy$$

se la curva é chiusa e  $(x(t), y(t))$  soddisfa (18.7.31) allora abbiamo

$$\int_\gamma -\varphi f_2 dx + \varphi f_1 dy = \int_\gamma \varphi(-f_2 x'(t) + f_2 y'(t)) dt = 0.$$

Siccome  $F(x, y) < 0$  in  $U$  siamo arrivati alla contraddizione e quindi curva integrale periodica non esiste. □

**Problema 18.7.5.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_1 + u_2^2 - 1 \\ u_2'(t) &= 6u_1 - u_2^2 + 1. \end{aligned} \quad (18.7.33)$$

*e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.*

**Risp.** Nel punto  $(0, 1)$  la matrice Jacobiana ha autovalori  $\pm 4$ , abbiamo punto di sella.

Nel punto  $(0, -1)$  la matrice Jacobiana ha autovalori complessi con parte reale uguale a 2, abbiamo punto di fuoco instabile.

**Problema 18.7.6.** *Trovare i punti stazionari (o di equilibrio) del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1 u_2 \\ u_2'(t) &= 2 + u_2 - u_1^2. \end{aligned} \quad (18.7.34)$$

*e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.*

**Risposta.** Nel punto  $(0, -2)$  la matrice Jacobiana ha autovalori  $(-2, 1)$  abbiamo punto di sella. Nel punto  $(\pm\sqrt{2}, 0)$  la matrice Jacobiana ha autovalori complessi con parte reale uguale a  $1/2$ , abbiamo punto di fuoco instabile.

**Problema 18.7.7.** *(modello Rosenzweig - Macarthur) Trovare i punti stazionari del sistema*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1 - u_1) - \frac{u_1 u_2}{1 + u_1} \\ u_2'(t) &= -c u_2 + \frac{u_1 u_2}{1 + u_1}. \end{aligned} \quad (18.7.35)$$

*dove  $c < 1/2$  e tracciare le curve integrali intorno dei punti stazionari.*

## 18.8 Primi integrali e studio dei sistemi ( $2 \times 2$ )

**Definizione 18.8.1.** *Siano*

$$J \subseteq \mathbb{R}^n, \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

aperti e sia

$$f \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$$

un campo vettoriale. Si consideri il problema differenziale del primo ordine dato da:

$$y'(t) = f(y(t)). \quad (18.8.36)$$

L'integrale primo associato al problema è una qualsiasi funzione reale  $H \in C^1(U; \mathbb{R})$  tale che per una qualunque soluzione

$$y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$$

del problema (22.5.9) risulti:

$$H(y(t)) = c \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I.$$

Si tratta cioè di una qualsiasi quantità che si conserva lungo le soluzioni del problema.

**Lemma 18.8.1.** *Una funzione  $H$  è integrale primo di (22.5.9) se e soltanto se il suo gradiente è ortogonale al campo vettoriale  $f$ . Ovvero,  $H$  è integrale primo del problema se e solo se si verifica:*

$$\langle \nabla H(y), f(y) \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k}(y) f_k(y) = 0 \quad \forall y \in J.$$

**Idea della dimostrazione.** Si supponga che  $H$  è integrale primo del problema (22.5.9). Grazie alla regolarità del campo vettoriale sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy, che garantisce esistenza ed unicità locale della soluzione. Fissato quindi  $y \in J$ , esiste  $I$  e un unico  $u : I \rightarrow J$  con

$$u'(t) = f(u), t \in I \quad u(0) = y.$$

Per la definizione di integrale primo risulta:

$$0 = \frac{d}{dt} H(u(t)) \quad \forall t \in I.$$

In particolare, quindi:

$$0 = \frac{dH \circ u}{dt}(0) = \langle \nabla H(u(0)), u'(0) \rangle = \langle \nabla H(y), f(y) \rangle$$

e dall'arbitrarietà di  $y$  segue l'implicazione diretta.

Viceversa, si supponga che il gradiente di  $H$  è ortogonale a  $f$ , e si consideri una generica soluzione

$$u : I \rightarrow J.$$

Per ogni  $t \in I$  si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dH \circ u}{dt}(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_k}(u(t)) u'_k(t) = \langle \nabla H(u(t)), u'(t) \rangle = \\ &= \langle \nabla H(u(t)), f(u(t)) \rangle = 0. \end{aligned}$$

e questo prova l'asserto.  $\square$

## 18.9 Esercizi sui integrali primi

**Problema 18.9.1.** (*Lotka Volterra*) Sia  $A = B = C = D = 1$  nel sistema di Lotka - Volterra. Vedere se il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x - 1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2 \end{aligned} \tag{18.9.37}$$

ha un primo integrale

*Suggerimento.* La soluzione del problema (16.7.1) ci dice che la soluzione rimane sempre nel  $I$  quadrante. Così possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{(x(t))'}{x(t)} &= 1 - y(t). \\ \frac{(y(t))'}{y(t)} &= x(t) - 1. \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $x(t) - 1$  la seconda per  $y(t) - 1$  e sommando, otteniamo

$$\frac{(x(t) - 1)(x(t))'}{x(t)} + \frac{(y(t) - 1)(y(t))'}{y(t)} = 0$$



e usando la relazione

$$\frac{(x(t) - 1)(x(t))'}{x(t)} = (x(t))' - \frac{(x(t))'}{x(t)} = (x(t) - \log x(t))'$$

troviamo

$$I'(t) = 0, I(t) = x(t) + y(t) - \log x(t) - \log y(t) = x(t) + y(t) - \log(x(t)y(t)).$$

Il primo integrale (nel I quadrante é definito come segue

$$I(x, y) = x + y - \log(xy).$$

Le curve di livello rappresentano le traiettorie del sistema di Lotka - Volterra, si puo vedere Figura 18.15 dove le curve di livello sono tracciati.

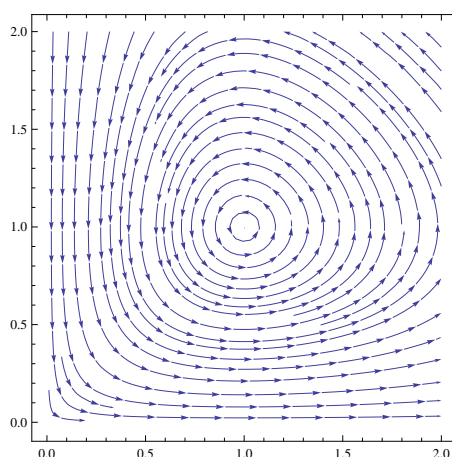


Figure 18.15: Il caso di nodo stabile

□

L'equazione del pendolo é

$$\theta''(t) = -\sin \theta(t).$$

si puo riscrivere come un sistema

**Problema 18.9.2.** (*modello del pendolo*) *Vedere se il sistema*

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} = \sin u_1(t) \tag{18.9.38}$$

$$\tag{18.9.39}$$

*ha un primo integrale.*

*Suggerimento.* Per tutti equazioni autonomu

$$y'' = f(y)$$

abbiamo un sistema del tipo (18.9.40).

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} = f(u_1(t)) \tag{18.9.40}$$

$$\tag{18.9.41}$$

Il primo integrale é

$$H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} - F(u_1),$$

dove  $F'(u) = f(u)$ , cioè  $F$  é la primitiva di  $f$ . Nel caso del pendolo abbiamo

$$H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} + 1 - \cos(u_1).$$

Si può vedere Figura 18.16 dove le curve di livello sono tracciate. Alcuni delle curve di livello rappresentano le soluzioni periodiche .

□

## 18.10 Stabilità

**Definizione 18.10.1.** *Un punto di equilibrio  $u^*$  del sistema é detto stabile (secondo Lyapunov), se per ogni intorno  $U$  del punto  $u^*$  esiste*

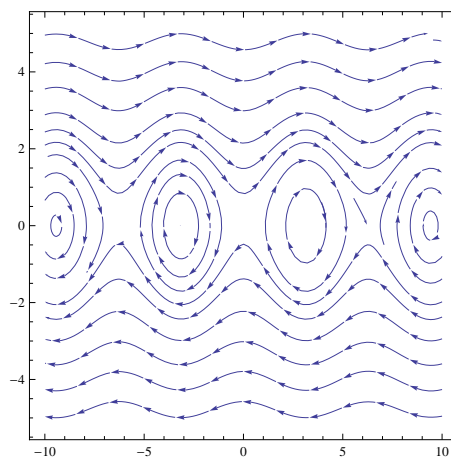


Figure 18.16: Il caso di pendolo

un intorno  $V$  dello stesso punto contenuto in  $U$  tale che le orbite che partono da punti interni a  $V$  rimangono dentro  $U$  per tutti i tempi  $t > 0$ .

**Definizione 18.10.2.** Il punto di equilibrio  $u^*$  è detto attrattivo se esiste un intorno  $U$  di  $u^*$  tale che per ogni orbita  $u(t)$  che parta da un punto interno ad  $U$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u^*$$

Un punto di equilibrio  $u^*$  è detto asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo. Un punto di equilibrio si dice instabile se non è stabile, ovvero se esiste un intorno  $U$  di  $u^*$  tale che comunque si scelga un intorno  $V$  di  $u^*$  si può sempre trovare una posizione iniziale  $u$  in  $V$  tale che l'orbita di  $u$  si allontana da  $u^*$  abbastanza da uscire da  $U$ . Un punto di equilibrio  $u^*$  è detto esponenzialmente stabile se è asintoticamente stabile e

$$\exists k, a > 0 : \|u(t) - u^*\| < ke^{-at}$$

## 18.11 Stabilità secondo Lyapunov

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione in classe  $C^1(U)$ . Si consideri il sistema dinamico rappresentato dall'equazione ordinaria:

$$u'(t) = f(u(t)). \quad (18.11.42)$$

Sia  $u^* \in U$  un punto di equilibrio, cioè

$$f(u^*) = 0.$$

**Lemma 18.11.1.** (*Lyapunov*) *Il punto di equilibrio  $u^*$  é asintoticamente stabile se gli autovalori della matrice jacobiana  $f'(u^*)$  hanno parte reale negativa.*

*Dimostrazione.* Usiamo sviluppo di Taylor per il campo vettoriale del sistema:

$$f(u) = f(u^*) + f'(u^*)(u - u^*) + o(\|u - u^*\|) = f'(u^*)(u - u^*) + o(\|u - u^*\|).$$

La matrice

$$A = f'(u^*)$$

ha autovalori  $\lambda$ , tali che

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \sigma < 0. \quad (18.11.43)$$

Possiamo riscrivere l'equazione (18.11.42) nella forma

$$v'(t) = Av + g(v), \quad (18.11.44)$$

dove  $v = u - u^*$  e  $g(v) = O(\|v\|^2)$ .

Usando la decomposizione nella forma di Jordan possiamo supporre che  $A$  é un blocco di Jordan con unico autovalore  $\lambda$  che soddisfa (18.11.43).

Usando la forma esplicita di  $e^{At}$  si vede che (vedi la stima esponenziale (19.6.13) del Corollario 19.6.1 )

$$\|e^{At} f\| \leq C e^{-\sigma t/2} \|f\|. \quad (18.11.45)$$

Rescrivendo (18.11.44) nella forma

$$(e^{-At}v)' = e^{-At}g(v)(t),$$

otteniamo

$$v(t) = e^{At}v(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(v)(s)ds$$

ed applicando (18.11.45) deduciamo

$$\|v(t)\| \leq Ce^{-\sigma t/2}\|v(0)\| + \int_0^t Ce^{-\sigma(t-s)/2}\|v(s)\|^2 ds.$$

Sia

$$\varphi(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\sigma t/2}\|v(t)\|. \quad (18.11.46)$$

Abbiamo la disequazione

$$\varphi(T) \leq C\varphi(0) + C \int_0^T e^{\sigma(s)/2} e^{-\sigma(s)} \varphi(s)^2 ds,$$

perché

$$\|v(s)\|^2 \leq e^{-\sigma s} \varphi(s)^2$$

secondo la definizione (18.11.46). Abbiamo quindi

$$\varphi(T) \leq C\varphi(0) + C \int_0^T e^{-\sigma s/2} \varphi(s)^2 ds \leq C\varphi(0) + C_1\varphi(T)^2 \quad (18.11.47)$$

perché  $\varphi(T)$  è una funzione crescente. La disequazione

$$\varphi(T) \leq C\varphi(0) + C_1\varphi(T)^2$$

con  $\varphi(0)$  piccolo implica

$$\varphi(T) \leq C_2\varphi(0)$$

e quindi

$$\|v(t)\| \leq C_2 e^{-\sigma t/2} \|v(0)\|.$$

□

*Seconda Dimostrazione.* Di nuovo il punto di partenza é l'equazione (18.11.44) dove  $v = u - u^*$  e  $g(v) = o(\|v\|)$ .

Possiamo usare Lemma 19.6.3 perche la matrice

$$A = f'(u^*)$$

ha autovalori  $\lambda$ , tali che

$$\operatorname{Re}\lambda \leq \sigma < 0. \quad (18.11.48)$$

e quindi soddisfa l'ipotesi (19.6.22) del Lemma 19.6.3.

Cosí esiste una matrice  $S$  positiva definita tale che ponendo  $\tilde{A} = SA$  abbiamo

$$\tilde{A} + \tilde{A}^* = -I$$

abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\langle v(t), Sv(t) \rangle) &= 2\operatorname{Re}\langle Av(t), v(t) \rangle + 2\operatorname{Re}\langle g(v), Sv \rangle \leq \\ &\leq \langle (A + A^*)v(t), v(t) \rangle + \varepsilon\|v(t)\|^2 = -(1 - \varepsilon)\|v(t)\|^2 \leq -C\langle v(t), Sv(t) \rangle \end{aligned}$$

con una costante  $C > 0$  e quindi la funzione di Lyapunov

$$(\langle v(t), Sv(t) \rangle)$$

decade esponenzialmente.  $\square$

Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  allora lo spettro di  $A$  é definito come segue

$$sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ é autovalore di } A\}.$$

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e

$$f : \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una funzione in classe  $C^1(\mathbb{R} \times U)$ . Si consideri il sistema dinamico rappresentato dall'equazione ordinaria:

$$u'(t) = f(t, u). \quad (18.11.49)$$

Sia  $u^*(t) \in C^1(\mathbb{R}; U)$  un stato fondamentale, cioé

$$f(t, u^*(t)) = 0.$$

**Lemma 18.11.2.** (*stabilità asintotica dello stato fondamentale*) *Lo stato fondamentale  $u^*(t)$  è asintoticamente stabile se esiste  $\delta > 0$  tale che*

$$\lambda \in sp(f'(t, u^*(t))) \implies \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta. \quad (18.11.50)$$

*Lo stato fondamentale  $u^*(t)$  è asintoticamente stabile se esiste  $C > 0$ , esiste  $\varepsilon_0 > 0$ , tale che per ogni  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  la condizione*

$$\|u(0) - u^*(0)\| \leq \varepsilon$$

*implica*

$$\|u(t) - u^*(t)\| \leq C\varepsilon e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

# Chapter 19

## Richiami su algebra lineare

### 19.1 Norma di una matrice

Sia

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$$

lo spazio lineare di tutte matrici  $n \times n$  con elementi in  $\mathbb{C}$ . Lo spazio é normato con norma definita con

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|A(v)\|}{\|v\|}. \quad (19.1.1)$$

**Osservazione 19.1.1.** *Nella definizione (19.1.1) usiamo la norma euclidea*

$$\|v\|^2 = \|v\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |v_j|^2.$$

*Si puo usare la norma*

$$\|v\|_p^p = \sum_{j=1}^n |v_j|^p, 1 \leq p < \infty.$$

*Per questa norma in  $\mathbb{C}^n$  si puo definire la norma*

$$\|A\|_p = \sup_{\|v\|_p \neq 0} \frac{\|A(v)\|_p}{\|v\|_p}. \quad (19.1.2)$$

*Per semplicitá useremmo solo la norma euclidea.*



La norma soddisfa la proprietà

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad (19.1.3)$$

é lo spazio  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  é un spazio di Banach.

**Lemma 19.1.1.** *Vale l'identità*

$$\sup_{\|v\|=1} \|A(v)\| = \sup_{\|v\|=\|u\|=1} \operatorname{Re}\langle A(u), v \rangle.$$

**Idea della dimostrazione.** Sia

$$a_1 = \sup_{\|v\|=1} \|A(v)\| > 0$$

e

$$a_2 = \sup_{\|u\|=\|v\|=1} \langle A(u), v \rangle.$$

La disuguaglianza

$$a_2 \leq a_1$$

segue dalla disuguaglianza di Cauchy

$$\operatorname{Re}\langle A(u), v \rangle \leq \|A(u)\| \leq a_1.$$

La disuguaglianza opposta si può vedere usando

$$a_1^2 \leq \|A(v)\|^2 = \operatorname{Re}\langle A(v), w \rangle \|A(v)\|,$$

dove

$$w = \frac{A(v)}{\|A(v)\|}.$$

Otteniamo

$$a_1^2 \leq \|A(v)\|_H^2 = \operatorname{Re}\langle A(v), w \rangle \|A(v)\| \leq a_2 a_1.$$

□

**Lemma 19.1.2.** *Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ . Allora valgono le identità*

$$\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|A^*A\|}. \quad (19.1.4)$$

**Idea della dimostrazione.** Usare l'identità

$$\langle A(h), g \rangle = \langle h, A^*(g) \rangle$$

e il Lemma 19.1.1. Così si ottiene

$$\|A\| = \|A^*\|.$$

Le disequazioni

$$\|A(u)\|^2 = \langle A^*A(u), u \rangle \leq \|A^*A\| \|u\|^2$$

implicano

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\|.$$

Per verificare la disequazione oposta usiamo Lemma 19.1.1 e possiamo scrivere

$$\|B\| = \sup_{\|v\|=\|u\|=1} \operatorname{Re} \langle B(u), v \rangle$$

con  $B = A^*A$ . Supponendo  $\|v\| = \|u\| = 1$  possiamo scrivere

$$\|B\| = |\langle A^*A(u), v \rangle| = |\langle A(u), A(v) \rangle| \leq \|A\|^2$$

e deduciamo la disequazione

$$\|A^*A\| \leq \|A\|^2.$$

□

**Lemma 19.1.3.** *Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  tale che*

$$A^* = A.$$

*Vale l'identità*

$$\sup_{\|h\|=1} \|A(h)\|_H = \sup_{\|h\|=1} |\langle A(h), h \rangle|.$$

## 19.2 Molteplicità algebrica e geometrica di autovalori, spettro di una matrice

Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ . Il polinomio caratteristico di  $A$  è un polinomio di grado  $n$  definito nel modo seguente:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Le radici

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k$$

permettono di avere la fattorizzazione

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \lambda_j)^{\mu_j}, \quad \sum_{j=1}^k \mu_j = n.$$

e loro sono gli autovalori di  $A$ . Ogni autovalore  $\lambda_j$  ha molteplicità algebrica  $\mu_j$ . Un autovalore con molteplicità algebrica 1 si dice semplice.

L'autospazio

$$V_j = \{v \in \mathbb{C}^n; Av = \lambda_j v\} = \ker(A - \lambda_j I)$$

relativo all'autovalore  $\lambda_j$  è l'insieme di tutti gli autovettori aventi  $\lambda_j$  come autovalore.

Si dice molteplicità geometrica di  $\lambda_j$  la dimensione dell'autospazio  $V_j$  relativo a  $\lambda_j$ . Un autovalore per cui vale l'uguaglianza tra le due molteplicità (algebrica e geometrica) si dice regolare.

**Definizione 19.2.1.** *Lo spettro della matrice  $A$  è l'insieme di tutti autovalori, cioè*

$$sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(A - \lambda I) \neq 0\},$$

dove

$$\ker(A - \lambda I) = \{v \in \mathbb{C}^n; Av = \lambda v\}.$$

**Definizione 19.2.2.** *Risolvente della matrice  $A$  è l'insieme complementare allo spettro di  $A$ , cioè di tutti autovalori, cioè*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I)^{-1} \text{ esiste}\}.$$

**Lemma 19.2.1.** *Abbiamo la proprietà:*

$$\lambda \in sp(A) \implies |\lambda| \leq \|A\|.$$

**Idea della dimostrazione.** Dobbiamo verificare che  $|\lambda| > \|A\|$  implica l'esistenza di  $(A - \lambda I)^{-1}$ . Se  $a$  è un numero reale abbiamo la relazione

$$\frac{1}{a - \lambda} = -\lambda^{-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{\lambda^j} \right),$$

dove la serie converge per  $|a| < \lambda$ . Sia

$$R(A) = -\lambda^{-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{\lambda^j} \right)$$

dove la convergenza in  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  è garantita dal ipotesi

$$\|A\| < \lambda.$$

Si può verificare l'identità

$$(A - \lambda I)R(A) = R(A)(A - \lambda I) = I.$$

Così l'esistenza di

$$(A - \lambda I)^{-1} = R(A)$$

segue. □

**Problema 19.2.1.** *Se*

$$|\lambda| > \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$$

*allora*  $\lambda \in \rho(A)$ .

Se  $A = A^*$  allora

$$\langle v, Av \rangle = \langle Av, v \rangle = \overline{\langle v, Av \rangle}$$

e si ottiene

$$\langle v, Av \rangle \in \mathbb{R}.$$

**Definizione 19.2.3.** Una matrice autoaggiunta é definita positiva se

$$\langle v, Av \rangle > 0, \quad \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

**Lemma 19.2.2.** Sia  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  un operatore limitato, autoaggiunto e semidefinito positivo. Vedere se

$$\sup_{\|h\|=1} \|A(h)\|_H$$

é nello spettro del operatore  $A$ .

**Idea della dimostrazione.** Usiamo Lemma 19.1.2 e possiamo scrivere

$$\sup_{\|h\|=1} \langle A(h), h \rangle = \sup_{\|h\|=1} \|A(h)\|.$$

Sia  $h_k$  una successione tale che

$$\|h_k\| = 1, \quad \langle A(h_k), h_k \rangle \rightarrow a = \sup_{\|h\|=1} \|A(h)\| > 0.$$

Abbiamo

$$\|Ah_k - ah_k\|^2 = \|A(h_k)\|^2 + a^2 - 2a\langle A(h_k), h_k \rangle \leq a^2 + a^2 - 2a\langle A(h_k), h_k \rangle \rightarrow 0.$$

Il teorema di Weierstarss garantisce che esiste una sottosuccessione  $\{h_{m_k}\}$  di  $\{h_k\}$  che tende a  $h^*$  tale che

$$\|h^*\| = \|h_{m_k}\| = 1$$

e

$$\|Ah^* - ah^*\|^2 = 0.$$

□

**Problema 19.2.2.** Sia  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  un operatore limitato e autoaggiunto. Vedere se

$$\sup_{\|h\|=1} \|A(h)\|_H$$

é nello spettro del operatore  $A$ .

**Risposta.** No, sia  $A = -I$ . □

**Lemma 19.2.3.** *Lo spettro di un operatore*

$$A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

*non é vuoto.*

**Dimostrazione.** Supponiamo che lo spettro é vuoto, allora

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

é un operatore ben definito per quale

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I$$

quindi

$$\det R(\lambda) \det(\lambda I - A) = 1.$$

L'ultima relazione implica

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) \neq 0$$

per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ . L'ultima proprietá contraddice il teorema fondamentale della algebra. □

### 19.3 Esponente di una matrice

Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti complessi. La matrice esponenziale di  $A$ , indicata con  $e^A$ , é una matrice  $n \times n$  definita con lo sviluppo in serie di potenze

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{19.3.5}$$

La convergenza della serie si puo giustificare usando la norma (19.1.1) e la proprietá (19.1.3) di sub - moltiplicativitá della norma.

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Siano  $A$  e  $B$  due matrici complesse di dimensione  $n \times n$  e siano  $a$  e  $b$  due numeri complessi. Si indica la matrice identità con  $I$  e la matrice nulla con  $0$ . La matrice esponenziale soddisfa le seguenti proprietà:

$$e^0 = I.$$

$$e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A}.$$

$$e^Ae^{-A} = I.$$

**Lemma 19.3.1.** *Se  $AB = BA$ , allora*

$$e^Ae^B = e^{A+B}.$$

**Lemma 19.3.2.** *Se  $Y$  è invertibile allora*

$$e^{YAY^{-1}} = Ye^AY^{-1}.$$

**Lemma 19.3.3.**

$$e^{A^*} = (e^A)^*,$$

dove  $A^*$  indica la matrice trasposta coniugata di  $A$ .

Se

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

è una serie che converge in ogni disco  $\{|z| \leq R\}$ , diciamo che  $f(z)$  è una funzione intera e possiamo definire

$$\sup_{|z| \leq R} |f(z)| < \infty.$$

Questa osservazione mostra che possiamo seguire (19.3.5) è considerare la matrice

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Il nostro scopo è dimostrare la seguente

**Lemma 19.3.4.** (*lemma spettrale*) Sia  $A$  una matrice  $(n \times n)$ . Allora esiste una costante  $C = C(A) > 0$  tale che per ogni funzione  $f(z)$  intera vale la disequazione

$$\|f(A)\| \leq C \sup_{|z| \leq \|A\|} |f(z)|. \quad (19.3.6)$$

**Idea della dimostrazione.** Supponiamo che la matrice  $A$  è diagonalizzabile

$$A = SDT,$$

dove

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Così otteniamo

$$f(A) = Sf(D)T,$$

con

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(d_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & f(d_n) \end{pmatrix}$$

La proprietà

$$d_j \in sp(A) \implies |d_j| \leq \|A\|$$

mostra che (19.3.6) è vera nel caso in cui  $A$  è diagonalizzabile. Per il caso generico si può usare la decomposizione in blocchi di Jordan.  $\square$

**Osservazione 19.3.1.** Se  $\phi$  è autovettore di  $A$  con autovettore  $\lambda \in \mathbf{C}$ , allora

$$A^k \phi = \lambda^k \phi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$f(A)\phi = f(\lambda)\phi.$$

**Lemma 19.3.5.**

$$e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{k} \right)^k.$$



**Idea della dimostrazione.** Se  $f_k(z)$  é una successione di funzioni per quali

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{|z| \leq R} |f_k(z)| = 0,$$

allora possiamo usare la disequazione (19.3.6) é concludere che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(A)\| = 0.$$

Questa osservazione ed il fatto che

$$\sup_{|z| \leq R} \left| \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k - e^z \right| = 0 \quad (19.3.7)$$

conclude la dimostrazione.  $\square$

## 19.4 Calcolo dell'esponente $e^A$ con $A$ diagonalizzabile

Per il calcolo della matrice esponenziale  $e^A$  non viene utilizzata la serie di potenze dato che é costituita da una sommatoria di infiniti addendi. Utilizzando gli autovettori si ricava una serie con un numero finito di termini.

Se la matrice  $A$  é diagonalizzabile significa che ha  $n$  autovettori linearmente indipendenti

$$\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_n.$$

Si puo' quindi scrivere

$$AT = T\Lambda,$$

dove

$$T = [\vec{t}_1 \quad \dots \quad \vec{t}_n], \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Introducendo la matrice  $S$ , inversa di  $T$ , si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} SAT &= \Lambda \\ A &= T\Lambda S \\ SA &= \Lambda S \end{aligned}$$

Dalla seconda relazione si ricava

$$A^k = (T\Lambda S)^k = T \cdot \Lambda \cdot S \cdot T \cdot \Lambda \cdot S \cdots = T\Lambda^k S$$

Quindi

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right] S = T e^{\Lambda} S$$

Si calcola  $e^{\Lambda}$

$$e^{\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

## 19.5 Calcolo dell'esponente $e^A$ quando $A$ non é diagonalizzabile

**Richiami sulla forma normale di Jordan**

Se  $A$  non é diagonalizzabile si ricorre alla forma di Jordan.

In questo caso si ha

$$A = TJS,$$

con  $J$  matrice diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}$$

dove il  $k$ -esimo blocco  $e^{\cdot}$  della forma

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Le matrici  $J_k$  vengono detti blocchi di Jordan.

Utilizzando il procedimento seguito nel caso di  $A$  diagonalizzabile si ottiene

$$e^A = T e^J S, \quad T = S^{-1}.$$

dove

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{J_2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_k} \end{bmatrix}$$

### Forma normale di Jordan: sottospazi invarianti

**Lemma 19.5.1.** (*Decomposizione primaria.*) Sia  $A$  una matrice ( $n \times n$ ) tale che lo spettro di  $A$  é una unione disgiunta

$$\sigma(A) = B_1 \cup B_2$$

tale che  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Allora si ha la decomposizione in somma diretta

$$\mathbb{R}^n = H_1 \oplus H_2$$

tale che i due addendi diretti sono  $A$ -invarianti, cioè

$$A(H_1) \subseteq H_1, \quad A(H_2) \subseteq H_2.$$

Praticamente possiamo usare questo lemma nel modo seguente. Sia

$$P(x) = \det(A - xI)$$

il polinomio caratteristico, tale che

$$P(x) = \pm \prod_j (x - \lambda_j)^{m_j},$$

dove  $m_j$  é la molteplicitá algebrica di  $\lambda_j$

Possiamo avere la decomposizione primaria

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda_j \in \sigma(A)} \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}.$$

Cosí é sufficiente a scegliere una base di Jordan per ognuno degli addenti

$$H_j = \text{Ker}(A - \lambda_j I)^{m_j}.$$

### Forma normale di Jordan: un autovalore, un blocco di Jordan

Se la matrice  $A$  é ha l'equazione caratteristica del tipo

$$\det(A - xI) = (x - \lambda)^M,$$

allora  $\lambda$  ha molteplicitá algebrica  $M$ . Prima consideriamo il caso quando abbiamo un blocco di Jordan, cosí la dimensione di  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  uguale ad 1 e abbiamo una base ciclica

$$f_M, f_{M-1} = (A - \lambda I)f_M, \dots, f_1 = (A - \lambda I)^{M-1}f_M.$$

Per costruire la base ciclica iniziamo con

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Span} \{e_1\}.$$

$$\text{Ker}(A - \lambda I)^2 = \text{Span} \{e_1, e_2\}.$$

.....

$$\text{Ker}(A - \lambda I)^M = \text{Span} \{e_1, e_2, \dots, e_M\}.$$

Per trovare la base ciclica scegliamo

$$f_M = \mu e_M \in \text{Ker}(A - \lambda I)^M \ominus \text{Ker}(A - \lambda I)^{M-1},$$

tale che

$$(A - \lambda I)^{M-1}f_M = e_1.$$

Poi prendiamo

$$f_{M-1} = (A - \lambda I)(f_M), \dots, f_2 = (A - \lambda I)^{M-2}(f_M), f_1 = (A - \lambda I)^{M-1}(f_M) = e_1.$$

La matrice

$$S = [f_1, f_2, \dots, f_M]$$

e la sua inversa

$$T = S^{-1}$$

trasformano  $A$  nella forma di Jordan, cioè

$$S^{-1}AS = TAT = J,$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

### Forma normale di Jordan: un autovalore, $L$ blocchi di Jordan

Sia  $A$  una  $n \times n$  matrice che ha l'equazione caratteristica del tipo

$$\det(xI - A) = (x - \lambda)^n,$$

allora  $\lambda$  ha unico autovalore di molteplicitá algebrica  $n$ . Supponiamo che

$$\dim \text{Ker}(\lambda I - A) = L$$

e

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \{e_1^{(1)}, \dots, e_1^{(L)}\}.$$

Consideriamo

$$(A - \lambda I), \text{Ker}(A - \lambda I)^2, \dots$$

é calcoliamo il rango

$$\text{Ran}(A - \lambda I) < \text{Ran}(A - \lambda I)^2 < \dots$$

e troviamo il primo  $m$  tale che

$$\text{Ran}(A - \lambda I)^{m-1} = \text{Ran}(A - \lambda I)^m = n.$$

Trovato  $m$  si trova la successione

$$\alpha_k = \dim \text{Ran}(\lambda I - A)^{k-1}, k = 1, \dots, m+1.$$

ordinata come segue

$$0 = \alpha_{m+1} < \alpha_m < \dots < \alpha_2 < \alpha_1 = n.$$

Consideriamo gli spazi

$$N^k = \text{Ran}(A - \lambda I)^{k-1}, k = 1, \dots, m.$$

Abbiamo

$$N^m \subsetneq N^{m-1} \subsetneq \dots \subsetneq N^2 \subsetneq N^1 = \mathbb{R}^n$$

con rispettive dimensioni

$$\alpha_m < \alpha_{m-1} < \dots < \alpha_2 < \alpha_1 = n.$$

Un algoritmo per costruire la base dei blocchi di Jordan é descritto sotto.

*Passo Primo: Base in  $N^m$ .* Prima si cerca una base di vettori linearmente indipendenti in  $N^m$

$$f_m^1, \dots, f_m^{\alpha_m} \in \text{Ran}(A - \lambda I)^{m-1}$$

poi si risolve il problema

$$f_m^j = (A - \lambda I)^{m-1} h_m^j$$

tale che

$$f_m^j \notin \text{Ran}(A - \lambda I)^{m-2}.$$

Si puo vedere che per ogni vettore  $h_m^j$  la sua orbita

$$h_m^j, (A - \lambda I)h_m^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-1}h_m^j$$

genera un spazio

$$G(h_m^j) = \text{Span}\{h_m^j, (A - \lambda I)h_m^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-1}h_m^j\}$$

di dimensione  $m$  per ogni  $j$  ed é un spazio invariente rispetto  $A - \lambda I$  cioè

$$(A - \lambda I)G(h_m^j) \subseteq G(h_m^j).$$

Lo spazio  $G(h_m^j)$  ha base ciclica

$$h_m^j, (A - \lambda I)h_m^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-1}h_m^j.$$

□

*Passo Secondo: Base in  $N^{m-1}$ .* Nello spazio  $N^{m-1}$  abbiamo già i vettori

$$(A - \lambda I)h_m^j, j = 1, \dots, \alpha_m,$$

completiamo questi vettori con vettori

$$f_{m-1}^j, j = 1, \dots, \alpha_{m-1} - \alpha_m$$

per avere una base in  $N^{m-1}$ . Adesso troviamo  $h_{m-1}^j$  tali che

$$f_{m-1}^j = (A - \lambda I)^{m-2}h_{m-1}^j$$

é tale che

$$f_{m-1}^j \notin \text{Ran}(A - \lambda I)^{m-2}.$$

Si può vedere che per ogni vettore  $h_{m-1}^j$  la sua orbita

$$h_{m-1}^j, (A - \lambda I)h_{m-1}^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-2}h_{m-1}^j$$

genera un spazio

$$G(h_{m-1}^j) = \text{Span}\{h_{m-1}^j, (A - \lambda I)h_{m-1}^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-2}h_{m-1}^j\}$$

di dimensione  $m - 1$  per ogni  $j$  ed é un spazio invariente rispetto  $A - \lambda I$  cioè

$$(A - \lambda I)G(h_{m-1}^j) \subseteq G(h_{m-1}^j).$$

□

*Passo*  $\ell - 1 \implies \ell$ : Base in  $N^{m-\ell}$ ,  $m - \ell \geq 2$ . Nello spazio  $N^{m-\ell}$  abbiamo già i vettori

$$(A - \lambda I)^{\ell-s} h_{m-s}^j, j = 1, \dots, \alpha_{m-s}, s = 0 \dots \ell - 1$$

completiamo questi vettori con vettori

$$f_{m-\ell}^j, j = 1, \dots, \alpha_{m-\ell} - \alpha_{m-\ell+1}$$

per avere una base in  $N^{m-\ell}$ . Adesso troviamo  $h_{m-\ell}^j$  tali che

$$f_{m-\ell}^j = (A - \lambda I)^{m-\ell} h_{m-\ell}^j$$

é tale che

$$f_{m-\ell}^j \notin \text{Ran}(A - \lambda I)^{m-\ell+1}.$$

Si può vedere che per ogni vettore  $h_{m-\ell}^j$  la sua orbita

$$h_{m-\ell}^j, (A - \lambda I)h_{m-\ell}^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-\ell-1}h_{m-\ell}^j$$

genera un spazio

$$G(h_{m-\ell}^j) = \{h_{m-\ell}^j, (A - \lambda I)h_{m-\ell}^j, \dots, (A - \lambda I)^{m-\ell-1}h_{m-\ell}^j\}$$

di dimensione  $m - 1$  per ogni  $j$  ed é un spazio invariante rispetto  $A - \lambda I$  cioè

$$(A - \lambda I)G(h_{m-\ell}^j) \subseteq G(h_{m-\ell}^j).$$

□

Nel momento quando  $\ell = m - 2$  abbiamo la base di tutti i vettori  $\Phi_{s,\ell,j} = (A - \lambda I)^{\ell-s} h_{m-s}^j, j = 1, \dots, \alpha_{m-s}, s = 0 \dots \ell - 1, \ell = 1, \dots, m - 2$ . e costruiamo la matrice  $S$  con vettori colonne  $\Phi_{s,\ell,j}$ . La matrice  $S$  e la sua inversa

$$T = S^{-1}$$

trasformano  $A$  nella forma di Jordan, cioè

$$S^{-1}AS = TAS = J,$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$



**Esempi ed esercizi sulla forma normale di Jordan****Esempio 19.5.1.** *La matrice  $A$  é definita come segue*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.5.8)$$

*L'equazione caratteristica é*

$$\det(A - xI) = 2 - 7x + 9x^2 - 5x^3 + x^4 = (x - 2)(x - 1)^3$$

*con radici  $(2, 1)$  di molteplicitá algebrica 1 e 3. Abbiamo*

$$\text{Ker}(A - 1I) = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Ker}(A - 1I)^2 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Ker}(A - 1I)^3 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Dobbiamo trovare un vettore*

$$f_3 = \mu e_3 \in \text{Ker}(A - 1I)^3 \ominus \text{Ker}(A - 1I)^2,$$

*tale che*

$$(A - 1I)^2 f_3 = e_1.$$

*Abbiamo*

$$\mu(A - 1I)^2 e_3 = -\mu e_1$$

così  $\mu = -1$  e possiamo prendere

$$f_1 = e_1 = (A - 1I)^2(-e_3), f_2 = (A - 1I)(-e_3), f_3 = -e_3.$$

Ovviamente

$$f_1 = e_1 = (A - 1I)^2(-e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_2 = (A - 1I)(-e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = (-e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è una base di  $\text{Ker}(A - 1I)^3$ . Abbiamo inoltre

$$\text{Ker}(A - 2I) = \left\{ e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice

$$S = [f_1, f_2, f_3, e_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e la sua inversa

$$T = S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trasformano  $A$  nella forma di Jordan, cioè

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Problema 19.5.1.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan  $J$  e una matrice  $S$  invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

*Risposta.*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Problema 19.5.2.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 & 9/2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -9 & -4 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 9/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & -9/2 & 1 & 1 \\ -7/2 & -11/2 & 27/2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan  $J$  e una matrice  $S$  invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

**Risposta.** L'equazione caratteristica é

$$243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5 = 0,$$

la fattorizzazione

$$243 - 405x + 270x^2 - 90x^3 + 15x^4 - x^5 = -(x - 3)^5$$

otteniamo unico autovalore  $x = 3$  con molteplicità algebrica 5. Il polinomio minimo é  $(x - 3)^3$  Per ognuno dei vettori

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^t, e_2 = (0, 1, 0, 0, 0)^t, e_3 = (0, 0, 1, 0, 0),$$

$$e_4 = (0, 0, 0, 1, 0), e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

calcoliamo le orbite, ci servono un'orbita di dimensione 3 e una di dimensione 2. Abbiamo

L'orbita di  $e_1$  e

$$e_2, f_2(A - 3I)e_2 = (-1/2, 3, -1/2, 5/2, -11/2)^t,$$

$$f_3 = (A - 3I)^2 e_3 = (3/2, -3, 1/2, -3/2, 9/2)^t$$

e

$$e_1, f_1 = (A - 3I)e_1 = (-1/2, 2, -1/2, 3/2, -7/2)^t$$

Così

$$T = [f_1, e_1, f_3, f_2, e_2]$$

e la matrice che trasforma  $A$  nella forma di Jordan.  $\square$

**Problema 19.5.3.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan  $J$  e una matrice  $S$  invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

**Risposta.**

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Problema 19.5.4.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 7/2 & 1 & 9/2 & 3 \\ 3/2 & 5 & 9/2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 9/2 & 2 \\ -(3/2) & -2 & -(9/2) & -2 \end{pmatrix}$$

trovare la forma canonica di Jordan  $J$  e una matrice  $S$  invertibile, tale che

$$S^{-1}AS = T AS = J,$$

**Risposta.**

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{pmatrix} -(1/3) & -1 & 0 & 2/3 \\ -1 & -1 & 0 & -(2/3) \\ -(1/3) & -(1/3) & -(2/9) & 2/27 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

## 19.6 Calcolo di $e^J$ con $J$ blocco di Jordan

Sia

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \quad (19.6.9)$$

dove  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ovviamente si può scrivere

$$J = \lambda I + N,$$

dove

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^n = 0.$$

Si verifica facilmente che  $N^k$  si calcola spostando in alto e a destra la diagonale formata dagli 1. Le due matrici  $\lambda I$  e  $N$  commutano e quindi Lemma 19.3.1 implica

$$e^{\lambda I + N} = e^\lambda e^N = \sum_{k=0}^{n-1} e^\lambda \frac{N^k}{k!}.$$

Abbiamo quindi

$$e^J = \begin{bmatrix} e^\lambda & e^\lambda/1! & e^\lambda/2! & \dots & e^\lambda/(n-1)! \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda/1! & \dots & e^\lambda/(n-2)! \\ 0 & 0 & e^\lambda & \dots & e^\lambda/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^\lambda \end{bmatrix}.$$

e

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t/1! & e^{\lambda t}t^2/2! & \dots & e^{\lambda t}t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & e^{\lambda t} & e^{\lambda t}t/1! & \dots & e^{\lambda t}t^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \dots & e^{\lambda t}t^{n-3}/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \quad (19.6.10)$$

**Esempio 19.6.1.** Sia  $n = 3$  e

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Lemma 19.6.1.** Se  $J$  é una matrice  $n \times n$  definita con (19.6.9) allora esiste una costante  $C = C(n) > 0$  tale che per ogni  $\omega > \operatorname{Re}\lambda$  abbiamo la stima

$$\|e^{Jt}f\| \leq Ce^{\omega t}\|f\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (19.6.11)$$

*Dimostrazione.* Segue della relazione (19.6.10). □

**Corollario 19.6.1.** Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  tale che esiste  $\kappa > 0$  tale che

$$\lambda \in \sigma(A) \text{ (cioe' } \lambda \text{ é autovalore di } A) \implies \operatorname{Re}\lambda < -\kappa, \quad (19.6.12)$$

allora esiste una costante  $C = C(n) > 0$  tale che abbiamo la stima

$$\|e^{At}f\| \leq Ce^{-\kappa t}\|f\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (19.6.13)$$

Quando la matrice

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

dipende da un parametro  $t \in [a, b]$  possiamo definire le proprietà

$$A(t) \in C([a, b]) \iff a_{jk}(t) \in C([a, b]), \quad \forall j, k = 1 \dots n.$$

Possiamo definire anche integrabilità (in senso di Riemann)

$$\int_a^b A(t) dt \exists \iff \int_a^b a_{jk}(t) dt \exists, \quad \forall j, k = 1 \dots n. \quad (19.6.14)$$

Abbiamo la relazione

$$\int_a^b A(t) dt = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad (19.6.15)$$

dove

$$\alpha_{jk} = \int_a^b a_{jk}(t) dt.$$

Alcuni delle proprietà di integrale  $\int_a^b f(t) dt$  sono descritti sotto

$$A(t) \in C([a, b]) \implies \int_a^b A(t) dt \text{ esiste.} \quad (19.6.16)$$

$$\int_a^b A(t) dt \text{ esiste} \implies \left( \int_a^b A(t) dt \right)^* = \int_a^b A^*(t) dt. \quad (19.6.17)$$

$$\int_a^b A(t) dt \text{ esiste e } A^*(t) = A(t) \implies \left( \int_a^b A(t) dt \right)^* = \int_a^b A(t) dt. \quad (19.6.18)$$

$$\int_a^b \|A(t)\| dt < \infty \implies \int_a^b A(t) dt \text{ esiste} \quad (19.6.19)$$



**Lemma 19.6.2.** *Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  tale che esiste  $\kappa > 0$  tale che*

$$\lambda \in \sigma(A) \text{ (cioe' } \lambda \text{ é autovalore di } A) \implies \operatorname{Re} \lambda < -\kappa, \quad (19.6.20)$$

*allora esiste l'integrale*

$$\int_0^\infty e^{At} dt \quad (19.6.21)$$

*Dimostrazione.* Applicando la stima esponenziale del Corollario 19.6.1, troviamo

$$\int_0^\infty \|e^{At}\| dt < \infty.$$

□

**Lemma 19.6.3.** *Se  $A$  é una matrice  $n \times n$  tale che esiste  $\kappa > 0$  tale che*

$$\lambda \in \sigma(A) \text{ (cioe' } \lambda \text{ é autovalore di } A) \implies \operatorname{Re} \lambda < -\kappa, \quad (19.6.22)$$

*allora esiste una matrice  $S$  positiva definita tale che ponendo  $\tilde{A} = SA$  abbiamo*

$$\tilde{A} + \tilde{A}^*$$

*é una matrice definita negativa.*

*Dimostrazione.* Sia

$$S = \int_0^\infty e^{A^*t} e^{At} dt.$$

L'ipotesi (19.6.22) implica

$$e^{A^*t} e^{At}$$

é definita positiva e la sua norma decade esponenzialmente grazie a (19.6.13). Così  $S$  é ben definita come una matrice definita positiva.

Possiamo usare le relazioni

$$A^*S + SA = \int_0^\infty (A^*e^{A^*t}e^{At} + e^{A^*t}e^{At}A) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^*t}e^{At}) dt = -I$$

per completare la dimostrazione.

□

## 19.7 Esercizi: esponenziale di una matrice

**Problema 19.7.1.** *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 12/5 & 4/5 \\ -1/5 & 8/5 \end{pmatrix} \quad (19.7.23)$$

*Calcolare*

$$e^A, e^{tA}, e^{tA^2}.$$

**Idea della soluzione.** L'equazione caratteristica e

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \frac{12}{5}\right) \left(\lambda - \frac{8}{5}\right) + \frac{4}{25} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

e quindi abbiamo un autovalore di molteplicitá (algebraica) 2. Abbiamo autovettore proprio

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_1 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

e un autovettore generalizzato

$$t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tale che

$$(A - 2I)t_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = t_1.$$

Sia

$$T = [t_1 t_2], S = T^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

e

$$A = TJS, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$e^A = Te^J S, \quad e^J = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = Te^{Jt} S, \quad e^{Jt} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando il fatto che

$$J^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si può ottenere

$$e^{A^2 t} = Te^{J^2 t} S, \quad e^{J^2 t} = e^{8t} \begin{pmatrix} 1 & 4t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**Problema 19.7.2.** *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 17/5 & 4/5 \\ -1/5 & 13/5 \end{pmatrix} \quad (19.7.24)$$

*Calcolare*

$$e^A, e^{tA}, e^{tA^2}.$$

**Problema 19.7.3.** *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 13/5 & -4/5 \\ -4/5 & 7/5 \end{pmatrix} \quad (19.7.25)$$

*Calcolare*

$$e^A, e^{tA}, e^{tA^2}.$$

## Part IV

# Terza Parte: Integrazione



# Chapter 20

## Richiami sul integrale di Riemann del corso di Analisi Matematica 1

### 20.1 Integrale definito (di Riemann)

Si consideri la partizione  $P$  di un intervallo chiuso  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli  $[x_{k-1}, x_k]$  e si consideri una funzione limitata  $f(x)$  definita su  $[a, b]$ .

Per ogni intervallo della partizione si possono definire due punti:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

che corrispondono all'ordinata minore  $m_k$  nell'intervallo e all'ordinata maggiore  $M_k$  dell'intervallo. Si definisce somma integrale inferiore relativa alla partizione  $P$  come segue:

$$s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

Ammettendo che  $f$  assuma valori positivi nell'intervallo, la somma integrale inferiore é la somma dei rettangoli inscritti alla regione del piano. Analogamente, si definisce somma integrale superiore relativa

alla partizione  $P$  come segue:

$$S(P) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$$

La somma integrale superiore e' quindi la somma delle aree dei rettangoli circoscritti alla regione. Si ponga:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

si dimostra che per ogni coppia di partizioni  $P$  e  $Q$  di  $[a, b]$  si ha.

**Lemma 20.1.1.**

$$m(b-a) \leq s(P) \leq S(Q) \leq M(b-a)$$

Per ogni possibile partizione  $P$  di  $[a, b]$  si definiscono:

$$\delta = \{s(P); P \text{ é partizione dell'intervallo } [a, b]\},$$

$$\Sigma = \{S(P); P \text{ é partizione dell'intervallo } [a, b]\}$$

Dal lemma precedente si puo' dedurre che gli insiemi  $\delta$  e  $\Sigma$  sono separati cioe':

$$s \leq S \quad \forall s \in \delta \quad \forall S \in \Sigma$$

L'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$  afferma che allora esiste almeno un numero reale  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che:

$$s \leq \xi \leq S \quad \forall s \in \delta \quad \forall S \in \Sigma$$

Se vi e' un unico elemento di separazione  $\xi$  tra  $\delta$  e  $\Sigma$  allora si dice che  $f(x)$  e' integrabile in  $[a, b]$  secondo Riemann. L'elemento  $\xi$  si indica con:

$$\xi := \int_a^b f(x) dx$$

e si chiama integrale definito di  $f$  in  $[a, b]$ . I numeri  $a$  e  $b$  sono detti estremi di integrazione ed  $f$  e' detta funzione integranda. La variabile di integrazione e' una variabile "muta" o "apparente": nulla cambia se ne viene cambiato il nome e  $dx$  e' detto differenziale della variabile di integrazione.

**Esempio 20.1.1.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é razionale;} \\ 1, & \text{se } x \text{ non é razionale.} \end{cases} \quad (20.1.1)$$

*Si puo vedere che la funzzone non é integrabile in senso di Riemann in  $[0, 1]$ .*

**Lemma 20.1.2.** *L'integrale di Riemann di  $f$  nell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  esiste se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $P$  di  $[a, b]$  tale che*

$$|S(P) - s(P)| < \varepsilon$$

Se la funzione  $f(x)$  é integrabile in  $[a, b]$ , e la partizione  $P$  di  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli  $[x_{k-1}, x_k]$  é tale che

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{n},$$

allora l'integrale é il limite per  $n$  che tende ad infinito della somma integrale:

$$\sigma_n = \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k)$$

detta somma integrale di Riemann. Si puo verificare, che integrabilita' in senso di Riemann implica che il limite é finito e non dipende dalla scelta dei punti  $t_k$ , si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{s=1}^n f(t_s)$$

Se la funzione integrabile  $f(x)$  é positiva allora l'integrale assume il significato di area della regione, mentre se la funzione  $f$  cambia segno su  $[a, b]$  allora l'integrale rappresenta una somma di aree con segno diverso.

### Proprietá dell'integrale

- Linearitá.



Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in un intervallo  $[a, b]$  e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- Additività.

Sia  $f$  continua e definita in un intervallo  $[a, b]$  e sia  $c \in [a, b]$ . Allora:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Monotonia.

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in un intervallo  $[a, b]$  e  $f(x) \geq g(x)$ . Allora:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

- Valore assoluto.

Sia  $f$  integrabile in un intervallo  $[a, b]$ , allora si ha:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Lemma 20.1.3.** *Se  $f(x)$  è limitata e integrabile in senso di Riemann, allora*

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy$$

*è continua.*

**Lemma 20.1.4.** *Se  $f(x)$  è limitata, integrabile in senso di Riemann (in  $[a, b]$ ) e continua in  $x_0 \in (a, b)$ , allora*

$$F(x) = \int_a^x f(y) dy$$

*è differenziabile in  $x_0$  e  $F'(x_0) = f(x_0)$ .*

**Problema 20.1.1.** *Sia*

$$f_n(x) = \min(n, -\log x), x \in (0, 1).$$

*Abbiamo  $f_n$  sono integrabili in senso di Riemann e*

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \int_0^1 |f_n| dx - 1, m > n$$

*e dunque  $f_n$  é successione di Cauchy. Verificare se il limite  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  esiste e (se esiste) é integrabile in senso di Riemann .*

**Problema 20.1.2.** *Possiamo ordinare tutti numeri razionali in  $[0, 1]$  come segue*

$$r_1, r_2, \dots .$$

*Sia  $B_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  e*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_n; \\ 0, & \text{se } x \notin B_n. \end{cases} \quad (20.1.2)$$

*Vedere se  $f_n \in R([0, 1])$  e se la funzione*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

*é integrabile in senso di Riemann .*

**Problema 20.1.3.** *Sia  $a \in (0, 1)$  e sia*

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1/n]; \\ x^{-a}, & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases} \quad (20.1.3)$$

*Vedere se  $f_n \in R([0, 1])$  e se la funzione*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

*é integrabile in senso di Riemann .*

### Integrale di Riemann e continuità. Integrale di Riemann e limite delle successioni

**Theorem 20.1.1.** *Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. La  $f$  è integrabile in  $[a, b]$  se e solo se, comunque si fissino  $\varepsilon, \eta > 0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che, per ogni partizione  $P$  di  $[a, b]$  con ampiezza minore di  $\delta$ , sia più piccola di  $\varepsilon$  la somma delle ampiezze degli intervallini di  $P$  in cui l'oscillazione di  $f$  supera  $\eta$ .*

## 20.2 Integrale di Stieltjes

- Funzioni BV.

Si definisce innanzitutto la variazione totale di una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato a valori reali  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$V_a^b(f) = \limsup_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n_P-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

dove  $P$  è un'arbitraria partizione dell'intervallo  $[a, b]$  e

$$\delta(P) = \max_k (x_k - x_{k-1})$$

il suo diametro.

**Esempio 20.2.1.** *Se  $f(x)$  è BV, allora  $f$  può essere discontinua. Se la funzione è monotona a tratti, allora la sua variazione totale è la somma delle variazioni in ogni singolo intervallino di monotonia.*

**Lemma 20.2.1.** *Se  $f(x)$  è BV e continua, allora  $V_a^x(f)$  è continua.*

Si dice dunque che  $f$  è a variazione limitata e si scrive  $f \in BV[a, b]$  se  $V_a^b(f) < \infty$ .

**Esempio 20.2.2.** *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\pi/x), & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (20.2.4)$$

é continua, ma non  $\acute{B}V$ . Poniamo

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{2n-1}, \quad x_2 = \frac{2}{2n-3}, \dots, x_n = 2$$

e troviamo

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \left(2 + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

**Problema 20.2.1.** Vedere per quali  $a > 0$  la funzione

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a \sin(\pi/x), & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (20.2.5)$$

é  $BV$ .

**Lemma 20.2.2.** Se  $f$  e  $g$  sono funzioni  $BV$  in  $[a, b]$  allora  $f + g$  e  $fg$  sono  $BV$ .

Si puo' provare che  $f$  é a variazione limitata se e solo se si puo' scrivere come differenza di due funzioni monotone non decrescenti (decomposizione di Jordan).

**Lemma 20.2.3.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é in  $BV$ , allora esiste (unica) coppia di funzioni  $p, q$  tali che

- $p(x), q(x)$  sono monotoni e positivi,  $p(a) = q(a) = 0$ ,
- $f(x) - f(a) = p(x) - q(x)$ ,
- $V_a^x(f) = p(x) + q(x)$ .

**Lemma 20.2.4.** Se  $f(x)$  é continua, allora  $p(x), q(x)$  sono continui.

- Integrale di Riemann-Stieltjes.

Una possibile generalizzazione dell'integrale di Riemann e' data dall'integrale di Riemann-Stieltjes, che rende possibile estendere la

nozione di integrale utilizzando come variabile di integrazione sotto il segno di differenziale una funzione (detta integratrice):

$$\int_a^b f dg.$$

Prima supponiamo  $g$  una funzione monotona.

Si consideri la partizione  $P$  di un intervallo chiuso  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli  $[x_{k-1}, x_k]$  e si consideri una funzione limitata  $f(x)$  definita su  $[a, b]$ .

Per ogni intervallo della partizione si possono definire due punti:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Si definisce somma integrale inferiore relativa alla partizione  $P$  come segue:

$$s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

Analogamente, si definisce somma integrale superiore relativa alla partizione  $P$  come segue:

$$S(P) = \sum_{k=1}^n M_k (g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

Si ponga:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

si dimostra che per ogni coppia di partizioni  $P$  e  $Q$  di  $[a, b]$  si ha.

**Lemma 20.2.5.**

$$m(g(b) - g(a)) \leq s(P) \leq S(Q) \leq M(g(b) - g(a))$$

Per ogni possibile partizione  $P$  di  $[a, b]$  si definiscono:

$$\delta = s(P) \quad \Sigma = S(P)$$

Dal lemma precedente si puo' dedurre che gli insiemi  $\delta$  e  $\Sigma$  sono separati cioe':

$$s \leq S \quad \forall s \in \delta \quad \forall S \in \Sigma$$

L'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$  afferma che allora esiste almeno un numero reale  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che:

$$s \leq \xi \leq S \quad \forall s \in \delta \quad \forall S \in \Sigma$$

Se vi e' un unico elemento di separazione  $\xi$  tra  $\delta$  e  $\Sigma$  allora si dice che  $f(x)$  e' integrabile in  $[a, b]$  secondo Riemann. L'elemento  $\xi$  si indica con:

$$\xi := \int_a^b f(x) dg$$

e si chiama integrale di Riemann-Stieltjes di  $f$  rispetto a  $g$  in  $[a, b]$ .

Date due funzioni di variabile reale

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

sia

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

una partizione dell'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Da ognuno dei sottointervalli definiti dalla partizione estraiamo un punto

$$c_i \in [x_i, x_{i+1}];$$

definiamo inoltre il diametro della partizione  $P$  come segue:

$$\delta(P) = \max_{x_i \in P} |x_{i+1} - x_i|.$$

L'integrale di Riemann-Stieltjes di  $f$  rispetto a  $g$ , denotato da

$$\int_a^b f(x) dg(x),$$

e' definito come il seguente limite:

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{x_i \in P} f(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)),$$

se esso esiste indipendentemente dalla scelta dei punti  $c_i$ . La funzione  $f$  é definita integranda, mentre  $g$  é la funzione integratrice.

Esistono diversi teoremi riguardanti l'esistenza del limite sopra definito; la condizione di esistenza piu' semplice stabilisce che la funzione integranda sia continua, e la funzione integratrice sia a variazione limitata; quest'ultima condizione equivale a chiedere che  $g$  sia la differenza di due funzioni monotone. Un'altra condizione di esistenza e' che le due funzioni non condividano alcuno punto di discontinuita'.

Se la funzione  $g$  e' differenziabile, vale la formula

$$dg(x) = g'(x) dx,$$

e l'integrale di Riemann-Stieltjes coincide con quello di Riemann di  $fg'$ , cioe':

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

L'integrale di Riemann-Stieltjes é tuttavia definito anche nel caso di funzioni integratrici piu' generiche, che non possiedono derivata, o che sono discontinue.

### 20.2.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale, integrazione per parti, cambiamento di variabili

**Teorema fondamentale del calcolo integrale** Se  $f(x)$  é continua in  $[a, b]$  e  $F(x)$  é la primitiva di  $f$  allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[ F(x) \right]_a^b.$$

#### Integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) dx = (20.2.6)$$

$$\left[ f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

**Cambiamento di variabili.** Sia  $y = f(x)$  una funzione invertibile definita nell'intervallo  $[a, b]$ . Allora

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$





# Chapter 21

## Misura: idea della definizione e proprietà generali

Si definisce misura una funzione  $\mu$  definita sopra una  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di un certo insieme  $\Omega$  a valori nell'intervallo esteso  $[0, \infty]$ .

### 21.1 Algebre e $\sigma$ -algebre

**Definizione 21.1.1.** *Dato un insieme  $\Omega$ , si definisce algebra su  $\Omega$  una famiglia  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  tale che:*

- *L'insieme  $\Omega$  appartiene a  $\mathfrak{F}$ .*
- *Se un insieme  $A$  è in  $\mathfrak{F}$ , allora il suo complementare è in  $\mathfrak{F}$ .*
- *Se gli elementi  $A_j$  di una famiglia finita di insiemi*

$$\{A_j\}_{j=1, \dots, N}$$

*sono in  $\mathfrak{F}$ , allora la loro unione:*

$$A = \bigcup_{j=1}^N A_j$$

*appartiene a  $\mathfrak{F}$ .*

Dalla Definizione 21.1.1 segue che:

- L'insieme vuoto appartiene a  $\mathfrak{F}$ , essendo il complementare di  $\Omega$ .
- Una  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}$  é stabile per intersezione numerabile. Infatti, se  $A_j \in \mathfrak{F}$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , allora:

$$\bigcap_{j=1, \dots, N} A_j = \Omega \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N (\Omega \setminus A_j) \right) \in \mathfrak{F}.$$

- Se gli insiemi  $A$  e  $B$  appartengono a  $\mathfrak{F}$ , allora:

$$A \setminus B \in \mathfrak{F}.$$

**Definizione 21.1.2.** *Dato un insieme  $\Omega$ , si definisce  $\sigma$ -algebra su  $\Omega$  una famiglia  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  tale che:*

- L'insieme  $\Omega$  appartiene a  $\mathfrak{F}$ .
- Se un insieme  $A$  é in  $\mathfrak{F}$ , allora il suo complementare é in  $\mathfrak{F}$ .
- Se gli elementi  $A_j$  di una famiglia numerabile di insiemi

$$\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$$

sono in  $\mathfrak{F}$ , allora la loro unione:

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

appartiene a  $\mathfrak{F}$ .

Una  $\sigma$ -algebra, in particolare, é un'algebra di insiemi, poiché la terza condizione sopraindicata implica la stabilità per unione finita richiesta nella definizione di struttura di algebra. In tal caso si richiede la stabilità anche per unioni numerabili, da cui l'identificativo  $\sigma$  un'abbreviazione per successione.

Dalla Definizione 21.1.2 segue che:

- L'insieme vuoto appartiene a  $\mathfrak{F}$ , essendo il complementare di  $\Omega$ .
- Una  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{F}$  é stabile per intersezione numerabile. Infatti, se  $A_j \in \mathfrak{F}$  per ogni  $j \in \mathbb{N}$ , allora:

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \Omega \setminus \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\Omega \setminus A_j) \right) \in \mathfrak{F}.$$

- Se gli insiemi  $A$  e  $B$  appartengono a  $\mathfrak{F}$ , allora:

$$A \setminus B \in \mathfrak{F}$$

Date due  $\sigma$ -algre  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{G}$  su di uno stesso insieme  $\Omega$ , si dice che  $\mathfrak{F}$  é meno fine di  $\mathfrak{G}$  se  $\mathfrak{F}$  é contenuta in  $\mathfrak{G}$ , ovvero se ogni sottoinsieme  $E \subset \Omega$  appartenente ad  $\mathfrak{F}$  appartiene anche a  $\mathfrak{G}$ . La relazione essere meno fine di definisce un ordinamento parziale sull'insieme delle  $\sigma$ -algre su di un dato insieme  $\Omega$ .

## 21.2 Misure: additive e $\sigma$ - additive.

**Definizione 21.2.1.** Si definisce misura aditiva una funzione  $\mu$  definita sopra una algebra  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di un certo insieme  $\Omega$  a valori nell'intervallo esteso  $[0, \infty]$  tale che se

$$A_1, A_2, \dots, A_N$$

sono insiemi mutuamente disgiunti in  $\mathfrak{F}$ , allora:

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^N A_j \right) = \sum_{j=1}^N \mu(A_j).$$

**Definizione 21.2.2.** Si definisce misura  $\sigma$  - aditiva una funzione  $\mu$  definita sopra una  $\sigma$  - algebra  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di un certo insieme  $\Omega$  a valori nell'intervallo esteso  $[0, \infty]$  tale che se

$$A_1, A_2, \dots$$

é una successione di insiemi mutuamente disgiunti in  $\mathfrak{F}$ , allora:

$$\mu \left( \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j).$$

I membri di  $\mathfrak{F}$  sono detti insiemi misurabili, e la struttura  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$  viene detta spazio di misura.

Una misura complessa é inoltre una funzione numerabilmente additiva a valori complessi definita su una  $\sigma$ -algebra.

### 21.3 Proprietá della misura astratta

Dalla Definizione 21.2.2 possono essere derivate le seguenti proprietá:

- L'insieme vuoto ha misura nulla:

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

- Se  $A_1$  ed  $A_2$  sono insiemi misurabili allora se  $A_1 \subseteq A_2$  si ha

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2).$$

- Se

$$A_1, A_2, \dots$$

sono insiemi misurabili ed  $A_j$  é un sottoinsieme di  $A_{j+1}$  per tutti gli  $j$ , allora l'unione degli insiemi  $A_j$  é misurabile:

$$\mu \left( \bigcup_j A_j \right) = \lim_j \mu(A_j).$$

- Se

$$A_1, A_2, \dots$$

sono insiemi misurabili ed  $A_{j+1}$  é un sottoinsieme di  $A_j$  per tutti gli  $j$ , allora l'intersezione degli insiemi  $\{A_j\}$  é misurabile. Inoltre, se almeno uno degli insiemi ha misura finita allora:

$$\mu \left( \bigcap_j A_j \right) = \lim_j \mu(A_j).$$

## 21.4 Argomento facoltativo: Misura esterna

Una misura esterna é definita come una funzione definita su tutti i sottoinsiemi di un insieme  $\Omega$ :

$$\varphi : A \subseteq \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

tale che:

- L'insieme vuoto ha misura esterna zero:

$$\varphi(\emptyset) = 0.$$

- $\varphi$  é monotona, ovvero se  $A \subseteq B$  allora:

$$\varphi(A) \leq \varphi(B).$$

- $\varphi$  é numerabilmente subadditiva. Esplicitamente, per ogni successione

$$A_1, A_2, \dots$$

di sottoinsiemi di  $\Omega$  non necessariamente disgiunti si ha:

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Si noti che la monotonia non segue dalla subadditivá (mentre seguirebbe, ad esempio, dall'additivá).

La definizione permette di definire il concetto di misurabilita' nel modo seguente.

**Definizione 21.4.1.** *Un insieme  $E \subset \Omega$  é  $\varphi$ -misurabile (o Carathéodory-misurabile mediante  $\varphi$ ) se e solo se per ogni sottoinsieme  $A \subset \Omega$  si ha:*

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \setminus E).$$

Si dimostra che gli insiemi  $\varphi$ -misurabili formano una  $\sigma$ -algebra, e  $\varphi$  ristretta agli insiemi misurabili é una misura completa numerabilmente additiva.



## Chapter 22

# Misura di Peano - Jordan

Dato un intervallo (chiuso)

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n, -\infty < a_j < b_j < +\infty, j = 1, \dots, n$$

la sua misura é, per definizione,

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Dalla definizione segue che per ogni intervallo  $\subset \mathbb{R}^n$  e ogni intervallo  $J \subset \mathbb{R}^m$  l'intervallo

$$I \times J \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

ha misura di Peano Jordan

$$m(I \times J) = m(I)m(J).$$

Se  $I, J$  sono intervalli, allora  $I \cap J$  é un intervallo (chiuso) o l'insieme vuoto.

L'intervallo

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

a lati uguali

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_n - a_n = A$$

(in dimension 2 é un quadrato, in dimensione 3 e' un cubo) puo essere interpretato come palla

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x^*\|_\infty \leq A/2\} \quad (22.0.1)$$



dove

$$x^* = \left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2} \right),$$

$$\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

## 22.1 Insiemi con misura di Peano – Jordan zero

**Definizione 22.1.1.** *Un sottoinsieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  ha misura di Peano - Jordan zero se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono intervalli*

$$I_1, \dots, I_N$$

tali che

$$A \subseteq \cup_{j=1}^N I_j, \quad \sum_{j=1}^N m(I_j) \leq \varepsilon. \quad (22.1.2)$$

L'insieme vuoto per definizione ha misura zero. Ogni punto  $x \in \mathbb{R}^n$  ha misura di Peano - Jordan zero. Ovviamente abbiamo la seguente proprietà.

**Lemma 22.1.1.** *Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  ha misura di Peano - Jordan zero e  $I \subset \mathbb{R}^m$  é plurintervallo, allora*

$$A \times I$$

ha misura di Peano Jordan zero in  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

**Dimostrazione.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  troviamo un ricoprimento

$$U_j, j = 1, \dots, N$$

di  $A$  con  $U_j$  intervalli e

$$\sum_{j=1}^N m(U_j) \leq \varepsilon.$$

Allora

$$U_j \times I$$

é un ricoprimento di  $A \times I$  con

$$m(U_j \times I) = m(U_j)m(I)$$

tale che

$$\sum_{j=1}^N m(U_j)m(I) \leq \varepsilon m(I).$$

□

La frontiera di ogni intervallo é unione di insiemi del tipo prodotto cartesiano descritto in Lemma 22.1.2. Questa osservazione implica

**Corollario 22.1.1.** *Per ogni intervallo  $I \subset \mathbb{R}^n$  la sua frontiera  $\partial I$  ha misura zero.*

Quest proprietá ci permette di definire la misura di un intervallo aperto

$$I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n, -\infty < a_j < b_j < +\infty, j = 1, \dots, n$$

con

$$m(I) = m(\bar{I})$$

dove

$$\bar{I} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

é la chiusura di  $I$ .

$$m(I) = m(\bar{I}) = m(\text{int}I).$$

Per ogni intervallo  $T$  (chiuso, aperto o ne chiuso e ne aperto) abbiamo

Le altra proprietá che si possono dedurre direttamente dalla definizione sono descritti sotto.

**Lemma 22.1.2.** *Per gli insiemi di misura di Peano - Jordan zero valgono le proprietá:*

- a) *se  $A \subset \mathbb{R}^n$  ha misura di Peano - Jordan zero allora per ogni  $B \subset A$  la misura di  $B$  é zero;*

b) Se  $A_1, \dots, A_k$  é un numero FINITO di insiemi in  $\mathbb{R}^n$  di misura zero allora

$$\cup_{j=1}^k A_j$$

ha misura di Peano Jordan zero in  $\mathbb{R}^n$ .

## 22.2 Plurintervalli e loro misura (di Peano - Jordan)

**Definizione 22.2.1.** Sia

$$I_1, \dots, I_N$$

intervalli (chiusi o aperti). L'unione

$$\cup_j I_j$$

é unione disgiunta se gli insiemi, presi a due a due, hanno intersezione vuota, cioè

$$I_j \cap I_k = \emptyset, \quad \forall j, k = 1, \dots, N.$$

Per ogni unione disgiunta possiamo definire la misura

$$m(\cup_j I_j) = \sum_j m(I_j). \quad (22.2.3)$$

**Definizione 22.2.2.** Sia

$$I_1, \dots, I_N$$

intervalli (chiusi o aperti). L'unione

$$\cup_j I_j$$

é unione QUASI disgiunta se gli insiemi, presi a due a due, hanno intersezione di misura (di Peano - Jordan) zero, cioè

$$m(I_j \cap I_k) = 0, \quad \forall j, k = 1, \dots, N.$$

**Definizione 22.2.3.** *Un plurintervallo é unione QUASI disgiunta di intervalli*

$$I = \cup_{j=1}^N I_j,$$

$I_j$  intervalli con

$$m(I_j \cap I_k) = 0, \quad \forall j, k = 1, \dots, N.$$

**Osservazione 22.2.1.** *Si puo vedere che l'unione di due rettangoli (intervalli in  $\mathbb{R}^2$ )*

$$R_1 = [0, 2] \times [0, 2], R_2 = [1, 5] \times [0, 4]$$

non ha unica rappresentazione come

$$R_1 \cup R_2 = \cup_j I_j$$

dove

$$\cup_j I_j$$

é una unione quasi disgiunta di rettangoli.

**Osservazione 22.2.2.** *Ogni intervallo chiuso*

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

tale che

$$-\infty < a_j < b_j < +\infty, j = 1, \dots, n$$

é anche un plurintervallo, cioé si puo rappresentare come unione

$$I = \cup_k I_k$$

quasi disgiunta di intervalli chiusi.

L'ultima osservazione suggerisce l'introduzione di una partizione del intervallo

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad (22.2.4)$$

Per  $n = 1$  una partizione del intervallo

$$[a, b]$$

e definita come

$$\mathcal{P} = \{\Delta_k\}_{k=1}^N, \quad \Delta_k = [x_{k-1}, x_k],$$

tale che

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

**Definizione 22.2.4.** *L'insieme*

$$\mathcal{P} = \{\Delta = \Delta_{1k_1} \times \cdots \times \Delta_{nk_n}; \quad \Delta_{jk_j} \in \mathcal{P}_j\},$$

dove

$$k_1 = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$k_2 = 1, 2, \dots, N_2,$$

.....

$$k_n = 1, 2, \dots, N_n$$

e per  $j = 1, \dots, n$  l'insieme

$$\mathcal{P}_j = \{\Delta_{jk}\}_{k=1}^{N_j}$$

é una partizione del intervallo  $[a_j, b_j]$

La partizione soddisfa le proprietà:

- a) se  $\Delta \in \mathcal{P}$ , allora  $\Delta \subseteq \bar{I}$ ;
- b) per  $\Delta \in \mathcal{P}$  e  $\tilde{\Delta} \in \mathcal{P}$  abbiamo due possibilità: o le chiusure di  $\Delta$  e  $\tilde{\Delta}$  coincidono o la misura dell'intersezione  $\Delta \cap \tilde{\Delta}$  é zero;
- c) abbiamo

$$I \subseteq \cup_{\Delta \in \mathcal{P}} \Delta,$$

dove l'unione é quasi disgiunta.

Usando la definizione della misura di un intervallo, possiamo verificare un fatto semplice.

**Lemma 22.2.1.** *Sia  $I$  un intervallo e*

$$\mathcal{P} = \{\Delta = \Delta_{1k_1} \times \cdots \times \Delta_{nk_n}; \quad \Delta_{jk_j} \in \mathcal{P}_j\},$$

*é una partizione del intervallo, allora*

$$m(I) = \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} m(\Delta).$$

Un risultato un po' piu' forte é il seguente.

**Lemma 22.2.2.** *Sia  $I$  un intervallo e  $I$  ha rappresentazione*

$$I = \cup_{j=1}^N I_j$$

*come unione quasi disgiunta di intervalli chiusi, allora*

$$\sum_j m(I_j) = m(I). \quad (22.2.5)$$

**Dimostrazione.** Prima possiamo costruire una partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  tale che

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_N,$$

dove

$$\mathcal{F}_j = \{\Delta \in \mathcal{P}; \Delta \subset I_j\}$$

e quindi ogni  $I_j$  puo essere partizionato come

$$I_j = \cup_{\Delta \in \mathcal{F}_j} \Delta. \quad (22.2.6)$$

In fatti, se

$$I_j = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \times [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] \times \dots \times [a_n^{(j)}, b_n^{(j)}],$$

possiamo considerare l'intervallo  $[a_1, b_1]$  e usando i punti dell'insieme finito

$$S_1 = \{a_1^{(j)}, j = 1, \dots, n\} \cup \{b_1^{(j)}, j = 1, \dots, n\} \cup \{a_1, b_1\}$$

possiamo definire una partizione

$$\mathcal{P}_1 = \{\Delta_{1k}\}_{k=1}^{N_1},$$

dell'intervallo  $[a_1, b_1]$ , dove estremi di ogni intervallo  $\Delta_{1k}$  sono punti di  $S_1$  e

$$N_1 = \text{card}(S_1) - 1.$$

In modo simile, per l'intervallo  $[a_2, b_2]$  si considera l'insieme finito

$$S_2 = \{a_2^{(j)}, j = 1, \dots, n\} \cup \{b_2^{(j)}, j = 1, \dots, n\} \cup \{a_2, b_2\}$$

e possiamo definire una partizione

$$\mathcal{P}_2 = \{\Delta_{2k}\}_{k=1}^{N_2},$$

dell'intervallo  $[a_1, b_2]$ , dove estremi di ogni intervallo  $\Delta_{2k}$  sono punti di  $S_2$  e

$$N_2 = \text{card}(S_2) - 1.$$

Ripetendo questa operazione, alla fine arriviamo all'intervallo  $[a_n, b_n]$  per quale si considera l'insieme finito

$$S_n = \{a_n^{(j)}, j = 1, \dots, n\} \cup \{b_n^{(j)}, j = 1, \dots, n\} \cup \{a_n, b_n\}$$

e possiamo definire una partizione

$$\mathcal{P}_n = \{\Delta_{nk}\}_{k=1}^{N_n},$$

dell'intervallo  $[a_n, b_n]$ , dove estremi di ogni intervallo  $\Delta_{nk}$  sono punti di  $S_n$  e

$$N_n = \text{card}(S_n) - 1.$$

Usando (22.2.6) e Lemma 22.2.1 si ottiene

$$m(I_j) = \sum_{\Delta \in \mathcal{F}_j} m(\Delta)$$

D'altra parte, la partizione

$$\mathcal{P} = \{\Delta_{jk}, k = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, n\} = \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n$$

di  $I$  soddisfa (sempre usando Lemma 22.2.1)

$$m(I) = \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} m(\Delta) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{\Delta \in \mathcal{F}_j} m(\Delta) \right)$$

e quindi (22.2.5) é dimostrato.  $\square$

**Lemma 22.2.3.** *Se un plurintervallo  $I$  ha due rappresentazioni*

$$\cup_{j=1}^N I_j = \cup_{k=1}^M \tilde{I}_k$$

*come unioni di intervalli quasi disgiunti, allora*

$$\sum_j m(I_j) = \sum_k m(\tilde{I}_k).$$

**Dimostrazione.** Ogni plurintervallo può essere coperto da un intervallo  $I_0$ . Come nella dimostrazione del Lemma 22.2.2 possiamo costruire una partizione  $\mathcal{P}$  di  $I_0$  tale che ogni  $I_j$  ed ogni  $\tilde{I}_k$  possano essere partizionati come

$$I_j = \cup_m \Delta_{jm}, \quad \Delta_{jm} \in \mathcal{P}. \quad (22.2.7)$$

e

$$\tilde{I}_k = \cup_\ell \widetilde{\Delta}_{k\ell}, \quad \widetilde{\Delta}_{k\ell} \in \mathcal{P}. \quad (22.2.8)$$

Sia

$$I_{jk}^* = I_j \cap \tilde{I}_k.$$

Sappiamo che

$$I_{jk}^*, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M$$

sono intervalli o insiemi vuoti, tali che

$$I_j = \cup_k I_{jk}^*, \quad \tilde{I}_k = \cup_j I_{jk}^*.$$

dove le unioni sono quasi disgiunti. Ogni  $I_{jk}^*$  è unione di elementi della partizione  $\mathcal{P}$  e la stessa cosa vale per  $I_j$ . Usando Lemma 22.2.1 si ottiene

$$m(I_j) = m(\text{int}(I_j)) = \sum_k m(\text{int}(I_{jk}^*)) = \sum_k m(I_{jk}^*)$$

dove  $\text{int}(A)$  è la parte interna di un insieme  $A$ . Nello stesso modo troviamo

$$m(\tilde{I}_k) = m(\text{int}(\tilde{I}_k)) = \sum_j m(\text{int}(I_{jk}^*)) = \sum_j m(I_{jk}^*).$$

Concludiamo che vale l'identità

$$\sum_j m(I_j) = \sum_{jk} m(I_{jk}^*) = \sum_k m(\tilde{I}_k).$$

□

**Definizione 22.2.5.** *La misura di un plurintervallo*

$$I = \cup_{j=1}^N I_j,$$

è

$$m(I) = \sum_{j=1}^N m(I_j).$$



**Lemma 22.2.4.** *Se  $I, J$  sono plurintervalli chiusi allora  $I \cup J = \overline{I \cup J}$  é plurintervallo e*

$$m(I \cup J) \leq m(I) + m(J).$$

**Dimostrazione.** Infatti, se

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$$J = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$$

sono i due intervalli allora esiste per ogni  $j = 1, \dots, n$  esiste una partizione  $\mathcal{P}_j$  dell'unione  $[a_j, b_j] \cup [c_j, d_j]$ , tale che  $[a_j, b_j] \cup [c_j, d_j]$  si puo rappresentare nella forma di unione

$$\cup_k \Delta_{jk},$$

quasi disgiunta, dove  $\Delta_{jk}$  sono (al massimo tre) intervalli con estremi tra i punti  $a_j, b_j, c_j, d_j$ . L'insieme  $S$

$$S = \{ \Delta = \Delta_{1k_1} \times \cdots \times \Delta_{nk_n}; \Delta_{jk_j} \in \mathcal{P}_j, \Delta \subseteq \overline{I \cup J} \}$$

definisce un ricoprimento di  $I \cup J$  e

$$I \cup J = \cup_{\delta \in S} \Delta$$

é unione quasi disgiunta. □

## 22.3 Aperti in $\mathbb{R}^n$ e unioni quasi disgiunti

**Lemma 22.3.1.** *Ogni aperto  $\mathcal{O}$  in  $\mathbb{R}^n$  é unione*

$$\mathcal{O} = \cup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

*quasi disgiunta di intervalli  $I_k$  chiusi.*

**Idea della dimostrazione.** Per semplicitá ragioniamo in  $\mathbb{R}^2$ .

Come primo passo consideriamo la griglia  $\mathbb{Z}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  e consideriamo tutti quadratini

$$Q_k = \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; k = (k_1, k_2), k_1 \leq x_1 \leq k_1+1, k_2 \leq x_2 \leq k_2+1 \}$$

di lato 1 chiusi e con vertici in

$$\mathbb{Z}^2 = \{(k = (k_1, k_2); k_j \in \mathbb{Z})\}.$$

Sia

$$F_0 = \{Q_k; k \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Come secondo passo consideriamo la griglia

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2 = \left\{ \left( \frac{1}{2}k_1, \frac{1}{2}k_2 \right); k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

in  $\mathbb{R}^2$  e consideriamo tutti quadratini

$$Q_k^{(1)} = \left\{ x, \frac{1}{2}k_1 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}(k_1 + 1), \frac{1}{2}k_2 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}(k_2 + 1) \right\},$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$$

di lato  $1/2$  chiusi e con vertici in

$$\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2 = \left\{ \left( \frac{1}{2}k_1, \frac{1}{2}k_2 \right); k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Sia

$$F_1 = \{Q_k^{(1)}; k \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Dato un numero naturale  $\ell \geq 2$  consideriamo la griglia

$$\frac{1}{2^\ell}\mathbb{Z}^2 = \left\{ \left( \frac{1}{2^\ell}k_1, \frac{1}{2^\ell}k_2 \right); k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

in  $\mathbb{R}^2$  e consideriamo tutti quadratini

$$Q_k^{(\ell)} = \left\{ x, \frac{1}{2^\ell}k_1 \leq x_1 \leq \frac{1}{2^\ell}(k_1 + 1), \frac{1}{2^\ell}k_2 \leq x_2 \leq \frac{1}{2^\ell}(k_2 + 1) \right\},$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$$

di lato  $1/2^\ell$  chiusi e con vertici in

$$\frac{1}{2^\ell}\mathbb{Z}^2 = \left\{ \left( \frac{1}{2^\ell}k_1, \frac{1}{2^\ell}k_2 \right); k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Sia

$$F_\ell = \{Q_k^{(\ell)}; k \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Per il primo passo scegliamo

$$\alpha_0 = \{Q_k \in F_0; Q_k \subset \mathcal{O}\},$$

per il secondo passo scegliamo (vedi Figura 22.1)

$$\beta_1 = \{Q_k \in F_1; Q_k \subset \mathcal{O}, \text{ esiste } \tilde{Q} \in \alpha_0 \text{ tale che } Q_k \subseteq \tilde{Q}\},$$

$$\alpha_1 = \{Q_k \in F_1; Q_k \subset \mathcal{O}, Q_k \notin \beta_1\},$$

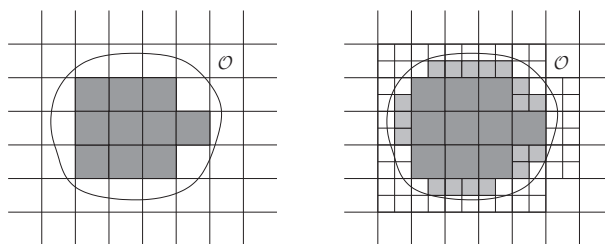


Figure 22.1: Ogni aperto nel piano e unione quasi disgiunta degli quadrati chiusi

Per ogni numero naturale  $\ell \geq 2$  scegliamo

$$\beta_\ell = \{Q_k \in F_\ell; Q_k \subset \mathcal{O}, \text{ esiste } \tilde{Q} \in \alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{\ell-1} \text{ tale che } Q_k \subseteq \tilde{Q}\},$$

$$\alpha_\ell = \{Q_k \in F_\ell; Q_k \subset \mathcal{O}, Q_k \notin \beta_\ell\}$$

Si può verificare che

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} \left( \bigcup_{Q_k \in \alpha_\ell} Q_k \right).$$

□

## 22.4 Misura esterna e misura interna per qualsiasi insieme limitato

Se  $B \subset \mathbb{R}^n$  é limitato, allora la sua misura interna é definita come segue

$$m_*(B) = \sup_{I \subset B} m(I)$$

e la misura esterna di Peano - Jordan

$$m^*(B) = \inf_{I \supset B} m(I)$$

dove l'estremo inferiore e l'estremo superiore si prende sui plurintervalli.

Valgono le proprietá.

**Lemma 22.4.1.** (*Subadditivitá della misura esterna*)

$$m^*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare  $I_1 \supset A_1$ ,  $I_2 \supset A_2$  tali che

$$m^*(A_1) \leq m(I_1) < m^*(A_1) + \varepsilon, \quad m^*(A_2) \leq m(I_2) < m^*(A_2) + \varepsilon,$$

l'insieme  $I_1 \cup I_2$  copre  $A_1 \cup A_2$  quindi

$$m^*(A_1 \cup A_2) \leq m(I_1 \cup I_2) \leq m(I_1) + m(I_2) < m^*(A_1) + m^*(A_2) + 2\varepsilon.$$

Usando il fatto che  $\varepsilon > 0$  é arbitrario concludiamo che

$$m^*(A_1 \cup A_2) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

□

**Lemma 22.4.2.** (*Superadditivitá della misura interna*) Se  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , allora

$$m_*(A_1 \cup A_2) \geq m_*(A_1) + m_*(A_2).$$

**Dimostrazione.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare  $I_1 \subset A_1$ ,  $I_2 \subset A_2$  tali che

$$m^*(A_1) - \varepsilon < m(I_1) \leq m^*(A_1), \quad m^*(A_2) - \varepsilon < m(I_2) \leq m^*(A_2),$$

l'insieme  $I_1 \cup I_2$  é un sottoinsieme di  $A_1 \cup A_2$  e  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  implica  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  quindi

$$m^*(A_1 \cup A_2) \geq m(I_1 \cup I_2) = m(I_1) + m(I_2) > m^*(A_1) + m^*(A_2) - 2\varepsilon.$$

Usando il fatto che  $\varepsilon > 0$  é arbitrario concludiamo che

$$m^*(A_1 \cup A_2) \geq m^*(A_1) + m^*(A_2).$$

□

**Lemma 22.4.3.** *(Le misura interna ed esterna sono monotone) Se  $A \subseteq B$  allora*

$$m^*(A) \leq m^*(B), \quad m_*(A) \leq m_*(B).$$

**Dimostrazione.** Presentiamo dimostrazione solo per la misura esterna, nel caso di misura interna si puo procedere in modo simile. Per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare  $I \supset B$ , tali che

$$m^*(B) \leq m(I) < m^*(B) + \varepsilon,$$

l'insieme  $I$  contiene  $B$  e quindi  $I \supset B \supset A$ . Possiamo scrivere

$$m^*(A) \leq m(I) < m^*(B) + \varepsilon$$

e quindi

$$m^*(A) \leq m^*(B).$$

□

## 22.5 Insiemi misurabili (secondo Peano – Jordan)

**Definizione 22.5.1.** *Un sottoinsieme limitato  $B \subset \mathbb{R}^n$  è misurabile secondo Peano – Jordan, se e solo se*

$$m_*(B) = m^*(B).$$

Per la misura di Peano – Jordan useremo la stessa notazione  $m(A)$ , come la notazione per la misura  $m(P)$  di un plurintervallo.

Abbiamo il seguente criterio ( segue quasi direttamente dalla definizione e per quello no si scrive la dimostrazione)

**Lemma 22.5.1.** *Un sottoinsieme limitato  $B \subset \mathbb{R}^n$  è misurabile secondo Peano – Jordan se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono plurintervalli  $P_1, P_2$  tali che*

$$P_1 \subseteq A \subseteq P_2$$

e

$$0 \leq m(P_2) - m(P_1) \leq \varepsilon. \quad (22.5.9)$$

Le proprietà della misura esterna e della misura interna implicano.

**Lemma 22.5.2.** *(Additività finita della misura di Peano - Jordan) Se  $A_1, A_2$  sono due insiemi limitati, misurabili (secondo Peano - Jordan) con*

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset,$$

*allora  $A_1 \cup A_2$  è misurabile e*

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

**Lemma 22.5.3.** *(La misura di Peano - Jordan è monotona) Se  $A \subseteq B$  due insiemi limitati, misurabili (secondo Peano - Jordan), allora*

$$m(A) \leq m(B).$$

**Criteri di misurabilità**

**Lemma 22.5.4.** *Sia  $A$  un insieme limitato. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- a)  $A$  é misurabile (secondo Peano - Jordan):
- b) la frontiera  $\partial A$  ha misura di Peano - Jordan zero.

**Dimostrazione.** Se  $A$  é misurabile il criterio di misurabilità (Lemma 22.5.1) implica che per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono plurintervalli

$$P_1 \subset A \subset P_2,$$

tale che

$$0 \leq m(P_2) - m(P_1) \leq \varepsilon \quad (22.5.10)$$

Ogni plurintervallo puo essere coperto da un intervallo  $I_0$ . Come nella dimostrazione del Lemma 22.2.2 possiamo costruire una partizione  $\mathcal{P} = \{\Delta_m, m = 1, \dots, N\}$  di  $I_0$  tale che  $P_1$  e  $P_2$  possano essere partizionati come

$$P_1 = \cup_{j \in \alpha} \Delta_j, \quad \Delta_j \in \mathcal{P}.$$

e

$$P_2 = \cup_{j \in \beta} \Delta_j, \quad \Delta_j \in \mathcal{P}$$

con

$$\alpha \subset \beta \subset \{1, 2, \dots, N\}.$$

L'identitá

$$m(P_2) - m(P_1) = \sum_{j \in \beta \setminus \alpha} m(\Delta_j), \quad (22.5.11)$$

l'inclusione

$$\cup_{j \in \beta \setminus \alpha} \Delta_j \supset \partial A \quad (22.5.12)$$

insieme con (22.5.10) implicano

$$\sum_{j \in \beta \setminus \alpha} m(\Delta_j) < \varepsilon.$$

Possiamo concludere che vale b), cioé la misura di  $\partial A$  é zero.

Per veder l'implicazione

$$m(\partial A) = 0 \implies A \text{ é misurabile}$$

si procede in modo simile. L'implicazione é triviale se  $\text{int}(A)$ , la parte interna di  $A$  é vuota. Ricordiamo che

$$\text{int}(A) = \{x \in A ; \text{esiste intorno } U(x) \text{ di } x \text{ tale che } U(x) \subset A\}.$$

Per quello supponiamo che  $\text{int}(A) \neq \emptyset$ .

Sia  $\varepsilon > 0$ . Supponiamo che esistono intervalli CHIUSI

$$I_1, I_2, \dots, I_k$$

tali che

$$\partial A \subset \cup_{j=1}^k I_j$$

e

$$\sum_{j=1}^k m(I_j) < \varepsilon. \quad (22.5.13)$$

Sia  $J_0$  un intervallo che copre  $A$ . Ovviamente

$$J = J_0 \cup \left( \cup_{j=1}^k I_j \right)$$

é un plurintervallo e quindi possiamo costruire una partizione  $\mathcal{P}$  di  $J$  (con intervalli CHIUSI) tale che ogni  $I_j$  possano essere partizionati come

$$I_j = \cup_{\ell} \Delta_{j\ell}, \quad \Delta_{j\ell} \in \mathcal{P}.$$

ed esiste almeno un intervallo  $\Delta$  della partizione  $\mathcal{P}$  che é dentro  $\text{int}(A)$ . Sia

$$\Lambda = \{\Delta \in \mathcal{P}; \Delta \subseteq \cup_j I_j\},$$

$$\Omega = \{\Delta \in \mathcal{P}; \Delta \subseteq \text{int}(A)\}.$$

Possiamo definire

$$P_1 = \cup_{\Delta \in \Omega} \Delta, \quad P_2 = P_1 \cup \left( \cup_{\Delta \in \Lambda} \Delta \right)$$

Abbiamo la relazione

$$P_2 \setminus P_1 = \cup_j I_j \supset \partial A$$



e le disequazioni

$$m(P_2) - m(P_1) \leq \sum_j m(I_j) < \varepsilon.$$

Così otteniamo che  $A$  è misurabile.

□

### Funzioni continue e misurabilità

Sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compatto e sia

$$f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è un'applicazione continua.

Prima di tutto continuità della funzione non è sufficiente per dedurre

$$m(K) = 0 \implies m(f(K)) = 0. \quad (22.5.14)$$

Si può vedere Problema (??) per un controesempio classico.

Possiamo supporre la continuità assoluta della funzione  $f$ .

**Definizione 22.5.2.** *La funzione*

$$f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

*è assolutamente continua se per ogni  $\varepsilon > 0$  si può trovare un  $\delta > 0$  tale che per ogni scelta di numero finito di intervalli chiusi*

$$\{I_j, j = 1, \dots, N\}$$

*tale che*

$$\cup_j I_j$$

*è una unione quasi disgiunta, la condizione*

$$\sum_j m(I_j) \leq \delta$$

*implica*

$$\sum_j m(f(I_j)) \leq \varepsilon.$$

**Lemma 22.5.5.** *Sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compatto misurabile (in senso di Peano-Jordan) e sia*

$$f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*un'applicazione assolutamente continua e invertibile, tale che la funzione inversa*

$$f^{-1} : f(K) \longrightarrow K$$

*é continua. Allora il compatto  $f(K)$  é misurabile.*

**Idea della Dimostrazione.** Se

$$f : K \longrightarrow \tilde{K} \subset \mathbb{R}^n$$

e

$$f^{-1} : \tilde{K} \longrightarrow K$$

sono continue, allora abbiamo l'identitá

$$f(\partial K) = \partial \tilde{K}, \quad \tilde{K} = f(K).$$

Il criterio di misurabilita (Lemma 22.5.4 ) permette di ridurre la dimostrazione alla verifica che

$$m(\partial K) = 0 \implies m(\partial \tilde{K}) = 0. \quad (22.5.15)$$

Per quello supponiamo che  $m(\partial K) = 0$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  si puo trovare un  $\delta > 0$  tale che per ogni ricoprimento

$$K \subseteq \cup_j I_j$$

quasi disgiunto con intervalli chiusi la condizione

$$\sum_j m(I_j) \leq \delta$$

implica

$$\sum_j m(f(I_j)) \leq \varepsilon.$$

Questo implica l'affermazione se possiamo verificare che  $f(I)$  é misurabile per ogni intervallo  $I$  (vedi Problema 22.6.2).

□

## 22.6 Esercizi sulla misura di Peano

**Problema 22.6.1.** Sia  $A \subset I_0$ , dove

$$I_0 = \underbrace{[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]}_{n \text{ volte}} \subset \mathbb{R}^n,$$

tale che

$$A \subsetneq I_0.$$

Vedere che

$$m_*(A) \geq m(I_0) - m^*(I_0 \setminus A).$$

*Suggerimento.* Sia  $I$  un plurintervallo tale che

$$I \supseteq I_0 \setminus A, \quad m^*(I_0 \setminus A) \leq m(I) \leq m^*(I_0 \setminus A) + \varepsilon.$$

Ovviamente

$$I_0 \setminus I \subseteq A, \quad m(I_0 \setminus I) = m(I_0) - m(I) \geq m(I_0) - m^*(I_0 \setminus A) - \varepsilon$$

e quindi

$$m_*(A) \geq m(I_0) - m^*(I_0 \setminus A).$$

□

**Problema 22.6.2.** Sia  $I \subset \mathbb{R}^n$  un intervallo e sia

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un'applicazione continua e invertibile, tale che la funzione inversa

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$$

é continua. Verificare che  $f(I)$  é misurabile.

**Suggerimento.** Se

$$f : I \longrightarrow K = f(I) \subset \mathbb{R}^n$$

e

$$f^{-1} : K \longrightarrow I$$

sono continue, allora abbiamo l'identità

$$f(\partial I) = \partial K, \quad K = f(I).$$

Per verificare l'identità

$$m(f(\partial I)) = m(\partial K) = 0$$

si può usare Lemma 23.3.1. □

**Problema 22.6.3.** *Sia*

$$C_0, C_1, \dots, C_N, \dots$$

*successione di sottoinsiemi  $C_N \subset [0, 1]$  definiti per ricorrenza come*

$$C_0 = [0, 1],$$

$$C_N = \frac{C_{N-1}}{3} \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{C_{N-1}}{3} \right)$$

*Calcolare*

$$m^*(\cap_N C_N),$$

*cioè trovare la misura esterna dell'insieme di Cantor*

$$C = \cap_N C_N.$$

**Suggerimento.**  $C_N$  è plurintervallo di misura

$$m(C_N) = 2 \frac{m(C_{N-1})}{3} \implies m(C_N) = \left( \frac{2}{3} \right)^N.$$

Così la misura esterna è zero. □

**Problema 22.6.4.** *Sia  $s \in (0, 1/2)$  e*

$$C_0, C_1, \dots, C_N, \dots$$

*successione di sottoinsiemi  $C_N \subset [0, 1]$  definiti per ricorrenza come*

$$C_0 = [0, 1],$$

$$C_N = sC_{N-1} \cup (1 - s + sC_{N-1})$$

Calcolare

$$m^*(\cap_N C_N),$$

cioé trovare la misura esterna dell'insieme di Cantor generalizzato

$$C = \cap_N C_N.$$

In modo simile si può costruire l'insieme di Smith - Volterra - Cantor. Iniziamo con l'intervallo  $C_0 = [0, 1]$ . Sia

$$C_1 = C_0 \setminus [1/2 - 1/8, 1/2 + 1/8] = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right].$$

Per ogni  $k \geq 2$   $C_k$  é plurintervallo

$$C_k = \cup_{j=1}^{2^k} \Delta_{jk}, \quad (22.6.16)$$

con unione quasi disgiunta tale che

$$\Delta_{jk} = [m_{jk} - \delta_k, m_{jk} + \delta_k]$$

con  $\delta_k > 2^{-2k-2}$ .

$$m_0(\Delta_{1k}) = m_0(\Delta_{2k}) = \dots = 2\delta_k.$$

Adesso costruiamo

$$C_{k+1} = C_k - \cup_{j=1}^{2^k} [m_{jk} - 2^{-2k-3}, m_{jk} + 2^{-2k-3}]$$

Si ottiene

$$m(C_{k+1}) = m(C_k) - \frac{2^k}{2^{2k+2}} = m(C_k) - \frac{1}{2^{k+2}}$$

# Chapter 23

## Integrale di Riemann

### 23.1 Integrale di Riemann su intervalli in $\mathbb{R}^n$

Sia

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n, -\infty < a_j < b_j < +\infty, j = 1, \dots, n$$

un intervallo chiuso con misura

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

e sia

$$f(x) : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

una funzione definita e limitata.

Per ogni  $j = 1, \dots, n$  possiamo considerare una partizione  $\mathcal{P}_j$  del intervallo  $[a_j, b_j]$ , tale che  $[a_j, b_j]$  si puo rappresentare nella forma di unione

$$\cup_k \Delta_{jk},$$

quasi disgiunta, dove  $\Delta_{jk}$  sono intervalli. L'insieme

$$\mathcal{P} = \{\Delta = \Delta_{1k_1} \times \cdots \times \Delta_{nk_n}; \Delta_{jk_j} \in \mathcal{P}_j, \Delta \subseteq \bar{I}\}$$

definisce una partizione di  $I$  tale che

$$I = \cup_{\Delta \in \mathcal{P}} \Delta$$

é unione quasi disgiunta.

Si consideri la partizione  $\mathcal{P}$  di un intervallo chiuso  $I$ .

Per ogni  $\Delta$  della partizione si possono definire due quantità:

$$\inf_{x \in \Delta} f(x), \quad \sup_{x \in \Delta} f(x).$$

Si definisce somma integrale inferiore relativa alla partizione  $\mathcal{P}$  come segue:

$$s(\mathcal{P}, f) = s(\mathcal{P}) = \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} \left( \inf_{x \in \Delta} f(x) \right) m(\Delta).$$

Analogamente, si definisce somma integrale superiore relativa alla partizione  $\mathcal{P}$  come segue:

$$S(\mathcal{P}, f) = S(\mathcal{P}) = \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} \left( \sup_{x \in \Delta} f(x) \right) m(\Delta)$$

Si ponga:

$$C_0 \leq f(x) \leq C_1 \quad \forall x \in I$$

si dimostra che per ogni coppia di partizioni  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  di  $I$  si ha.

**Lemma 23.1.1.**

$$C_0 m(I) \leq s(\mathcal{P}, f) \leq S(\mathcal{Q}, f) \leq C_1 m(I).$$

Per ogni possibile partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  si definiscono:

$$\delta = \{s(\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ é partizione dell'intervallo } I\},$$

$$\Sigma = \{S(\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ é partizione dell'intervallo } I\}.$$

Dal lemma precedente si può dedurre che gli insiemi  $\delta$  e  $\Sigma$  sono separati cioè:

$$s \leq S \quad \forall s \in \delta \quad \forall S \in \Sigma$$

L'assioma di completezza di  $\mathbb{R}$  afferma che allora esiste almeno un numero reale  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che:

$$s \leq \xi \leq S \quad \forall s \in \delta \quad \forall S \in \Sigma$$

Se vi è un unico elemento di separazione  $\xi$  tra  $\delta$  e  $\Sigma$  allora si dice che  $f(x)$  è integrabile in  $I$  secondo Riemann. L'elemento  $\xi$  si indica con:

$$\xi := \int_I f(x) dx$$

e si chiama integrale definito di  $f$  in  $I$ .

**Esempio 23.1.1.** *Sia*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = (x_1, x_2) \text{ } x_1, x_2 \text{ sono razionali;} \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (23.1.1)$$

*Si può vedere che la funzione non è integrabile in senso di Riemann in  $[0, 1] \times [0, 1]$ .*

**Lemma 23.1.2.** *L'integrale di Riemann di  $f$  nell'intervallo chiuso e limitato  $I$  esiste se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  tale che*

$$|S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P})| < \varepsilon.$$

Se la funzione  $f(x)$  è integrabile in  $I$ , e la partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  è tale che ogni  $\Delta \in \mathcal{P}$  è del tipo

$$\left[ \alpha_1, \alpha_1 + \frac{b_1 - a_1}{N} \right] \times \cdots \times \left[ \alpha_n, \alpha_n + \frac{b_n - a_n}{N} \right],$$

con

$$\alpha_j = a_j + \frac{m(b_j - a_j)}{N}, m = 0, \dots, N - 1,$$

e

$$m(\Delta) = \frac{m(I)}{N^n}.$$

L'integrale è il limite per  $N$  che tende ad infinito della somma integrale:

$$\sigma_N = \frac{m(I)}{N^n} \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} f(t),$$

dove  $t \in \Delta$ . Si può verificare, che integrabilità in senso di Riemann implica che il limite è finito e non dipende dalla scelta dei punti  $t \in \Delta$ , si ha:

$$\int_I f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{m(I)}{N^n} \sum_{\Delta \in \mathcal{P}} f(t).$$



## 23.2 Proprietá dell'integrale di Riemann

- Linearitá.

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in un intervallo  $I$  e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$\int_I [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_I f(x) dx + \beta \int_I g(x) dx$$

- Additivitá.

Sia  $f$  continua e definita in un intervallo  $I$  e sia

$$I = \cup_k I_k$$

unione quasi disgiunta. Allora:

$$\int_I f(x) dx = \sum_k \int_{I_k} f(x) dx.$$

- Monotonia.

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in un intervallo  $I$  e  $f(x) \geq g(x)$ . Allora:

$$\int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$$

- Valore assoluto.

Sia  $f$  integrabile in un intervallo  $I$ , allora si ha:

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx$$

**Lemma 23.2.1.** *Sia  $I$  un intervallo chiuso e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  é integrabile in senso di Riemann.*

*Idea della dimostrazione.* Per il teorema di Cantor-Heine,  $f$  è uniformemente continua, essendo  $I$  un compatto ed è limitata per il teorema di Weierstrass. Fissato  $\varepsilon > 0$  esiste dunque  $\delta > 0$  tale che

$$\|x - y\| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Scegliamo ora una partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  in modo tale che

$$I = \cup_j I_j$$

e

$$x, y \in I_j \implies \|x - y\| \leq \delta.$$

Così possiamo scrivere

$$S(P) - s(P) = \sum_j \left( \sup_{I_j} f(x) - \inf_{I_j} f(x) \right) m(I_j) \leq \sum_j \varepsilon m(I_j) = \varepsilon m(I).$$

Il criterio della integrabilità in senso di Riemann (Lemma 23.1.2) implica che  $f$  è integrabile in senso di Riemann.

□

### 23.3 Il grafico delle funzioni integrabili ha misura zero

**Lemma 23.3.1.** *Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}^n$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , limitata, integrabile in senso di Riemann. Allora il suo grafico*

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)); x \in I\}$$

*ha misura nulla in  $\mathbb{R}^{1+n}$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $\varepsilon > 0$  e

$$\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_N\}$$

una partizione di  $I$  tale che

$$S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) < \varepsilon.$$

Consideriamo intervalli  $J_k \subset \mathbb{R}^{n+1}$  definiti come segue

$$J_k = I_k \times [m_k, M_k]$$

dove,

$$m_k = \inf_{I_k} f(x), \quad M_k = \sup_{I_k} f(x).$$

Allora

$$\Gamma(f) \subset \cup_k J_k$$

e

$$\sum_k m(J_k) = S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) < \varepsilon.$$

Ciò implica che il grafico di  $f$  ha misura nulla.  $\square$

## 23.4 Misurabilità di insiemi normali

Si può vedere che il grafico di una funzione  $f$  continua su un compatto misurabile  $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$  è

$$\Gamma(f) = \{(x', x_n); x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K; x_n = f(x')\}$$

ed il grafico ha misura nulla in  $\mathbb{R}^n$ .

Questa osservazione ci porta alla seguente conclusione.

**Lemma 23.4.1.** *Sia  $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$  un compatto misurabile. Se*

$$f_1 : K \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow R,$$

$$f_2 : K \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow R$$

*sono due funzioni continue, tali che*

$$f_1(x') < f_2(x'), \quad \forall x' \in K,$$

*allora risulta misurabile insieme del tipo seguente:*

$$\Omega = \{(x', x_n); x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K; f_1(x') < x_n < f_2(x')\} \quad (23.4.2)$$

Dominio definito da (23.7.17) si chiama semplice (o normale).

## 23.5 Integrazione su insiemi misurabili in senso di Peano - Jordan

Sia  $K$  un compatto in  $\mathbb{R}^n$  misurabile secondo Peano - Jordan e sia

$$f : K \implies \mathbb{R}$$

una funzione limitata. Per utilizzare la definizione di integrale di Riemann su intervalli in  $\mathbb{R}^n$ , racchiudiamo  $K$  in un intervallo  $I$  e definiamo una estensione (prolungamento)  $F$  di  $f$  nel modo che segue:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in K; \\ 0, & \text{se } x \in I \setminus K. \end{cases} \quad (23.5.3)$$

**Definizione 23.5.1.** Diciamo che  $f$  é integrabile in  $K$  (secondo Riemann) se  $F$  é integrabile in  $I$  e poniamo

$$\int_K f(x) dx = \int_I F(x) dx.$$

### 23.5.1 Proprietá dell'integrale di Riemann su insiemi misurabili

- Linearitá.

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in un insieme misurabile  $K$  e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$\int_K [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_K f(x) dx + \beta \int_K g(x) dx$$

- Additivitá.

Sia  $f$  continua e definita in insieme misurabile  $K$  e sia

$$K = \cup_k K_k$$

unione quasi disgiunta degli insiemi misurabili. Allora:

$$\int_K f(x) dx = \sum_k \int_{K_k} f(x) dx.$$

- Monotonia.

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue definite in insieme misurabile  $K$  e  $f(x) \geq g(x)$ . Allora:

$$\int_K f(x) dx \geq \int_K g(x) dx$$

- Valore assoluto.

Sia  $f$  integrabile in insieme misurabile  $K$ , allora si ha:

$$\left| \int_K f(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| dx$$

Ricordando la Definizione della misurabilita ed il criterio di misurabilita del Lemma 22.5.1, otteniamo subito il seguente criterio di integrabilita.

**Lemma 23.5.1.** (*Criterio di integrabilita*) Sia  $K$  un insieme misurabile in  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  e integrabile in senso di Riemann se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un plurintervallo  $\mathcal{P} = P_\varepsilon \subseteq K$  tale che

$$\int_K f(x) dx = \int_{\mathcal{P}_\varepsilon} f(x) dx + R(\varepsilon),$$

dove

$$|R(\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Usando il fatto che funzioni continui su un plurintervallo  $\mathcal{P}$  sono integrabili in senso di Riemann (Lemma 23.2.1 ) ed il criterio di integrabilita (Lemma 23.5.1) otteniamo

**Lemma 23.5.2.** Sia  $K$  un insieme misurabile e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  e integrabile in senso di Riemann.

### Integrale di Riemann e la misura di Peano – Jordan

Dato un compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  possiamo definire la funzione indicatrice. La funzione indicatrice é una funzione

$$\mathbf{1}_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

definita come

$$\mathbf{1}_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

La funzione indicatrice di  $K$  é talvolta indicata con

$$\chi_A(x) \quad \text{o} \quad I_A(x).$$

**Lemma 23.5.3.** *Un compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  ha misura (secondo Peano-Jordan) zero se e solo se  $\mathbf{1}_K(x)$  é integrabile in senso di Riemann e*

$$\int_K \mathbf{1}_K(x) dx = 0. \tag{23.5.4}$$

**Dimostrazione.** Supponiamo (23.5.4) e' vera.

Fissando  $\varepsilon > 0$  é possibile trovare una partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  tale che

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) < \varepsilon.$$

Se

$$I = \cup_j I_j$$

allora consideriamo

$$J_* = \{j : I_j \cap K \neq \emptyset\}$$

L'unione

$$\cap_{j \in J_*} I_j$$

e' quasi disgiunta e contenente  $K$  Abbiamo

$$\sum_{j \in J_*} m(I_j) = S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) < \varepsilon.$$

Questo significa  $m(K) = 0$ .

Viceversa, siano

$$J_1, J_2, \dots, J_N$$

intervalli con unione

$$\bigcap_{j=1}^N J_j$$

quasi disgiunta, contenente  $K$  é tale che

$$\sum_j m(J_j) < \varepsilon.$$

Sia  $I$  un intervallo che contiene tutti i  $J_j$ . Sia inoltre  $\mathcal{P}$  una partizione di  $I$  tale che fra tutti intervalli in cui  $I$  é suddiviso vi siano anche i  $J_1, \dots, J_N$ . Allora:

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) = \sum_j m(J_j) < \varepsilon.$$

che implica (23.5.4). □

**Lemma 23.5.4.** *Un compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$ , é misurabile (secondo Peano-Jordan) se e solo se  $\mathbf{1}_K(x)$  é integrabile in senso di Riemann.*

**Dimostrazione.** Supponiamo  $K \subset \mathbb{R}^n$ , é misurabile (secondo Peano-Jordan). Sia  $I \supset K$  un intervallo e sia  $\varepsilon > 0$ . Usando la caratterizzazione degli insiemi misurabili (in senso di Peano - Jordan) (Lemma 22.5.1), troviamo plurintervalli  $P_1, P_2$  tali che

$$P_1 \subseteq A \subseteq P_2$$

e

$$0 \leq m(P_2) - m(P_1) \leq \varepsilon. \quad (23.5.5)$$

Senza perdita di generalitá possiamo trovare una partizione

$$\mathcal{P} = I_1, \dots, I_N$$

dell'intervallo  $I$  e due sottoinsiemi

$$\alpha \subset \beta \subset \{1, 2, \dots, N\}$$

tale che

$$j \in \alpha \iff I_j \cap P_1 \neq \emptyset, \quad j \in \beta \iff I_j \cap P_2 \neq \emptyset$$

e

$$P_1 = \cup_{j \in \alpha} I_j, \quad P_2 = \cup_{j \in \beta} I_j$$

dove abbiamo due unioni quasi disgiunta.

Allora:

$$m(P_1) = \sum_{j \in \alpha} m(I_j), \quad m(P_2) = \sum_{j \in \beta} m(I_j)$$

e (23.5.5) implica

$$m(P_2) - m(P_1) = \sum_{j \in \beta \setminus \alpha} m(I_j) \leq \varepsilon. \quad (23.5.6)$$

Abbiamo inoltre

$$s(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) = \sum_{j \in \beta} \left( \inf_{I_j} \mathbf{1}_K(x) \right) m(I_j) \geq \sum_{j \in \alpha} m(I_j).$$

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) = \sum_{j \in \beta} \left( \sup_{I_j} \mathbf{1}_K(x) \right) m(I_j) \leq \sum_{j \in \beta} m(I_j)$$

che implica

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) - s(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) \leq \sum_{j \in \beta} m(I_j) - \sum_{j \in \alpha} m(I_j) = \sum_{j \in \beta \setminus \alpha} m(I_j) \leq \varepsilon.$$

Il criterio di integrabilit  in senso di Riemann (Lemma 23.1.2) implica  $\mathbf{1}_K(x)$    integrabile in senso di Riemann e

$$m(K) = \int_I \mathbf{1}_K(x) dx. \quad (23.5.7)$$

Viceversa, supponiamo che  $\mathbf{1}_K(x)$    integrabile in senso di Riemann. Sia  $\varepsilon > 0$ . Il criterio di integrabilit  in senso di Riemann (Lemma 23.1.2) ci permette di trovare una partizione  $\mathcal{P}$  di  $I$  tale che

$$S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) - s(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K) < \varepsilon. \quad (23.5.8)$$



La partizione  $\mathcal{P}$  dell'intervallo  $I$

$$\mathcal{P} = I_1, \dots, I_N$$

ci da l'unione

$$I = \cup_{j=1}^N I_j$$

quasi disgiunta. Senza perdita di generalità possiamo supporre che esiste almeno un  $j = 1, \dots, N$  tale che  $I_j \subset K$ . Sia

$$\alpha = \{j \in \{1, \dots, N\}; I_j \subseteq K\}$$

$$\beta = \{j \in \{1, \dots, N\}; I_j \cap K \neq \emptyset\}.$$

Consideriamo i plutintervalli definiti come

$$P_1 = \cup_{j \in \alpha} I_j, \quad P_2 = \cup_{j \in \beta} I_j.$$

Abbiamo le relazioni

$$P_1 \subset K \subset P_2,$$

$$m(P_1) = \sum_{j \in \alpha} m(I_j) \geq \sum_{j \in \alpha} \left( \inf_{I_j} \mathbf{1}_K(x) \right) m(I_j) = s(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K)$$

$$m(P_2) = \sum_{j \in \beta} m(I_j) \leq \sum_{j \in \alpha} \left( \sup_{I_j} \mathbf{1}_K(x) \right) m(I_j) = S(\mathcal{P}, \mathbf{1}_K)$$

e la disequazione (23.5.8) implica

$$0 \leq m(P_2) - m(P_1) \leq \varepsilon.$$

La caratterizzazione degli insiemi misurabili (in senso di Peano - Jordan) (Lemma 22.5.1) implica  $K$  é misurabile.  $\square$

## 23.6 Funzioni semplici e loro integrale di Riemann

L'identità (23.5.7) usata nella dipestrazione del Lemma 23.5.4 permette di ottenere

**Lemma 23.6.1.** *Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é un compatto misurabile (secondo Peano-Jordan), allora  $\mathbf{1}_K(x)$  é integrabile in senso di Riemann e vale l'identitá*

$$m(K) = \int_I \mathbf{1}_K(x) dx. \quad (23.6.9)$$

**Definizione 23.6.1.** *Una funzione semplice  $s$  é una funzione definita in un insieme  $A$  limitato e misurabile in senso di Peano - Jordan, tale che l'immagine  $s(A)$  della funzione é un insieme finito*

$$s(A) = \{c_1, \dots, c_M; c_j \neq c_k, 1 \leq j \neq k \leq M\}$$

*ed ogni insieme di livello*

$$A_j = \{x \in A; s(x) = c_j\}$$

*é mesurabile (secondo Peano - Jordan)*

Ovviamente abbiamo la relazione

$$s(x) = \sum_{i=1}^M c_i \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

dove  $\mathbf{1}_{A_i}(x)$  é la funzione indicatrice relativa all'insieme  $A_i$  per ogni  $i$  e' l'unione

$$A = \cup_i A_j$$

é disgiunta.

Applicando Lemma 23.6.1 otteniamo

**Lemma 23.6.2.** *Se  $A$  é un insieme limitato e misurabile in senso di Peano - Jordan e*

$$s : A \longrightarrow \{c_1, \dots, c_M; c_j \neq c_k, 1 \leq j \neq k \leq M\}$$

*é una funzione semplice, allora*

$$\int_A s(x) dx = \sum_{j=1}^M c_j m(A_j), \quad (23.6.10)$$

dove

$$A_j = \{x \in A; s(x) = c_j\}.$$

**Problema 23.6.1.** (*difficoltà elevata*) *Costruire una successione di funzioni semplici*

$$s_k(x) : [0, 1] \times [0, 1] \in \mathbb{R}$$

*tale che:*

a) *per ogni*  $x = (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$  *esiste il limite*

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x);$$

b) *la funzione*  $f(x)$  *soddisfa la disequazione*

$$0 \leq f(x) \leq 1;$$

c) *la successione*

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} s_k(x) dx$$

*è successione di Cauchy (in  $\mathbb{R}$ );*

d)  $f(x)$  *non è integrabile in senso di Peano - Jordan.*

## 23.7 Formula di riduzione

**Osservazione 23.7.1.** *Sia*  $I \subset \mathbb{R}, J \subset \mathbb{R}$  *due intervalli chiusi. Se*

$$f(x, y) : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

*è una funzione integrabile in senso di Riemann, allora NON è vero in generale che per ogni*  $y \in J$  *la funzione*

$$x \in I \longrightarrow f(x, y)$$

*è integrabile in senso di Riemann. Più precisamente sia*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{per } y = 1/3, x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (23.7.11)$$

**Lemma 23.7.1.** (Teorema di Fubini - Tonelli per integrale di Riemann) Sia  $I \subset \mathbb{R}^n, J \subset \mathbb{R}^m$  due intervalli chiusi. Se

$$f(x, y) : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$$

é una funzione integrabile in senso di Riemann e se la funzione

$$y \in J \longrightarrow g(y) = \int_I f(x, y) dx$$

esiste ed é integrabile in senso di Riemann su  $J$ , allora vale la formula

$$\int_{I \times J} f(x, y) dx dy = \int_J g(y) dy = \int_J \left( \int_I f(x, y) dx \right) dy. \quad (23.7.12)$$

**Dimostrazione.** Possiamo usare il criterio di integrabilitá in senso di Riemann (Lemma 23.1.2) e per ogni  $\varepsilon > 0$  troviamo una partizione  $\mathcal{P}$  del intervallo  $I \times J$  tale che

$$\iint_{I \times J} f(x, y) dx dy - \varepsilon < s(\mathcal{P}) < S(\mathcal{P}) \leq \iint_{I \times J} f(x, y) dx dy + \varepsilon. \quad (23.7.13)$$

Possiamo supporre

$$\mathcal{P} = \{I_j \times J_k, j = 1, \dots, N, k = 1, \dots, M\}$$

e

$$I = \cup_j \cup_k I_j \times J_k$$

unione quasi disgiunta. Per ogni  $k$  fissato e ogni  $y \in J_k$  abbiamo

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I_j} f(x, y) &\leq \sup_{(x, y) \in I_j \times J_k} f(x, y) \\ g(y) &\leq \sum_j \sup_{(x, y) \in I_j \times J_k} f(x, y) m(I_j), \end{aligned} \quad (23.7.14)$$

e

$$\begin{aligned} \inf_{x \in I_j} f(x, y) &\geq \inf_{(x, y) \in I_j \times J_k} f(x, y), \\ g(y) &\geq \sum_j \inf_{(x, y) \in I_j \times J_k} f(x, y) m(I_j). \end{aligned} \quad (23.7.15)$$

Le disequazioni (23.7.14) implicano

$$\sum_{k=1}^N \sup_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \sum_{jk} \left( \sup_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y) \right) m(I_j) m(J_k) = S(P).$$

e

$$\sum_{k=1}^N \inf_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \geq \sum_{jk} \left( \inf_{(x,y) \in I_j \times J_k} f(x,y) \right) m(I_j) m(J_k) = s(P)$$

quindi (23.7.13) ci da

$$\begin{aligned} \iint_{I \times J} f(x,y) dx dy - \varepsilon &< s(\mathcal{P}) \leq \sum_{k=1}^N \inf_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \sum_{k=1}^N \inf_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \sum_{k=1}^N \sup_{y \in J_k} g(y) m(J_k) \leq \iint_{I \times J} f(x,y) dx dy + \varepsilon. \end{aligned} \quad (23.7.16)$$

Da conseguenza, otteniamo

$$\iint_{I \times J} f(x,y) dx dy - \varepsilon \leq \int_J g(y) dy \leq \iint_{I \times J} f(x,y) dx dy + \varepsilon$$

che implica (23.7.12).  $\square$

Possiamo applicare la formula di riduzione per insiemi semplici o normali costruiti in Lemma 23.4.1.

**Lemma 23.7.2.** *Sia  $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$  un compatto misurabile. Se*

$$\varphi_1 : K \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi_2 : K \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

*sono due funzioni continue, tali che*

$$\varphi_1(x') < \varphi_2(x'), \quad \forall x' \in K.$$

*Per ogni funzione definita e continua nel dominio normale*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

dove

$$\Omega = \{(x', x_n); x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in K; f_1(x') < x_n < f_2(x')\} \quad (23.7.17)$$

abbiamo l'identità

$$\iint_{\Omega} f(x) dx = \int_K \left( \int_{\varphi_1(x')}^{\varphi_2(x')} f(x', x_n) dx_n \right) dx'. \quad (23.7.18)$$

**Dimostrazione.** Sia  $I_0$  un intervallo che copre  $K$  e  $J_0 = [a, b]$  un intervallo tale che

$$\Omega \subset I_0 \times J_0.$$

Ponendo

$$F(x', x_n) = \begin{cases} f(x', x_n), & \text{se } (x', x_n) \in \Omega; \\ 0, & \text{altimenti.} \end{cases}$$

abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned} \iint_{I_0 \times J_0} F(x) dx &= \iint_{\Omega} f(x) dx \\ g(x') &= \int_a^b F(x', x_n) dx_n = \int_{\varphi_1(x')}^{\varphi_2(x')} f(x', x_n) dx_n, \end{aligned}$$

se  $x' \in K$  e

$$g(x') = \int_a^b F(x', x_n) dx_n = 0,$$

se  $x' \notin K$ . Applicando il teorema di Fubini Tonelli (Lemma 23.7.1) otteniamo (23.7.18). □

**Problema 23.7.1.** Sia

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $a_{11} > 0$ . Trovare

$$\int_{A(I)} dx = m(A(I)).$$

**Idea della soluzione.** Abbiamo

$$I = \{x; a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

$$A(I) = \{y; y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, y_2 = x_2, x \in I\} =$$

$$= \{y; y_1 - a_{12}y_2 \in [a_{11}a_1, a_{11}b_1], y_2 = x_2 \in [a_2, b_2]\}.$$

La formula di riduzione implica

$$\int_{A(I)} dx = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_{12}y_2 + a_{11}a_1}^{a_{12}y_2 + a_{11}b_1} dy_1 \right) dy_2$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} a_{11}(b_1 - a_1) dy_2 = a_{11}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \det A m(I).$$

□

**Problema 23.7.2.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Trovare due matrici trinagolari

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix},$$

tale che

$$A = BD.$$

**Problema 23.7.3.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$ . Trovare due matrici trinagolari  $B, D$  tali che

$$A = BD.$$

**Problema 23.7.4** (Teorema di Fubini, difficoltà elevata). Sia  $I \subset \mathbb{R}^n, J \subset \mathbb{R}^m$  due intervalli chiusi e limitati. Se

$$A \subset I \times J$$

ha misura di Peano - Jordan zero, verificare che esiste un insieme  $A_1 \subset I$  tale che l'insieme  $A_1$  ha misura di Peano - Jordan zero e per ogni  $x \in I \setminus A_1$ , l'insieme

$$A_x = \{y \in J; (x, y) \in A\}$$

ha misura di Peano - Jordan zero.





# Chapter 24

## Cambiamento di variabili

### 24.1 Trasformata lineare di intervalli e loro misura di Peano - Jordan

Sia

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

una trasformata lineare tale che

$$\det A > 0. \tag{24.1.1}$$

**Lemma 24.1.1.** *Se  $I$  é un intervallo in  $\mathbb{R}^n$  allora*

$$A(I)$$

*é misurabile e vale la formula*

$$m(A(I)) = \det A \, m(I). \tag{24.1.2}$$

**Dimostrazione.** L'insieme  $A(I)$  é misurabile secondo Lemma 22.5.5. Per calcolare la sua misura scegliamo una base canonica

$$e_1, \dots, e_n$$

in  $\mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $I$  é l'intervallo

$$[0, 1] \times \dots \times [0, 1].$$

Proviamo a verificare (24.1.2) nel caso particolare

$$A_1 e_1 = \lambda_1 e_1, \lambda_1 \neq 0.$$

$$f_2 = A_1 e_2 = e_2 + \lambda_2 e_1,$$

.....

$$f_n = A_1 e_n = e_n + \lambda_n e_1.$$

Piu' precisamente siccome  $I$  ha misura 1, dobbiamo verificare che

$$m(A(I)) = \det A.$$

Possiamo parametrizzare  $A(I)$  usando i vettori  $f_1, \dots, f_n$ :

$$A(I) = \{y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n; 0 \leq y_j \leq 1, j = 1, \dots, n\}$$

Usando l'identitá

$$y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

troviamo

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n \quad (24.1.3)$$

Abbiamo la rappresentazione

$$A(I) = \{(x_1, x'); x' \in I', x_1 \in [\langle \lambda', x' \rangle, \lambda_1 + \langle \lambda', x' \rangle]\}$$

dove

$$\lambda' = (\lambda_2, \dots, \lambda_n), x' = (x_2, \dots, x_n),$$

e

$$I' = \{x', 0 \leq x_j \leq 1, j = 2, \dots, n\}.$$

Usando la formula di riduzione otteniamo

$$m(A(I)) = \int_{I'} \left( \int_{\langle \lambda', x' \rangle}^{\lambda_1 + \langle \lambda', x' \rangle} dx_1 \right) dx' = \lambda_1 \int_{I'} dx' = \lambda_1 = \det A.$$

Per verificare la formula (24.1.2) dobbiamo considerare una trasformazione lineare

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\quad \dots\dots\dots \dots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{24.1.4}$$

che trasforma l'intervallo

$$I = \{y \in \mathbb{R}^n; 0 \leq y_j \leq 1\}$$

in  $A(I)$ . Ogni trasformazione generica (24.1.4) può essere presentata come composizione di trasformazioni elementari del tipo (24.1.3) e trasposizioni dei indici. Per finire la dimostrazione osserviamo che se per  $A, B$  vale (24.1.2), allora la stessa relazione (24.1.2) vale per il prodotto  $AB$ .  $\square$

Sia

$$f_j = Ae_j \tag{24.1.5}$$

La matrice  $A$  è completamente definita dai vettori

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

In questo senso abbiamo la funzione

$$V : (f_1, f_2, \dots, f_n) \longrightarrow V(f_1, \dots, f_n) = m(A(I)) = \det Am(I).$$

Possiamo chiamare  $V(f_1, \dots, f_n)$  volume orientato (può avere segno  $\pm$ ).

### 24.1.1 L'immagine $C^1$ di un intervallo (piccolo) e calcolo della sua misura.

Sia  $U$  un intorno dell'origine dove è definita una funzione

$$T : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{24.1.6}$$

tale che

$$T \in C^1(U; V) \quad (24.1.7)$$

e

$$|\det J(x)| \neq 0, \quad \forall x \in U. \quad (24.1.8)$$

dove

$$J(x) = T'(x).$$

In questa sezione vogliamo esaminare il comportamento misura rispetto alla trasformazione di un intervallo

$$I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_\infty \leq \varepsilon\} \subset U \quad (24.1.9)$$

tramite l'applicazione  $T$ . La prima osservazione é che  $T(I_\varepsilon)$  é misurabile in senso di Peano - Jordan, perche la sua frontiera e

$$\partial T(I_\varepsilon) = T(\partial I_\varepsilon)$$

ha misura zero come afferma Lemma 23.3.1.

Abbiamo il seguente risultato importante.

**Lemma 24.1.2.** *Se la funzione  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa (24.1.8), allora per  $\varepsilon > 0$  piccolo abbiamo la relazione*

$$m(T(I_\varepsilon)) = \int_{T(I_\varepsilon)} d\tilde{x} = \int_{I_\varepsilon} |\det J(x)| dx, \quad (24.1.10)$$

dove

$$J(x) = T'(x).$$

**Dimostrazione.** Prima consideriamo una caso particolare di  $T$  tale che  $T$  é definita in  $U$  come segue

$$y = T(x) \iff y_1 = \chi(x), y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n. \quad (24.1.11)$$

Possiamo parametrizzare  $T(I_\varepsilon)$  supponendo che

$$T(I_\varepsilon) = \{y_1 = \chi(x), y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n, \|x\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

L'ipotesi

$$\det J(0) = \partial_{x_1} \chi(0) \neq 0,$$

significa che abbiamo due possibilità

$$\partial_{x_1}\chi(0) > 0 \quad (24.1.12)$$

$$\partial_{x_1}\chi(0) < 0. \quad (24.1.13)$$

Possiamo assumere (24.1.13) perché l'altro caso è simile. Rescrivendo la parametrizzazione nella forma

$$y_1 = \chi(x_1, x'), y' = x',$$

dove

$$x' = (x_2, \dots, x_n), y' = (y_2, \dots, y_n),$$

si vede che  $\chi(x_1, x')$  è decrescente e  $T(I_\varepsilon)$  diventa un dominio normale

$$T(I_\varepsilon) = \{(y_1, x'); \chi(\varepsilon, x') \leq y_1 \leq \chi(-\varepsilon, x'), \|x'\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

o

$$T(I_\varepsilon) = \{(y_1, x'); \chi(\varepsilon, x') \leq y_1 \leq \chi(-\varepsilon, x'), x' \in I'_\varepsilon\}$$

dove

$$I'_\varepsilon = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; \|x'\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Applicando la formula di riduzione abbiamo

$$\begin{aligned} m(A(I_\varepsilon)) &= \int_{I'_\varepsilon} \left( \int_{\chi(\varepsilon, x')}^{\chi(-\varepsilon, x')} dy_1 \right) dx' = \\ &= \int_{I'_\varepsilon} \left( \int_\varepsilon^{-\varepsilon} \partial_{x_1}\chi(x_1, x') dx_1 \right) dx' = - \int_{I_\varepsilon} \partial_{x_1}\chi(x) dx = \int_{I_\varepsilon} |\det J(x)| dx. \end{aligned}$$

Così siamo arrivati alla relazione (24.2.21) nel caso quando  $T$  ha la forma (24.1.11). Per verificare la formula (24.2.21) dobbiamo considerare una trasformazione generale

$$y = T(x) \quad (24.1.14)$$

che trasforma l'intervallo

$$I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

in  $T(I)$  Ogni trasformazione generica (24.1.14) puo essere presentata come composizione di trasformazioni elementari del tipo (24.1.11) e trasposizioni dei indici. Per finire la dimostrazione osserviamo che se per  $T, S$  vale (24.2.21), allora la stessa relazione (24.2.21) vale per la composizione  $TS$ .  $\square$

Usando il fatto che ogni traslazione non cambia la misura di intervalli e seguendo la dimostrazione del Lemma 24.1.2 otteniamo

**Lemma 24.1.3.** *Se la funzione  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa (24.1.8), allora per ogni  $x^* \in U$  esiste  $\varepsilon > 0$  piccolo tale che per ogni intervallo  $\Delta$  tale che*

$$\Delta \subseteq \{x \in U; \|x - x^*\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

abbiamo la relazione

$$m(T(\Delta)) = \int_{T(\Delta)} d\tilde{x} = \int_{\Delta} |\det J(x)| dx, \quad (24.1.15)$$

dove

$$J(x) = T'(x).$$

Per ogni intervallo  $I \subset \mathbb{R}^n$  possiamo trovare partizione

$$P = \{\Delta_j, j = 1, \dots, N\}$$

tale che ogni  $\Delta_j$  della partizione abbiamo

$$\Delta_j \subseteq \{x \in I; \|x - x_j\| \leq \varepsilon\}$$

Usando il fatto che

$$\mathbf{1}_I = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\Delta_j}$$

otteniamo

$$\int_I |\det J(x)| dx = \sum_{j=1}^N \int_I \mathbf{1}_{\Delta_j} |\det J(x)| dx =$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{\Delta_j} |\det J(x)| dx.$$

Applicando Lemma 24.1.3 otteniamo

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Delta_j} |\det J(x)| dx = \sum_{j=1}^N m(T(\Delta_j)) = m(T(I)).$$

In questo modo otteniamo il seguente.

**Lemma 24.1.4.** *Se la funzione  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa (24.1.8), allora per ogni intervallo chiuso  $I \subset U$  abbiamo*

$$m(T(I)) = \int_{T(I)} d\tilde{x} = \int_I |\det J(x)| dx, \quad (24.1.16)$$

dove

$$J(x) = T'(x).$$

Questa proprietà si può estendere sui domini misurabili.

**Lemma 24.1.5.** *(Trasformazione di un insieme misurabile) Se la funzione  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa (24.1.8), allora per ogni insieme misurabile  $K \subset U$  abbiamo*

$$m(T(K)) = \int_{T(K)} d\tilde{x} = \int_K |\det J(x)| dx, \quad (24.1.17)$$

dove

$$J(x) = T'(x).$$

## 24.2 Formula di cambiamento di variabili

In questa sezione vogliamo esaminare il comportamento dell'integrale rispetto ai cambiamenti di variabili in un insieme  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto e limitato. Abbiamo quindi una funzione

$$T : U \longrightarrow V \quad (24.2.18)$$



che e'

$$T \in C^1(U; V) \quad (24.2.19)$$

e (24.1.8).

Questa condizione implica che per ogni compatto  $K \subset U$  esistono due costanti  $C_1 < C_2$  positive tali che la matrice Jacobiana

$$J(x) = T'(x)$$

soddisfa le stime

$$C_1 < |\det J(x)| \leq C_2, \forall x \in K \quad (24.2.20)$$

e

$$T : K \longrightarrow T(K) = \tilde{K}$$

una funzione invertibile tale che la funzione inversa

$$T^{-1} : \tilde{K} \longrightarrow K$$

é nel classe  $C^1(\tilde{K}; K)$ .

Il teorema di cambiamento di variabili

**Teorema 24.2.1.** *Sia  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  aperti limitati e  $T \in C^1(U; V)$  una applicazione che soddisfa (24.1.8). Sia  $K \subset U$  un compatto. Allora:*

- a)  *$K$  é misurabile se e solo se  $\tilde{K} = T(K)$  é misurabile:*
- b) *Se  $K$  é misurabile e  $f : \tilde{K} \longrightarrow \mathbb{R}$  é integrabile (in senso di Riemann), allora la funzione composta  $f(T(x))$  é integrabile in  $K$ ;*
- c) *Se  $K$  é misurabile e  $f : \tilde{K} \longrightarrow \mathbb{R}$  é integrabile (in senso di Riemann), allora vale la formula*

$$\int_{\tilde{K}} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_K f(T(x)) |\det J(x)| dx, \quad (24.2.21)$$

dove

$$J(x) = T'(x).$$

*Dimostrazione per semplicità in  $\mathbb{R}^2$ .* Prima consideriamo il caso  $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq 0$ . Possiamo usare la relazione

$$\int_{\tilde{K}} f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 = m(\tilde{L}),$$

dove  $\tilde{L}$  è il dominio normale definito dal

$$\tilde{L} = \left\{ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) : 0 \leq \tilde{x}_3 \leq f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \tilde{K} \right\}.$$

Ovviamente

$$m(\tilde{L}) = \int_{\tilde{L}} d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 d\tilde{x}_3$$

così applicando la formula di trasformazione di un insieme misurabile (vedi Lemma 24.1.5) troviamo

$$m(\tilde{L}) = \int_L \left| \det \left( \frac{D\tilde{T}}{D(x_1 x_2 x_3)} \right) \right| dx_1 dx_2 dx_3,$$

dove

$$\tilde{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x_1, x_2) \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e

$$L = \tilde{T}^{-1}(\tilde{L}) \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_3 \leq f(T(x_1, x_2)), (x_1, x_2) \in K \right\}.$$

Usando la relazione

$$\det \left( \frac{D\tilde{T}}{D(x_1 x_2 x_3)} \right) = \det J(x_1, x_2)$$

e la formula di riduzione, troviamo

$$\int_L \left| \det \left( \frac{D\tilde{T}}{D(x_1 x_2 x_3)} \right) \right| dx_1 dx_2 dx_3 = \int_K f(T(x_1, x_2)) |\det J(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$$

e quindi (24.2.21) è dimostrata quando  $f(x_1, x_2) \geq 0$ .

Il caso generico si dimostra utilizzando la rappresentazione

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad f_+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}.$$

Dobbiamo verificare che  $|f|$  é integrabile. Usando il criterio di integrabilit  (in senso di Riemann) si puo verificare che integrabilit  di  $f$  implica integrabilit  di  $|f|$ . Pi  precisamente l'insieme

$$\{x; f \text{ NON } \acute{\text{e}} \text{ continua in } x\}$$

contiene l'insieme

$$\{x; |f| \text{ NON } \acute{\text{e}} \text{ continua in } x\}.$$

□

### 24.3 Coordinate polari in $\mathbb{R}^n$

Possiamo definire un sistema di coordinate in uno spazio euclideo  $n$ -dimensionale analogo al sistema delle coordinate sferiche definito per lo spazio euclideo 3-dimensionale, nel quale le coordinate consistono in una coordinata radiale  $r$ , ed  $n - 1$  coordinate angolari

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}.$$

Se  $x_i$  sono le coordinate cartesiane, allora possiamo definire

$$x_1 = r \cos(\theta_1)$$

$$x_2 = r \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)$$

$$x_3 = r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3)$$

.....

$$x_{n-1} = r \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1})$$

$$x_n = r \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1})$$

Si noti che l'ultimo angolo  $\theta_{n-1}$  varia in un intervallo di  $2\pi$  mentre gli altri angoli variano di  $\pi$ . La sfera

$$\mathbf{S}^{n-1} = \{\omega \in \mathbb{R}^n, \|\omega\|_2 = 1\} \quad (24.3.22)$$

può essere parametrizzata come segue

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1)\omega' \end{pmatrix}, \quad (24.3.23)$$

dove

$$\omega' = (\omega_2, \dots, \omega_n)^t \in \mathbf{S}^{n-2}$$

e  $\omega'(\theta_2, \dots, \theta_n)$  è definito come segue

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \cos(\theta_2) \\ \omega_3 &= \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_{n-1} &= \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1}) \\ \omega_n &= \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}). \end{aligned}$$

**Lemma 24.3.1.** (*Ortogonalità della base dei coordinati polari/sferiche*)  
Sia

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

e  $\omega(\theta)$  sono definiti in (24.3.23). I vettori

$$e_1 = \omega(\theta), \quad e_2 = r\partial_{\theta_1}\omega(\theta), \dots, \quad e_n = r\partial_{\theta_n}\omega(\theta) \quad (24.3.24)$$

sono ortogonali tra loro, cioè

$$j \neq k \implies \langle e_j, e_k \rangle = 0.$$

*Proof.* La relazione

$$\langle \omega(\theta), \partial_{\theta_j}\omega(\theta) \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (24.3.25)$$

e conseguenza della relazione

$$\langle \omega(\theta), \omega(\theta) \rangle = 1.$$

Per dimostrare

$$\forall k = 1, \dots, n-2 \implies \langle \partial_{\theta_k} \omega(\theta), \partial_{\theta_j} \omega(\theta) \rangle = 0, j = k+1, \dots, n-1, \quad (24.3.26)$$

é sufficiente a dimostrare (24.3.26) per  $k=1$  e poi applicare induzione in  $k$ . La relazione (24.3.23) dimostra che

$$\langle \partial_{\theta_1} \omega(\theta), \partial_{\theta_j} \omega(\theta) \rangle = 0, j = 2, \dots, n-1,$$

ed equivalente a

$$\langle \omega'(\theta'), \partial_{\theta_j} \omega'(\theta') \rangle = 0, j = 2, \dots, n, \quad (24.3.27)$$

dove

$$\theta' = (\theta_2, \dots, \theta_n)^t.$$

La relazione

$$\langle \omega'(\theta'), \omega'(\theta') \rangle = 1$$

implica (24.3.27). Cosí (24.3.26) é dimostrato. □

**Lemma 24.3.2.** *Sia*

$$e_1 = \omega(\theta), e_2 = r \partial_{\theta_1} \omega(\theta), \dots, e_n = r \partial_{\theta_n} \omega(\theta)$$

definiti in (24.3.24). Abbiamo la relazione

$$\det[e_1, \dots, e_n] = r^{n-1} V(\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (24.3.28)$$

dove

$$\begin{aligned} V(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \sqrt{\det H(\theta)}, \\ H(\theta) &= \{ \langle \partial_{\theta_k} \omega(\theta), \partial_{\theta_j} \omega(\theta) \rangle \}_{j,k=1}^n. \end{aligned} \quad (24.3.29)$$

**Lemma 24.3.3.** *Sia  $H(\theta)$  definita in (24.3.29). Abbiamo la relazione*

$$H(\theta) = \sin^2 \theta_1 H(\theta'), \quad (24.3.30)$$

dove

$$\theta' = (\theta_2, \dots, \theta_n)^t.$$

Cos'isi ottiene l'Jacobiano della trasformazione:

$$\begin{aligned} & \left| \det \frac{\partial(x_i)}{\partial(r, \theta_j)} \right| dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1} = \\ & = r^{n-1} \sin^{n-2}(\theta_1) \sin^{n-3}(\theta_2) \dots \sin(\theta_{n-2}) dr d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1} \end{aligned}$$

# Chapter 25

## Esercizi su integrali multipli

### 25.1 Definizione e volume del parallelepipedo

**Definizione 25.1.1.** *Un parallelepipedo in  $\mathbb{R}^3$  puo essere definito, usando i vettori, é possibile definire il parallelepipedo come l'insieme*

$$\{x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c} \mid 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1\}$$

*determinato da tre vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  linearmente indipendenti.*

I vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  coincidono con tre spigoli del parallelepipedo.

Il volume di un parallelepipedo é il prodotto dell'area di una qualsiasi delle sue 6 facce per la distanza  $h$  fra il piano contenente tale faccia e quello contenente la faccia opposta.

Quando il parallelepipedo é determinato da tre vettori:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \tag{25.1.1}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \tag{25.1.2}$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \tag{25.1.3}$$

il volume é il prodotto triplo

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

o equivalentemente, del determinante

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Nel caso particolare di un parallelepipedo rettangolo, il volume diventa quindi il prodotto aritmetico delle lunghezze dei tre lati.

**Problema 25.1.1.** *Sia  $P$  il parallelogramma stabilito dai vettori  $v = (v_1, v_2)$ ,  $w = (w_1, w_2)$ . Dimostrare che*

$$m(P) = \text{vol}(P) = |v_1 w_2 - v_2 w_1|.$$

**Lemma 25.1.1.** *Sia  $e_1, e_2, e_3$  una basa ortonormale in  $\mathbf{R}^3$  e  $A$  un operatore lineare in  $\mathbf{R}^3$ . Dimostrare che il volume del parallelepipedo determinato dai vettori*

$$f_1 = Ae_1, f_2 = Ae_2, f_3 = Ae_3$$

e

$$\sqrt{\det B}$$

dove  $B = (\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=1}^3$ .

*Idea della soluzione.* Se  $M$  é la matrice  $(3 \times 3)$  definita con

$$M = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

allora il volume del parallelepipedo definito con  $f_1, f_2, f_3$  é  $|\det M|$ . La matrice trasposta  $M^t$  é definita come segue

$$M^t = ( f_1^t \quad f_2^t \quad f_3^t )$$

Sappiamo che

$$\det M = \det M^t, \det M M^t = \det M \det M^t = (\det M)^2 \quad (25.1.4)$$

Usando la relazione

$$M M^t = (\langle f_i, f_j \rangle)_{i,j=1}^3 = B$$

concludiamo con

$$(\det M)^2 = \det B.$$

□

## 25.2 Esercizi su integrali doppi e tripli

**Problema 25.2.1.** Sia  $A, B$  due insiemi limitati in  $\mathbf{R}^n$  misurabili secondo Peano - Jordan e tale che

$$m(A - B) + m(B - A) \leq \delta.$$

Sia  $f(x), g(x)$  due funzione definiti e limitati in  $A, B$  risp. e tali che  $f, g$  sono integrabili secondo Riemann e

$$|f(x) - g(x)| \leq \delta$$

per  $x \in A \cap B$ . Dimostrare

$$\left| \int_A f(x) - \int_B g(x) \right| \leq C\delta$$

dove

$$C = m(A \cap B) + \sup |f(x)| + \sup |g(x)|.$$

**Problema 25.2.2.** Cambiare l'ordine della integrazione nell

$$\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx.$$

**Problema 25.2.3.** Calcolare

$$\int_{\Delta} \sqrt{x^2 - y^2} dx dy,$$

dove  $\Delta$  il triangolo  $ABC$  con  $A(0, 0), B(10, 1), C(1, 1)$ .

**Risposta.**

$$\frac{5\sqrt{99}}{3} + \frac{\log(10 + \sqrt{99})}{6}.$$

**Problema 25.2.4.** Calcolare

$$I = \iint_U (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy,$$

dove

$$U = \{(x, y), 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}.$$



*Idea della soluzione.* Usando coordinate polari

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

troviamo che  $U$  si trasforma in

$$V = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Così la formula

$$\iint_U f(x, y) dx dy = \iint_V f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

implica

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^{-1} r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta d\theta = 2.$$

□

**Problema 25.2.5.** *Calcolare l'area dell'ellisse*

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

**Problema 25.2.6.** *Trovare il volume dell'semiellissoide*

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z > 0.$$

*Idea della soluzione.* Il dominio è

$$U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq c\sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

La misura di  $U$  è

$$m(U) = \iiint_U dx dy dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \left( \int_0^{c\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dz \right) dx dy,$$

secondo la formula di riduzione. Così troviamo

$$m(U) = c \iint_{B_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy,$$

dove

$$B_1 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Introducendo coordinate polari

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

si vede che  $B_1$  si trasforma in

$$\widetilde{B}_1 = \{(r, \theta); 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}.$$

Abbiamo la formula di cambiamento di variabili

$$\iint_{B_1} f(x, y) dx dy = \iint_{\widetilde{B}_1} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

e la formula di riduzione ci da

$$c \iint_{B_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = c \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{2\pi c}{3}.$$

□

**Problema 25.2.7.** Trovare il volume dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*Suggerimento e risposta.* Effettuare il cambiamento di variabili

$$x = a\tilde{x}, y = b\tilde{y}, z = c\tilde{z},$$

riducendo il calcolo dell'integrale

$$\iiint_U dx dy dz, \quad U = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

al calcolo dell'integrale

$$\iiint_V d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z},$$

dove

$$V = \{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \leq 1\}.$$

Ripetere l'algoritmo della soluzione del Problema 25.2.6. Risposta

$$\frac{4\pi abc}{3}.$$

□

**Problema 25.2.8.** Calcolare l'integrale

$$\iiint_U z dx dy dz,$$

dove

$$V = \left\{ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \cap \{z \geq 0\}.$$

Risposta.

$$\frac{\pi c^2}{4}.$$

□

**Problema 25.2.9.** Calcolare

$$I = \iint_U xy^2 dx dy, \quad U = \{0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

Risp.

$$I = 1/40.$$

□

**Problema 25.2.10.** Calcolare

$$I = \iint_U \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \quad U = \{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$$

Risp.

$$I = -6\pi^2.$$

□

**Problema 25.2.11.** Calcolare

$$I = \iint_U |x| + |y| dx dy, \quad U = \{|x| + |y| \leq R\}$$

Risp.

$$I = \frac{4R^3}{3}.$$

□

**Problema 25.2.12.** *Calcolare*

$$I = \iint_U xy dx dy, \quad U = \{xy \geq 1, x + y \leq 5/2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

*Risp.*

$$I = \frac{165}{128} - \ln 2.$$

□

**Problema 25.2.13.** *Data una funzione  $f(s, y) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R})$  verificare che la funzione*

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \iint_{\Delta(t, x)} f(s, y) ds dy$$

*dove*

$$\Delta(t, x) = \{(s, y); 0 \leq s \leq t, s + y \leq t + x, s - y \leq t - x\}$$

*appartiene a  $C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$  e soddisfa l'equazione*

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x).$$

**Problema 25.2.14.** *Calcolare*

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

*Risp.*

$$I = \frac{\pi}{6}.$$

□

## 25.3 Teorema del valor medio e calcolo del baricentro

Dalla definizione di integrale di Riemann segue che per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$  che é misurabile (in senso di Riemann) per ogni funzione  $f \in C(K)$  possiamo considerare la media

$$\frac{\int_K f(x) dx}{m(K)}, \quad m(K) = \int_K dx, \quad (25.3.5)$$

chiamato media integrale di  $f$  su  $K$ .

Il teorema della media integrale di Analisi 1 vale nel caso di piú variabili. Più precisamente abbiamo

**Lemma 25.3.1.** (Teorema del valor medio) Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compatto e  $f \in C(K)$ , allora esiste  $\xi \in K$  tale che

$$\frac{\int_K f(x)dx}{m(K)} = f(\xi).$$

**Problema 25.3.1.** Se  $f(x)$  é una funzione continua in  $\mathbb{R}^n$ , verificare che la condizione

$$\int_{\omega} f(x)dx = 0$$

per ogni compatto misurabile  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  implica  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Problema 25.3.2.** Se  $f(x)$  é una funzione continua in  $\mathbb{R}$ , calcolare  $F'(R)$ , dove

$$F(R) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Se  $U \subset \mathbb{R}^2$  é un insieme limitato e misurabile (in senso di Riemann) il baricentro di  $U$  é definito con  $M = (M_x, M_y)$ , dove

$$M_x = \frac{\iint_U x dx dy}{m(U)}, \quad M_y = \frac{\iint_U y dx dy}{m(U)} \quad (25.3.6)$$

e

$$m(U) = \iint_U dx dy.$$

Se  $V \subset \mathbb{R}^3$  é un insieme limitato e misurabile (in senso di Riemann) il baricentro di  $V$  é definito con  $M = (M_x, M_y, M_z)$ , dove

$$M_x = \frac{\iiint_V x dx dy dz}{m(V)}, \quad M_y = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{m(V)}, \quad M_z = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{m(V)} \quad (25.3.7)$$

e

$$m(V) = \iiint_V dx dy dz.$$

**Problema 25.3.3.** *Trovare il baricentro dell'emiellissoide*

$$V = \left\{ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

*Suggerimento e Risposta.* Usiamo le relazioni (25.3.7). L'insieme  $V$  é invariante rispetto la simmetria

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z) \quad (25.3.8)$$

Possiamo usare la proprietá: se l'insieme  $V$  é invariante rispetto (25.3.8) e la funzione  $f(x, y, z)$  é dispari rispetto  $(x, y)$ , cioé

$$f(-x, -y, z) = -f(x, y, z),$$

allora

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Questa osservazione implica  $M_x = M_y = 0$ . Dobbiamo calcolare solo

$$M_z = \frac{\iint_V z dx dy dz}{m(V)}.$$

Usando i risultati ottenuti risolvendo i Problemi 25.2.6 e 25.2.8, troviamo

$$M_z = \frac{c}{6}.$$

□

**Problema 25.3.4.** *Trovare il baricentro dell'insieme*

$$V = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0, x \geq 0 \right\}.$$

**Problema 25.3.5.** *Trovare il baricentro dell'emiellissoide*

$$V = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

## 25.4 Integrali Impropri nel piano

Come nel caso di una sola variabile, la definizione di integrale di Riemann richiede di integrare funzioni limitate su insiemi limitati. Per estendere la definizione al caso di un dominio  $E$  non limitato, il primo passo è prendere in esame le funzioni positive, e considerare una successione crescente di compatti  $E_k \subset E_{k+1}$  dove la funzione è limitata e tale che

$$\cup E_k = E$$

Così abbiamo la relazione

$$\iint_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{E_k} f(x) dx$$

come definizione dell'integrale improprio sui domini nonlimitati.

**Esempio 25.4.1.** *Consideriamo*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

*Possiamo approssimare l'integrale come segue*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

dove

$$B_R = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

*Usando coordinate polari troviamo*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) e^{-r^2} r dr = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2} (1 - e^{-R^2}) = \pi. \end{aligned}$$

*Usando quadrati*

$$Q_R = \{(x, y); |x| \leq R, |y| \leq R\}$$

si vede che

$$Q_R \subset B_{\sqrt{2}R}$$

e quindi

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{B_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (25.4.9)$$

In modo simile, l'inclusione

$$B_R \subset Q_R$$

implica

$$\iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (25.4.10)$$

Il principio di confronto e le stime (25.4.9), (25.4.10) implicano

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Usando la formula di riduzione abbiamo

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = I_R^2,$$

con

$$I_R = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \rightarrow I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

In questo modo deduciamo

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} I_R^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi \end{aligned}$$

e quindi

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (25.4.11)$$



**Problema 25.4.1.** Sia  $\Gamma(z)$  la funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > -1.$$

Verificare la relazione

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (25.4.12)$$

e calcolare  $\Gamma(1/2)$ .

*Idea della soluzione.* Abbiamo

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt$$

e dopo una integrazione per parti troviamo (25.4.12). Per calcolare

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$$

si fa cambiamento di variabili  $t = \tau^2$  e quindi

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau.$$

L'ultimo integrale di Gauss é calcolato nel Esempio 25.4.1 e cosí troviamo

$$\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

□

**Problema 25.4.2.** Sia  $\Gamma(z)$  la funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Verificare che per ogni  $A > 0$  abbiamo la relazione

$$A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-At} dt, \quad \forall s \in (0, 1). \quad (25.4.13)$$

**Problema 25.4.3.** *Vedere se l'identità*

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (25.4.14)$$

per ogni  $s \in (0, 1)$  implica

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad \forall s \in (0, 1). \quad (25.4.15)$$

*Idea della soluzione.*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\tilde{t}^{s-1} e^{-\tilde{t}}) d\tilde{t} \lambda^{-s} e^{-\lambda} d\lambda$$

e utilizzando cambiamento di variabili  $\tilde{t} = t\lambda$  troviamo

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (t^{s-1} e^{-\lambda t}) dt e^{-\lambda} d\lambda = \\ &= \int_0^{\infty} t^{s-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1+t)} d\lambda dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{1+t} \end{aligned}$$

adesso possiamo dedurre la relazione

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{1+t}. \quad (25.4.16)$$

□

**Problema 25.4.4.** *Per ogni  $s \in (0, 1)$  verificare l'identità*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2s}{k^2 - s^2}.$$

*Suggerimento.* Usando (25.4.16) possiamo scrivere

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{1+t} = \int_0^1 \frac{t^{s-1} dt}{1+t} + \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{1+t}$$

e utilizzando cambiamento di variabili  $t = 1/\tau$  scriviamo

$$\int_1^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{1+t} = \int_0^1 \frac{\tau^{-s}}{1+\tau} d\tau.$$

Possiamo usare lo sviluppo in serie per entrambi integrali

$$\int_0^1 \frac{t^{s-1} dt}{1+t} = (-1)^k \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 t^{s-1+k} dt = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{s+k}.$$

In modo simile troviamo

$$\int_0^1 \frac{\tau^{-s}}{1+\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{-s+k}.$$

□

**Problema 25.4.5.** Si consideri l'integrale improprio

$$I_\lambda = \iint_{\mathbb{R}^2} \sin \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \frac{dx_1 dx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\lambda/2}},$$

dove  $\lambda \in (2, 3)$ . Studiare l'esistenza dell'integrale  $I_\lambda$  e vedere se esiste  $\lambda \in (2, 3)$  tale che

$$I_\lambda = 0.$$

*Soluzione.* Usando i coordinati polari per  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  si vede che

$$\iint_{|x| \leq M} \sin |x| \frac{dx}{|x|^\lambda} = 2\pi \int_0^M \sin r \frac{dr}{r^a}$$

dove

$$a = \lambda - 1 \in (1, 2).$$

Così il problema si può risolvere dimostrando che

$$J_a = \int_0^\infty \sin r \frac{dr}{r^a}, a \in (1, 2) \quad (25.4.17)$$

esiste e soddisfa la proprietà

$$J_a > 0, \forall a \in (1, 2) \quad (25.4.18)$$

In fatti, per  $M = k\pi$  abbiamo

$$\int_0^M \sin r \frac{dr}{r^a} = \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \sin r \frac{dr}{r^a}}_{K_{j,a}}.$$

si vede che

$$K_{j,a} = \begin{cases} |K_{j,a}|, & \text{se } j \text{ é pari;} \\ -|K_{j,a}|, & \text{se } j \text{ é dispari.} \end{cases}$$

Abbiamo inoltre

$$|K_{0,a}| > |K_{1,a}| > \dots$$

e quindi

$$\int_0^\infty \sin r \frac{dr}{r^a} > 0$$

per ogni  $a \in (1, 2)$ .

□

## 25.5 Volume di $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$

### 25.5.1 Area della sfera in $\mathbb{R}^n$ , prima soluzione

Si possano introdurre i coordinati polari in  $\mathbb{R}^n$  in modo simile al caso  $\mathbb{R}^3$ . Infatti sia  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sono coordinate cartesiane in  $\mathbb{R}^n$  e

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

possiamo introdurre coordinate angolari

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}$$

dove  $\phi_{n-1}$  varia in  $[0, 2\pi)$  ed altri angoli vanno in  $[0, \pi]$  e possiamo scrivere le relazioni

$$x_1 = r \cos(\phi_1) \tag{25.5.19}$$

$$x_2 = r \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \tag{25.5.20}$$

$$x_3 = r \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \tag{25.5.21}$$

$$\vdots \tag{25.5.22}$$

$$x_{n-1} = r \sin(\phi_1) \dots \sin(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \tag{25.5.23}$$

$$x_n = r \sin(\phi_1) \dots \sin(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-1}). \tag{25.5.24}$$

La trasformata inversa (modulo casi "in qui il denominatore é zero") é

$$r = \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_2^2 + x_1^2} \quad (25.5.25)$$

$$\phi_1 = \operatorname{arccot} \frac{x_1}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_2^2}} = \operatorname{arccos} \frac{x_1}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_1^2}} \quad (25.5.26)$$

$$\phi_2 = \operatorname{arccot} \frac{x_2}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_3^2}} = \operatorname{arccos} \frac{x_2}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_2^2}} \quad (25.5.27)$$

$$\vdots \quad (25.5.28)$$

$$\phi_{n-2} = \operatorname{arccot} \frac{x_{n-2}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}} = \operatorname{arccos} \frac{x_{n-2}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}} \quad (25.5.29)$$

$$\phi_{n-1} = 2\operatorname{arccot} \frac{x_{n-1} + \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}}{x_n} = \begin{cases} \operatorname{arccos} \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}} & x_n \geq 0 \\ 2\pi - \operatorname{arccos} \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}} & x_n < 0 \end{cases} \quad (25.5.30)$$

Si puo trovare la forma di volume  $dx$

$$dx = \left| \det \frac{\partial(x_i)}{\partial(r, \phi_j)} \right| dr d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-1} \quad (25.5.31)$$

$$= r^{n-1} \sin^{n-2}(\phi_1) \sin^{n-3}(\phi_2) \cdots \sin(\phi_{n-2}) dr d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-1} \quad (25.5.32)$$

il volume della palla di raggio  $R$  é

$$V_n = \int_{\phi_{n-1}=0}^{2\pi} \int_{\phi_{n-2}=0}^{\pi} \cdots \int_{\phi_1=0}^{\pi} \int_{r=0}^R dx.$$

Per trovare l'area della sfera di raggio 1 usiamo la forma di area sulla superficie

$$d_{S^{n-1}}\omega = \sin^{n-2}(\phi_1) \sin^{n-3}(\phi_2) \cdots \sin(\phi_{n-2}) d\phi_1 d\phi_2 \cdots d\phi_{n-1}$$

dove  $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$  é parametrizzata come segue

$$\omega_1 = \cos(\phi_1) \tag{25.5.33}$$

$$\omega_2 = \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \tag{25.5.34}$$

$$\omega_3 = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos(\phi_3) \tag{25.5.35}$$

$$\vdots \tag{25.5.36}$$

$$\omega_{n-1} = \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \cos(\phi_{n-1}) \tag{25.5.37}$$

$$\omega_n = \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-2}) \sin(\phi_{n-1}). \tag{25.5.38}$$

Possiamo usare la parametrizzazione

$$\omega = (\cos(\phi_1), \sin(\phi_1)\theta)$$

dove

$$\theta \in \mathbb{S}^{n-2}$$

Abbiamo le relazioni

$$d\omega = \sin^{n-2} \phi_1 d\phi_1 d\theta.$$

Usando questa relazione si puo dimostrare per induzione il seguente

**Lemma 25.5.1.** *L'area  $m(\mathbb{S}^{n-1})$  della sfera unitaria in  $\mathbb{R}^n$  é*

$$m(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

dove  $\Gamma(z)$  é la funzione di Eulero.

Altri representazioni:

$$\begin{cases} \frac{(2\pi)^{n/2} r^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdots (n-2)}, & \text{se } n \text{ é pari;} \\ \frac{2(2\pi)^{(n-1)/2} r^{n-1}}{1 \cdot 3 \cdots (n-2)}, & \text{se } n \text{ é dispari.} \end{cases}$$

e per il volume della palla di raggio  $r$

$$\begin{cases} \frac{(2\pi)^{n/2} r^n}{2 \cdot 4 \cdots n}, & \text{se } n \text{ é pari;} \\ \frac{2(2\pi)^{(n-1)/2} r^n}{1 \cdot 3 \cdots n}, & \text{se } n \text{ é dispari.} \end{cases}$$

### 25.5.2 Area della sfera in $\mathbb{R}^n$ , seconda soluzione

Sia

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$$

la palla di raggio 1 in  $\mathbb{R}^n$ . Usando coordinate polari

$$x = r\omega,$$

dove

$$\omega_1 = \cos(\theta_1)$$

$$\omega_2 = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2)$$

$$\omega_3 = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cos(\theta_3)$$

.....

$$\omega_{n-1} = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \cos(\theta_{n-1})$$

$$\omega_n = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{n-2}) \sin(\theta_{n-1}),$$

sappiamo che per ogni funzione radiale  $f(|x|)$  con decadimento abbastanza forte all'infinito abbiamo la relazione

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx = \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr m(\mathbb{S}^{n-1}), \quad (25.5.39)$$

dove

$$m(\mathbb{S}^{n-1}) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \cdots \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}$$

Ovviamente

$$m(B_1) = \int_0^1 r^{n-1} dr m(\mathbb{S}^{n-1}) = n^{-1} m(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Scegliendo  $f(r) = e^{-r^2}$  possiamo usare la formula di riduzione e ottenere

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} dx_2 \right) \cdots \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n \right)$$

e usando (25.4.11) deduciamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2}.$$

Formula (25.5.39) ci da

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr m(\mathbb{S}^{n-1}).$$

La sostituzione  $r^2 = t$  e la definizione della funzione  $\Gamma$  di Eulero implicano

$$\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} t^{n/2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma(n/2)$$

e quindi

$$\pi^{n/2} = \frac{1}{2} \Gamma(n/2) m(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Adesso possiamo scrivere

$$m(B_1) = n^{-1} m(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$

e via

$$\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right),$$

deduciamo

$$m(B_1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}. \quad (25.5.40)$$

**Problema 25.5.1.** *Trovare il volume dell'ellissoide*

$$\{x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + \cdots + x_n^2/a_n^2 = 1, a_1, a_2, \cdots, a_n > 0\}.$$

*Risposta.*

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \left( \prod_{j=1}^n a_j \right).$$

□





## Part V

### Quarta Parte: Integrazione sulle curve e superficie, forme differenziali



# Chapter 26

## Integrali sulle superfici

### 26.1 Superfici in $\mathbb{R}^n$ .

Come punto di partenza per definire una superficie possiamo seguire la seguente idea.

**Definizione 26.1.1.** *La superficie é un spazio di Hausdorff  $\Sigma$  tale che per ogni  $x^0 \in \Sigma$  esiste un aperto  $V \subset \Sigma$  tale che  $x^0 \in V$  ed esiste un omeomorfismo*

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V, \quad \varphi^{-1} : V \rightarrow U.$$

Ricordiamo che spazio di Hausdorff, detto anche spazio separato é uno spazio topologico nel quale per due punti distinti si possono sempre trovare degli intorni disgiunti.

Ricordiamo inoltre che omeomorfismo fra  $U \subset \mathbb{R}^2$  e  $V \subset \Sigma$  é una funzione continua  $\varphi : U \rightarrow V$  che é anche biunivoca e la cui inversa

$$\varphi^{-1} : V \rightarrow U$$

é anch'essa continua.

Prima consideriamo varie casi, quando  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  é una superficie, tale che  $\Sigma$  é immagine di una applicazione

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

dove  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  é un intervallo aperto  $\mathbb{R}^2$ .

**Esempio 26.1.1.** Possiamo vedere che il settore (aperto) del disco

$$V = \{u_1^2 + u_2^2 < 1; u_1 > 0\}$$

é l'immagine di un intervallo  $I = (0, 1) \times (0, \pi)$  con una funzione  $C^1(I)$  definita come segue

$$\psi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Il Jacobiano di  $\psi$  é

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r > 0.$$

**Definizione 26.1.2.** La coppia  $(\varphi, U)$ , tale che  $\varphi : U \rightarrow \Sigma$  é un omeomorfismo é una parametrizzazione (carta locale) di  $\Sigma$ .

La parametrizzazione (carta locale)  $\sigma$  é definita quindi con la coppia  $(\varphi, U)$  dove

$$\varphi : U \rightarrow \Sigma.$$

e  $\varphi$  é una funzione continua. Possiamo usare la notazione  $\sigma(\varphi, U)$  per esprimere questa relazione.

La parametrizzazione  $\sigma(\varphi, U)$  si dice di classe  $C^k$  se e solo se

$$\varphi \in C^k(U).$$

**Definizione 26.1.3.** La parametrizzazione  $\sigma(\varphi, U)$  dove  $U$  é un intervallo aperto e

$$\varphi : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3,$$

é detta regolare se é di classe  $C^1$  ed inoltre  $\varphi'(u)$  ha rango 2 per ogni  $u \in U$ .

**Osservazione 26.1.1.** La parametrizzazione  $\sigma(\varphi, U)$  certamente é tale che  $\varphi$  é iniettiva, cioè

$$\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \implies u_1 = u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Segue dal fatto che il rango di  $\varphi'$  é 2.

**Osservazione 26.1.2.** Ricordiamo le proprietà del rango di una matrice. Se  $B$  è una matrice  $n \times k$ , allora il rango del prodotto  $AB$  è minore o uguale sia del rango di  $A$  che del rango di  $B$ . In altre parole:

$$\text{rk}(AB) \leq \min\{\text{rk}(A), \text{rk}(B)\}.$$

Come esempio del caso  $<$ , si consideri il prodotto

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrambi i fattori hanno rango 1, ma il prodotto ha rango 0.

Se  $B$  è una matrice  $n \times k$  con rango  $n$ , allora  $n \leq k$  e  $AB$  ha lo stesso rango di  $A$ . Se  $C$  è una matrice  $\ell \times m$  con rango  $m$ , allora  $CA$  ha lo stesso rango di  $A$ .

Possiamo introdurre classe di equivalenze tra le parametrizzazioni.

Infatti, se  $\sigma_0(\varphi_0, U_0)$  e  $\sigma_1(\varphi_1, U_1)$  sono due parametrizzazioni di  $\Sigma$  tali che

$$V_{01} = \varphi_0(U_0) \cap \varphi_1(U_1) \neq \emptyset,$$

possiamo definire l'equivalenza tra loro chiedendo l'esistenza di un diffeomorfismo  $C^1$

$$\chi : u \in \varphi_0^{-1}(V_{01}) \rightarrow \varphi_1^{-1}(V_{01}),$$

tale che

$$\varphi_0(u) = \varphi_1(\chi(u)), \quad \forall u \in \varphi_0^{-1}(V_{01}) \quad (26.1.1)$$

e

$$\det(\chi'(u)) \neq 0, \quad \forall u \in \varphi_0^{-1}(V_{01}) \quad (26.1.2)$$

**Definizione 26.1.4.** Diciamo che le  $C^1$  parametrizzazioni  $\sigma_0(\varphi_0, U_0)$  e  $\sigma_1(\varphi_1, U_1)$  con

$$V_{01} = \varphi_0(U_0) \cap \varphi_1(U_1) \neq \emptyset,$$

sono equivalenti

$$\sigma_0 \sim \sigma_1$$

se esiste un diffeomorfismo

$$\chi : u \in \varphi_0^{-1}(V_{01}) \rightarrow \varphi_1^{-1}(V_{01}),$$

tale che sono veri (26.1.1) e (26.1.2).

Se é soddisfatta (26.1.2) possiamo distinguere due classi di equivalenza collegati con la parametrizzazione  $\sigma_0$  al variare del segno del determinante (Jacobiano) in (26.1.2).

**Definizione 26.1.5.** *Se  $\sigma_0(\varphi_0, U_0) \sim \sigma_1(\varphi_1, U_1)$  e il Jacobiano in (26.1.2) é positiva possiamo dire che le due parametrizzazioni hanno la stessa orientazione. Se il Jacobiano in (26.1.2) é negativo possiamo dire che le due parametrizzazioni hanno orientazioni diversi (l'orientazione di  $\sigma_0$  é opposta all'orientazione di  $\sigma_1$ ).*

Per simplicitá possiamo usare le notazioni

$$(\varphi_0, U_0) \sim (\varphi_1, U_1)$$

o

$$\varphi_0 \sim \varphi_1$$

al posto di

$$\sigma_0(\varphi_0, U_0) \sim \sigma_1(\varphi_1, U_1)$$

quando é chiara la definizione di dominio  $U_0, U_1$  delle funzioni  $\varphi_0, \varphi_1$ .

L'esempio di

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$$

suggerisce che dobbiamo usare piu' di una carta (parametrizzazione).

**Definizione 26.1.6.** *Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n, n \geq 3$  ed*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*una famiglia di parametrizzazioni (carte locali o atlante) tali che:*

**a)**  $U_k, W_k$  sono aperti  $\varphi_k : U_k \rightarrow W_k \cap \Sigma$  é una funzione  $C^1(U_k)$  tale che  $\varphi'_k(u)$  ha rango 2 per ogni  $u \in U_k$ ;

**b)**  $W_k \supset B(x_k, r_k)$  dove

$$B(x_k, r_k) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_k\| < r_k\}$$

e

$$\Sigma \subset \cup_k B(x_k, r_k);$$

cioe

$$B(x_k, r_k) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_k\| < r_k\}$$

é un ricoprimento di  $\Sigma$ ;

c)  $U_k$  sono intervalli aperti in  $\mathbb{R}^2$

d) per ogni  $j, k = 1, \dots, \infty$ ,  $j \neq k$ , tale che  $\Sigma \cap W_k \cap W_j \neq \emptyset$ , esiste un diffeomorfismo

$$\chi_{jk} : \varphi_j^{-1}(\Sigma \cap W_j \cap W_k) \rightarrow (\varphi_k)^{-1}(\Sigma \cap W_j \cap W_k)$$

tale che

$$\varphi_j(u^{(j)}) = \varphi_k(\chi_{jk}(u^{(j)})), \forall u^{(j)} \in \varphi_j^{-1}(W_j \cap W_k).$$

La coppia  $(\Sigma, \mathcal{F})$  si chiama superficie regolare.

**Osservazione 26.1.3.** Se  $\Sigma$  é compatto, allora possiamo scegliere un atlante finito

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, N\}$$

**Esempio 26.1.2.** Possiamo vedere che la sfera

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \}$$

di centro l'origine e raggio 1 é una superficie regolare trovandone un atlante. Sia  $U = \{(u_1, u_2); u_1^2 + u_2^2 < 1\}$  il disco unitario aperto nel piano, e definiamo l'atlante

$$\mathcal{F} = \{(\varphi_j, U, \mathbb{S}^2); j = 1, \dots, 6\}$$

ponendo

$$\varphi_1(u_1, u_2) = (u_1, u_2, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}), \quad \varphi_2(u_1, u_2) = (u_1, u_2, -\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}),$$

$$\varphi_3(u_1, u_2) = (u_1, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}, u_2), \quad \varphi_4(u_1, u_2) = (u_1, -\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}, u_2),$$

$$\varphi_5(u_1, u_2) = (\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}, u_1, u_2), \quad \varphi_6(u_1, u_2) = (-\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}, u_1, u_2).$$



**Esempio 26.1.3.** *Descriviamo un altro atlante sulla sfera. Posto*

$$U = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

sia  $(\psi_1(\theta, \varphi), U, \mathbb{S}^2)$  data da

$$\psi_1(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta);$$

si può vedere che  $\psi_1$  è una parametrizzazione locale della sfera. Il parametro  $\theta$  è usualmente chiamato colatitudine (la latitudine è  $\pi/2 - \theta$ ), mentre  $\varphi$  è la longitudine. Le coordinate locali  $(\theta, \varphi)$  sono dette coordinate sferiche. Ovviamente

$$\psi_1(U) \neq \mathbb{S}^2$$

dobbiamo completare l'atlante con

$$\psi_2(\theta, \varphi) = (-\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, -\cos \theta).$$

### Piano tangente

Sia

$$(\Sigma, \mathcal{F}), \Sigma \subset \mathbb{R}^n$$

una superficie regolare con atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

Per ogni  $x^0 \in \Sigma$  esiste un piccolo intorno  $W$  di  $x_0$  e una parametrizzazione

$$\varphi : I_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

con le proprietà

$$x \in W \cap \Sigma \iff \text{esiste unico } u \in I_\varepsilon \text{ con } x = \varphi(u)$$

$$x^0 = \varphi(u), \iff u = 0.$$

Possiamo definire (localmente) le due curve

$$\gamma_1 : x = \varphi(u_1, 0), \quad u_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

$$\gamma_2 : x = \varphi(0, u_2), \quad u_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

I due vettori tangenti

$$\tau_1 = \partial_{u_1} \varphi(0, 0), \quad \tau_2 = \partial_{u_2} \varphi(0, 0)$$

definiscono il piano tangente di  $\Sigma$  al punto  $x^0 \in \Sigma$

$$T_{x^0}(\Sigma) = \{\lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tau_2; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Se

$$\varphi_1 : u \in I_\varepsilon \rightarrow \Sigma \cap W_1$$

e

$$\varphi_2 : v \in I_\varepsilon \rightarrow \Sigma \cap W_2$$

sono due parametrizzazioni locali con

$$\Sigma \cap W_1 \cap W_2 \neq \emptyset,$$

sappiamo che il differomorfismo

$$\chi_{12} : u \in \varphi_1^{-1}(\Sigma \cap W_1 \cap W_2) \rightarrow v \in (\varphi_2)^{-1}(\Sigma \cap W_1 \cap W_2)$$

é tale che

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(\chi_{12}(u)), \quad \forall u \in \varphi_1^{-1}(\Sigma \cap W_1 \cap W_2)$$

e

$$\det \chi'_{12}(u) \neq 0, \quad \forall u \in \varphi_1^{-1}(\Sigma \cap W_1 \cap W_2). \quad (26.1.3)$$

Ovviamente il diffeomorfismo implica che i vettori tangenti

$$\tau_1 = \partial_{u_1} \varphi_1(0, 0), \quad \tau_2 = \partial_{u_2} \varphi_1(0, 0)$$

si collegano con

$$\tilde{\tau}_1 = \partial_{v_1} \varphi_2(0, 0), \quad \tilde{\tau}_2 = \partial_{v_2} \varphi_2(0, 0),$$

tramite la formula di cambiamento di variabili

$$\begin{pmatrix} \partial_{u_1} \\ \partial_{u_2} \end{pmatrix} = \chi'_{12}(u) \begin{pmatrix} \partial_{v_1} \\ \partial_{v_2} \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 26.1.4.** *Se*

$$\det \chi'_{12}(u) > 0$$

*possiamo dire che orientazione del piano tangente, definito tramite la base  $\tau_1, \tau_2$  si conserva, mentre la condizione*

$$\det \chi'_{12}(u) < 0$$

*significa che le due basi*

$$\tau_1, \tau_2$$

*e*

$$\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2$$

*definiscono due orientazioni diversi nel piano tangente.*

### Atlanti localmente finiti

**Lemma 26.1.1.** *Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  e superficie regolare di classe  $C^m(\Sigma), m \geq 1$ , con atlante*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*allora esiste un atlante*

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\sigma_k(\psi_k, \tilde{U}_k, \Sigma \cap \tilde{W}_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*tale che per ogni  $x \in \Sigma$  e  $W_k$  con  $x \in W_k \cap \Sigma$  esiste*

$$\sigma_j(\psi_k, \tilde{U}_j, \Sigma \cap \tilde{W}_j) \in \tilde{\mathcal{F}}$$

*con*

$$x \in \tilde{W}_j \cap \Sigma \subset W_k \cap \Sigma,$$

*e per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di elementi*

$$\sigma_j(\psi_k, \tilde{U}_j, \Sigma \cap \tilde{W}_j) \in \tilde{\mathcal{F}}$$

*tale che  $x \in \tilde{W}_j$ .*

*Idea della dimostrazione.* Possiamo trovare una successione di compatti

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_\ell \subset \dots,$$

tale che

$$K_\ell \subset \text{Int}(K_{\ell+1})$$

e

$$\cup_\ell K_\ell = \Sigma.$$

Infatti, possiamo partire da un atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_j(\varphi_j, U_j, \Sigma \cap W_j), j = 1, \dots, \infty\}$$

con

$$W_j = B(x_j, r_j) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_j\| < r_j\},$$

tale che

$$\overline{B(x_j, r_j) \cap \Sigma} \subset \Sigma$$

allora

$$K_\ell = \cup_{j=1}^{\ell} \overline{B(x_j, r_j) \cap \Sigma}$$

sono compatti per quali

$$\cup_\ell K_\ell = \Sigma.$$

Ovviamente

$$L_\ell = \overline{K_{\ell+1}} \setminus K_\ell$$

sono compatti e per ogni  $L_\ell$  possiamo trovare una famiglia finita di carte locali

$$\widetilde{\mathcal{F}}_\ell = \{\sigma_k(\psi_k, \widetilde{U}_k, \Sigma \cap \widetilde{W}_k), k = 1, \dots, N_\ell\}$$

tale che per ogni  $x \in \Sigma \cap L_\ell$  e  $W_k$  con  $x \in W_k \cap \Sigma$  esiste

$$\sigma_j(\psi_k, \widetilde{U}_j, \Sigma \cap \widetilde{W}_j) \in \widetilde{\mathcal{F}}_\ell$$

con

$$x \in \widetilde{W}_j \cap \Sigma \subset W_k \cap \Sigma.$$

L'unione

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{\ell} \widetilde{\mathcal{F}}_\ell$$

ci da l'atlante richiesto nel Lemma. □

**Osservazione 26.1.5.** *Atlante*

$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ \sigma_k(\psi_k, \widetilde{U}_k, \Sigma \cap \widetilde{W}_k), k = 1, \dots, \infty \right\}$$

con la proprietà:

**(Atlante localmente finito).** Per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di elementi

$$\sigma_j(\psi_k, \widetilde{U}_j, \Sigma \cap \widetilde{W}_j) \in \tilde{\mathcal{F}}$$

tale che  $x \in \widetilde{W}_j$ . □

si chiama atlante localmente finito.

## 26.2 Partizione dell'unitá sulle superficie

Data una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  con atlante

$$\mathcal{F} = \{ \sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty \}$$

possiamo definire che cosa significa una funzione

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

é del classe  $C^m(\Sigma), m \geq 1$ . Questo significa per ogni parametrizzazione locale

$$\varphi_k : U_k \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \cap W_k$$

la funzione

$$f \circ \varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}$$

é del classe  $C^m(U_k)$ .

**Lemma 26.2.1.** *Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  e superficie regolare di classe  $C^m(\Sigma), m \geq 1$ , con atlante*

$$\mathcal{F} = \{ \sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty \}$$

*localmente finito, allora esiste una famiglia di funzioni*

$$f_k : \Sigma \rightarrow [0, 1],$$

*tale che*

- a)  $f_k \in C^m(\Sigma)$ ;  
 b)  $\text{supp} f_k \subseteq W_k \cap \Sigma$ ;  
 c) per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di  $k$  tale che  $f_k(x) \neq 0$ ;  
 d)  $\sum_k f_k(x) = 1$ .

*Dimostrazione.* Sia

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$$

la funzione definita come segue

$$\psi(s) = \begin{cases} e^{-1/(1-s^2)}, & \text{se } |s| < 1; \\ 0, & \text{se } |s| \geq 1. \end{cases} \quad (26.2.4)$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre che

$$W_k \supset D_{\delta_k}(x_k) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_k\| < \delta_k\}$$

e

$$D_{\delta_k}(x_k)$$

è un ricoprimento di  $\Sigma$ . Possiamo definire

$$g_k(x) = \psi\left(\frac{\|x - x_k\|}{\delta_k}\right),$$

dove  $\psi(s)$  soddisfa (26.2.5). Le funzioni soddisfano le proprietà a), b), c) e

$$\sum_k g_k(x) = G(x) > 0, \forall x \in \Sigma.$$

Ponendo

$$f_k(x) = \frac{g_k(x)}{G(x)},$$

allora abbiamo tutte le proprietà a), b), c), d).

□

**Lemma 26.2.2.** *Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  e superficie regolare con atlante*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

e

$$K \subset U \subset \Sigma$$

sono tali che  $K$  é un compatto e  $U$  é aperto, allora esiste una funzione

$$f : \Sigma \rightarrow [0, 1],$$

tale che  $f \in C^1(\Sigma)$  e

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K; \\ 0, & \text{se } x \notin U. \end{cases} \quad (26.2.5)$$

*Dimostrazione.* Sia  $f_k(x)$  le funzioni costruiti in Lemma 26.2.1 con

$$\text{supp} f_k \subset \{\|x - x_k\| \leq \delta_k\}$$

é  $\delta_k$  piccoli e tali che

$$\cup_{k, x_k \in K} \{x; \|x - x_k\| \leq \delta_k\} \subset U.$$

Allora la funzione

$$f(x) = \sum_{k, x_k \in K} f_k(x)$$

soddisfa le proprietà richieste.  $\square$

## 26.3 Superfici orientabili

**Definizione 26.3.1.** *Sia  $(\Sigma, \mathcal{F})$  una superficie regolare con atlante*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, N\}.$$

*La superficie si chiama orientabile, se per ogni  $j, k = 1, \dots, N, j \neq k$ , con  $\Sigma \cap W_k \cap W_j \neq \emptyset$ , il diffeomorfismo*

$$\chi_{jk} : \varphi_j^{-1}(\Sigma \cap W_j \cap W_k) \rightarrow \varphi_k(\Sigma \cap W_j \cap W_k)$$

tale che

$$\varphi_j(u_j) = \varphi_k(\chi_{jk}(u_j)), \forall u_j \in \varphi_j^{-1}(W_j \cap W_k),$$

preserva l'orientazione.

Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  é definita con l'equazione

$$\Sigma : f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (26.3.6)$$

con

$$\nabla_x f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Sigma \quad (26.3.7)$$

possiamo applicare il Teorema della funzione implicita e vedere la seguente proprietá

**Lemma 26.3.1.** *Se*

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

*é una funzione  $C^1(U)$  tale che*

$$x \in U, f(x) = 0 \implies \nabla_x f(x) \neq 0, \quad (26.3.8)$$

*allora*

$$\Sigma = \{x \in U; f(x) = 0\}$$

*é una superficie regolare ed orientabile.*

*Idea della dimostrazione.* Per ogni  $x^0 \in \Sigma$  con  $\partial_{x_3} f(x^0) \neq 0$  possiamo definire un piccolo intorno  $W_{x^0} \subset U$  e una parametrizzazione

$$h : u \in I_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon\} \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che per ogni  $u \in I_\varepsilon$ ,

$$f(x_1^0 + u_1, x_2^0 + u_2, x_3) = 0 \iff x_3 = x_3^0 + h(u_1, u_2).$$

Così possiamo scegliere un atlante  $\mathcal{F}$  per quale  $(\Sigma, \mathcal{F})$  diventa una superficie regolare.

Per trovare un atlante con parametrizzazioni locali che conservano l'orientazione, possiamo definire la funzione

$$N : x \in \Sigma \rightarrow N(x) = \frac{\nabla_x f(x)}{\|\nabla_x f(x)\|}, \quad (26.3.9)$$

ben definito a causa dell'ipotesi (26.3.8). Possiamo usare l'osservazione 26.1.4, facendo notare che in  $\mathbb{R}^3$  abbiamo orientazione. Così possiamo scegliere la base

$$(\tau_1, \tau_2)$$



nel piano tangente  $T_{x^0}(\Sigma)$  in modo tale che la tripla

$$(\tau_1, \tau_2, N)$$

ha orientazione positiva.  $\square$

**Corollario 26.3.1.** *Una superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  connessa e regolare é orientabile se e solo se esiste la mappa di Gauss*

$$x \in \Sigma \rightarrow N(x) \in \mathbb{R}^3,$$

*tale che*

$$\|N(x)\| = 1,$$

*e la funzione*

$$x \in \Sigma \rightarrow N(x) \in \mathbb{R}^3$$

*é continua.*

Un altro caso quando abbiamo una superficie orientabile é il caso di un aperto connesso e limitato in  $\mathbb{R}^3$  con frontiera regolare in classe  $C^1$ . Così abbiamo

$$U \subset \mathbb{R}^3$$

tale che

$$\partial U = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_N,$$

dove l'unione é disgiunta e ogni

$$\Sigma_j, j = 1, \dots, N$$

é una superficie regolare e connessa.

**Lemma 26.3.2.** *Se  $U \subset \mathbb{R}^3$  é aperto in  $\mathbb{R}^3$  e*

$$\Sigma \subseteq \partial U$$

*é una superficie regolare, compatta e connessa, allora*

$$\Sigma$$

*é una superficie orientabile.*

*Idea della dimostrazione.* Usando la compattezza di  $\Sigma$  possiamo trovare ricoprimento finito

$$\Sigma \subset \cup W_j, \quad W_j \subset \mathbb{R}^3,$$

ed atlante di carte locali

$$\varphi_j : I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 \leq 0\} \rightarrow W_j \cap (U \cup \Sigma)$$

tale che tale che

$$u = (u_1, u_2, u_3) \in I_\varepsilon^-, u_3 > 0, \implies \varphi_j(u) \in U \cap W_j, \quad (26.3.10)$$

$$u = (u_1, u_2, 0) \in I_\varepsilon^-, \implies \varphi_j(u) \in \Sigma \cap W_j, \quad (26.3.11)$$

Così per ogni porzione  $W_j \cap \Sigma$  possiamo scegliere vettore normale

$$x \in W_j \cap \Sigma \rightarrow N(x) \in \mathbb{S}^2,$$

in modo tale che  $N(x)$  è nella direzione esterna di  $U$ , cioè

$$N(u_1, u_2, 0) = (0, 0, 1).$$

Così possiamo fissare la base

$$(\tau_1, \tau_2)$$

nel piano tangente  $T_{x^0}(\Sigma \cap W_j)$  in modo tale che la tripla

$$(\tau_1, \tau_2, N)$$

ha orientazione positiva. □

## 26.4 Superfici con bordo

La idea che le superfici localmente sono omeomorfe a intervalli aperti del tipo

$$I_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon\}$$

ed il fatto che possiamo facilmente costruire "modelli" di domini aperti

$$I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_2 \leq 0\} \quad (26.4.12)$$

con frontiera

$$\partial I_\varepsilon^- = \{u = (u_1, 0) \in \mathbb{R}^2; |u_1| < \varepsilon\}$$

conduce alla seguente

**Definizione 26.4.1.** *La superficie con frontiera é un spazio di Hausdorff  $\Sigma$  tale che*

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma,$$

dove  $\text{Int}(\Sigma)$  é la parte interna di  $\Sigma$  e  $\partial\Sigma$ , é la sua frontiera, tale che per ogni  $x^0 \in \Sigma$  ci sono due possibilitá

- a) *il punto  $x^0 \in \text{Int}(\Sigma)$  é un punto interno, cioè esiste un aperto  $V \subset \Sigma$  tale che  $x^0 \in V$  ed esiste un omeomorfismo*

$$\varphi : I_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V, \quad \varphi^{-1} : V \rightarrow I_\varepsilon.$$

- b) *il punto  $x^0 \in \partial\Sigma$  é un punto della frontiera, cioè esiste un aperto  $V \subset \Sigma$  tale che  $x^0 \in V$  ed esiste un omeomorfismo*

$$\varphi : I_\varepsilon^- \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V, \quad \varphi^{-1} : V \rightarrow I_\varepsilon^-,$$

*tale che*

$$\varphi : \partial I_\varepsilon^- \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial\Sigma \cap V$$

*é anche omeomorfismo.*

## 26.5 Superfici con bordo orientabili

Sia  $(\Sigma, \partial\Sigma, \mathcal{F})$  una superficie regolare con atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, N\},$$

dove  $W_k$  é un ricoprimento di  $\Sigma$  tale che per ogni  $x_0 \in \Sigma$  abbiamo due possibilitá:

$$x_0 \in \text{Int}(\Sigma) \implies \exists k; U_k = I_\varepsilon, \varphi_k : I_\varepsilon \rightarrow W_k \subset \Sigma, \varphi_k(0) = x_0. \quad (26.5.13)$$

e

$$x_0 \in \partial\Sigma \implies \exists k; U_k = I_\varepsilon^-, \varphi_k : I_\varepsilon^- \rightarrow W_k \cap \Sigma, \varphi_k(0) = x_0. \quad (26.5.14)$$

Nel caso (26.5.14) abbiamo inoltre

$$\varphi_k : I_\varepsilon^- \cap \{u_2 = 0\} \rightarrow W_k \cap \partial\Sigma.$$

**Definizione 26.5.1.** *La superficie si chiama orientabile, se per ogni  $j, k = 1, \dots, N, j \neq k$ , con  $\Sigma \cap W_k \cap W_j \neq \emptyset$ , il diffeomorfismo*

$$\chi_{jk} : \varphi_j^{-1}(\Sigma \cap W_j \cap W_k) \rightarrow \varphi_k(\Sigma \cap W_j \cap W_k)$$

*tale che*

$$\varphi_j(u_j) = \varphi_k(\chi_{jk}(u_j)), \forall u_j \in \varphi_j^{-1}(W_j \cap W_k),$$

*preserva l'orientazione.*

Se  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  è connessa, regolare ed orientabile possiamo definire la mappa di Gauss

$$x \in \text{Int}(\Sigma) \rightarrow N(x) \in \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}. \quad (26.5.15)$$

**Lemma 26.5.1.** *Se  $(\Sigma, \partial\Sigma, \mathcal{F})$  è una superficie connessa e regolare, tale che  $\text{Int}(\Sigma)$  è orientabile, allora  $\partial\Sigma$  è anche orientabile.*

*Idea della dimostrazione.* Per ogni  $x^0 \in \partial\Sigma$  possiamo trovare parametrizzazione  $(\varphi, U, W)$  tale che  $x_0 \in W$  e

$$U = I_\varepsilon^-, \varphi : I_\varepsilon^- \rightarrow W \cap \Sigma, \varphi_k(0) = x_0. \quad (26.5.16)$$

con

$$\varphi : I_\varepsilon^- \cap \{u_2 = 0\} \rightarrow W \cap \partial\Sigma.$$

Possiamo scegliere inoltre la parametrizzazione tale che

$$\frac{\partial_{u_1}\varphi(u) \wedge \partial_{u_2}\varphi(u)}{\|\partial_{u_1}\varphi(u) \wedge \partial_{u_2}\varphi(u)\|} = N(\varphi(u)).$$

In questo caso possiamo scegliere in modo unico il vettore tangente

$$\tau = \frac{\partial_{u_1}\varphi(u)}{\|\partial_{u_1}\varphi(u)\|}$$

come vettore che definisce l'orientazione sulla curva  $\partial\Sigma$ . □

**Atlanti localmente finiti per superfici con bordo**

Se

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

e superficie con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

sappiamo che per ogni  $x \in \Sigma$  ci sono due possibilità

- a)** il punto  $x \in \text{Int}(\Sigma)$  é un punto interno, cioè esiste un aperto  $W_k \subset \mathbb{R}^n$  tale che  $x \in W_k \cap \Sigma$  ed esiste un omeomorfismo

$$\varphi_k : U_k = I_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V, \varphi^{-1} : W_k \cap \Sigma \rightarrow I_\varepsilon.$$

- b)** il punto  $x \in \partial\Sigma$  é un punto della frontiera, cioè esiste un aperto  $W_k \subset \mathbb{R}^n$  tale che  $x \in W_k \cap \Sigma$  ed esiste un omeomorfismo

$$\varphi : I_\varepsilon^+ \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W_k \cap \Sigma, \varphi^{-1} : W_k \cap \Sigma \rightarrow I_\varepsilon^+,$$

tale che

$$\varphi : \partial I_\varepsilon^+ \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial\Sigma \cap W_k$$

é anche omeomorfismo.

Così l'atlante é composto da carte locali

$$\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k),$$

dove

$$U_k = I_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon\}$$

se  $\Sigma \cap W_k = \emptyset$  o

$$U_k = I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_2 \leq 0\}$$

se  $\Sigma \cap W_k \neq \emptyset$ .

**Lemma 26.5.2.** *Se*

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

*e superficie regolare di classe  $C^m(\Sigma)$ ,  $m \geq 1$ , con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*allora esiste un atlante*

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\sigma_k(\psi_k, \tilde{U}_k, \Sigma \cap \tilde{W}_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*tale che per ogni  $x \in \Sigma$  e  $W_k$  con  $x \in W_k \cap \Sigma$  esiste*

$$\sigma_j(\psi_k, \tilde{U}_j, \Sigma \cap \tilde{W}_j) \in \tilde{\mathcal{F}}$$

*con*

$$x \in \tilde{W}_j \cap \Sigma \subset W_k \cap \Sigma,$$

*e per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di elementi*

$$\sigma_j(\psi_k, \tilde{U}_j, \Sigma \cap \tilde{W}_j) \in \tilde{\mathcal{F}}$$

*tale che  $x \in \tilde{W}_j$ .*

*Idea della dimostrazione.* Praticamente abbiamo la stessa dimostrazione come la dimostrazione del Lemma 26.1.1.  $\square$

## 26.6 Partizione dell'unità sulle superficie con bordo

Data una superficie

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

possiamo definire che cosa significa una funzione

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

e del classe  $C^m(\Sigma)$ ,  $m \geq 1$ . Questo significa per ogni parametrizzazione locale

$$\varphi_k : U_k \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \cap W_k$$

la funzione

$$f \circ \varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}$$

é del classe  $C^m(U_k)$ .

**Lemma 26.6.1.** *Se Se*

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

*e superficie regolare di classe  $C^m(\Sigma)$ ,  $m \geq 1$ , con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*localmente finito, allora esiste una famiglia di funzioni*

$$f_k : \Sigma \rightarrow [0, 1],$$

*tale che*

- a)  $f_k \in C^m(\Sigma)$ ;
- b)  $\text{supp} f_k \subseteq W_k \cap \Sigma$ ;
- c) per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di  $k$  tale che  $f_k(x) \neq 0$ ;
- d)  $\sum_k f_k(x) = 1$ .

La dimostrazione ripete la dimostrazione del Lemma 26.2.1

## 26.7 Area di una superficie

Prima di tutto ricordiamo l'area di un parallelogramma nello spazio é definita come il modulo del prodotto vettoriale e l'area del parallelogramma individuato dai due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  ed é pari a:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta,$$

infatti,  $b \sin \theta$  é la misura dell'altezza se si fissa  $\mathbf{a}$  come base, e viceversa  $a \sin \theta$  é la misura dell'altezza se si fissa  $\mathbf{b}$  come base.

Sia  $U \subset \mathbb{R}^2$  un intorno dell'origine dove é definita una funzione

$$T : U \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (26.7.17)$$

tale che

$$T \in C^1(U; V) \quad (26.7.18)$$

e la matrice Jacobiana  $J(x)$  ha rango 2, dove

$$J(x) = T'(x).$$

Se  $U$  é plurintervallo e  $\mathcal{P}_\varepsilon = \{I_j(\varepsilon)\}_{j=1}^N$  é una sua partizione

$$U = \cup_{j=1}^N I_j(\varepsilon)$$

dove  $I_j$  sono intervalli quasi disgiunti tali che

$$I_j \subseteq B(u^{(j)}; \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u - u^{(j)}\|_\infty \leq \varepsilon\},$$

allora possiamo esaminare il comportamento della misura rispetto alla trasformazione di un intervallo

$$B(u^{(j)}; \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u - u^{(j)}\|_\infty \leq \varepsilon\} \subset U \quad (26.7.19)$$

tramite l'applicazione  $T$ .

Sia

$$T : B(u_j; \varepsilon) \rightarrow V$$

una carta locale definita con

$$x = \varphi(u), u = (u_1, u_2) \in B(u_j; \varepsilon)$$



L'immagine  $T(I_\varepsilon)$  dell'intervallo  $I_\varepsilon$  ha misura

$$\mu(I_\varepsilon) = \|\partial_{u_1}\varphi(u_{(j)}) \times \partial_{u_2}\varphi(u_{(j)})\|.$$

Così la area della superficie  $\varphi : U \rightarrow V$  si può definire come limite della somma

$$S(P_\varepsilon) = \sum_{j=1}^N \|\partial_{u_1}\varphi(u_{(j)}) \times \partial_{u_2}\varphi(u_{(j)})\| \mu(I_j(\varepsilon))$$

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . In questo modo possiamo introdurre l'area della superficie

$$\underbrace{\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n}_{\Sigma}$$

come segue

$$\mu(\Sigma) = \iint_U \|\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)\| du. \quad (26.7.20)$$

Spesso si usa la notazione

$$dS = \|\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)\| du. \quad (26.7.21)$$

Se abbiamo la parametrizzazione

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in U$$

possiamo introdurre la carta locale

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Abbiamo

$$\partial_x\varphi(x, y) = (1, 0, \partial_x f(x, y)), \quad \partial_y\varphi(x, y) = (0, 1, \partial_y f(x, y)),$$

$$\|\partial_x\varphi \times \partial_y\varphi\|^2 = 1 + |\partial_x f(x, y)|^2 + |\partial_y f(x, y)|^2.$$

Così

$$\mu(\Sigma) = \iint_U \sqrt{1 + |\partial_x f(x, y)|^2 + |\partial_y f(x, y)|^2} \, dx dy. \quad (26.7.22)$$

## 26.8 Integrale sulle superficie di I specie

Un integrale sulla superficie del I tipo sulla superficie  $\Sigma$  parametrizzata da

$$\varphi(u) : u \in U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

e definito come segue

$$\int_{\Sigma} f \, dS = \int_U f(\varphi(u)) \|\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)\| \, du.$$

Usando la relazione

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 = \det \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle a, b \rangle & \langle b, b \rangle \end{pmatrix}$$

si'ottiene

$$dS = \|\partial_{u_1}\varphi(u) \times \partial_{u_2}\varphi(u)\| \, du = \sqrt{g(u)} \, du, \quad (26.8.23)$$

dove

$$g(u) = \det \begin{pmatrix} \langle \partial_{u_1}\varphi(u), \partial_{u_1}\varphi(u) \rangle & \langle \partial_{u_1}\varphi(u), \partial_{u_2}\varphi(u) \rangle \\ \langle \partial_{u_1}\varphi(u), \partial_{u_2}\varphi(u) \rangle & \langle \partial_{u_2}\varphi(u), \partial_{u_2}\varphi(u) \rangle \end{pmatrix}$$

o

$$g(u) = \det \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{12}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix},$$

con

$$g_{jk}(u) = \langle \partial_{u_j}\varphi(u), \partial_{u_k}\varphi(u) \rangle$$

i coefficienti dell I forma fondamentale.

Abbiamo le seguente proprietá.

**Lemma 26.8.1.** *Sia*

$$\underbrace{\varphi : u \in U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(u) \in \mathbb{R}^3}_{\Sigma_1}, \quad \underbrace{\psi : v \in V \rightarrow \psi(v) \in \mathbb{R}^3}_{\Sigma_2}$$

sono due parametrizzazioni  $C^1$  equivalenti e tali che

$$\varphi(U) = \psi(V),$$

allora esiste diffeomorfismo

$$\chi : U \rightarrow V, \det \chi'(u) \neq 0, u \in U, \varphi(u) = \psi(\chi(u)),$$

ed sia  $f$  una funzione continua. Allora, abbiamo

$$\int_{\Sigma_1} f dS = \int_{\Sigma_2} f dS. \quad (26.8.24)$$

*Dimostrazione.* Abbiamo l'identità

$$\int_{\Sigma_1} f dS = \int_U f(\varphi(u)) \|\partial_{u_1} \varphi(u) \times \partial_{u_2} \varphi(u)\| du.$$

$$\int_{\Sigma_2} f dS = \int_V f(\psi(v)) \|\partial_{v_1} \psi(v) \times \partial_{v_2} \psi(v)\| dv.$$

Il cambiamento di variabili

$$v = \chi(u)$$

implica

$$\partial_{u_j} \varphi(u) = \sum_{k=1}^2 \partial_{u_j} \chi_k(u) \partial_{v_k} \psi(\chi(v)), \quad j = 1, 2,$$

così troviamo

$$\partial_{u_1} \varphi(u) \times \partial_{u_2} \varphi(u) = \sum_{k_1, k_2=1}^2 \partial_{u_1} \chi_{k_1}(u) \partial_{v_{k_1}} \psi(\chi(u)) \partial_{u_1} \chi_{k_2}(u) \partial_{v_{k_2}} \psi(\chi(u)).$$

Usiamo la relazione

$$\sum_{k_1, k_2=1}^2 a_{k_1 k_2} \partial_{v_{k_1}} \psi(v) \times \partial_{v_{k_2}} \psi(v) = \sum_{s \in \mathcal{G}_2} \varepsilon(s) a_{s(1) s(2)} \partial_{v_1} \psi(v) \times \partial_{v_2} \psi(v),$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e una matrice,  $G_2$  é il gruppo di permutazioni di  $\{1, 2\}$  mentre  $\varepsilon(s) = \pm 1$  al variare della parit  (disparit  della permutazione. In questo modo arriviamo alla relazione

$$\begin{aligned} \sum_{k_1, k_2=1}^2 a_{k_1 k_2} \partial_{v_{k_1}} \psi(v) \times \partial_{v_{k_2}} \psi(v) &= \\ &= (\det A) \partial_{v_1} \psi(v) \times \partial_{v_2} \psi(v). \end{aligned} \quad (26.8.25)$$

Usando (26.8.25) si deduce

$$\partial_{u_1} \varphi(u) \times \partial_{u_2} \varphi(u) = \det J(u) \partial_{v_1} \psi(\chi(u)) \times \partial_{v_2} \psi(\chi(u))$$

con

$$J(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \chi_1(u) & \partial_{u_1} \chi_2(u) \\ \partial_{u_2} \chi_1(u) & \partial_{u_2} \chi_2(u) \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobiana del cambiamento  $v = \chi(u)$  e quindi

$$\|\partial_{u_1} \varphi(u) \times \partial_{u_2} \varphi(u)\| = |\det J(u)| \|\partial_{v_1} \psi(\chi(u)) \times \partial_{v_2} \psi(\chi(u))\|$$

Applicando la formula di cambiamento di variabili

$$\int_V F(v) dv = \int_U F(\chi(u)) |\det J(u)| du$$

otteniamo (26.8.24). □

Cos  l'integrale di I specie NON dipende della parametrizzazione e dell'orientazione.

La partizione dell'unit  del Lemma 26.2.1 ci permette di introdurre integrale di superficie del I tipo per il caso quando  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$    superficie regolare di classe  $C^m(\Sigma), m \geq 1$ , con atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

localmente finito, e con una partizione dell'unit , cio  una famiglia di funzioni

$$\psi_k : \Sigma \rightarrow [0, 1],$$

tale che

- a)  $\psi_k \in C^m(\Sigma)$ ;  
 b)  $\text{supp}\psi_k \subseteq W_k \cap \Sigma$ ;  
 c) per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di  $k$  tale che  $\psi_k(x) \neq 0$ ;  
 d)  $\sum_k \psi_k(x) = 1$ .

L'integrale sulla superficie del I tipo sulla superficie  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$  regolare, di classe  $C^m(\Sigma), m \geq 1$ , con atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

localmente finito, e con una partizione dell'unit , cio 

$$\sum_k \psi_k(x) = 1, \text{supp}\psi_k \subset W_k \cap \Sigma$$

  definito come segue

$$\int_{\Sigma} f dS = \sum_k \int_{U_k} f(\varphi_k(u)) \psi_k(\varphi_k(u)) \|\partial_{u_1} \varphi_k(u) \times \partial_{u_2} \varphi_k(u)\| du.$$

## 26.9 Forme differenziali di grado 2 nello spazio Euclideo

### Forme differenziali di grado 1

Una 1-forma   un'applicazione  $x \rightarrow \omega(x)$ , definita su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ed a valori nel duale  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Se  $e_1, \dots, e_n$    una base canonica di  $\mathbb{R}^n$  allora possiamo definire  $e_j^* = dx_j \in (\mathbb{R}^n)^*$  la trasformata lineare definita con

$$dx_j(e_k) = \delta_{jk}.$$

Ogni 1-forma ha la rappresentazione (locale)

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) dx_j, \quad (26.9.26)$$

dove  $\omega_j(x)$    funzione definita in  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ed a valori nel  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 26.9.1.** Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$  una 1-forma. Diciamo che  $\omega$  é esatta in  $U$  se esiste una funzione differenziabile  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $\omega = df$  in  $U$ .

### Forme bilineari e antisimmetriche

Una forma bilineare é una mappa

$$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

che associa ad ogni coppia di elementi  $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  lo scalare  $\phi(v, w) \in \mathbb{R}$  ed é lineare su entrambe le componenti, cioé:

$$\phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w) \quad \forall v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n,$$

$$\phi(w, v_1 + v_2) = \phi(w, v_1) + \phi(w, v_2) \quad \forall v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^n,$$

$$\phi(av, w) = \phi(v, aw) = a\phi(v, w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Fissato uno dei due argomenti, la funzione é lineare rispetto all'altro.

**Osservazione 26.9.1.** Useremmo la notazione

$$A^2(\mathbb{R}^n)$$

per l'insieme di tutte le forma bilineari antisimmetriche in  $\mathbb{R}^n$ .

Ovviamente  $A^2(\mathbb{R}^n)$  é un spazio lineare. Una forma bilineare  $\phi$  é antisimmetrica se e solo se

$$\phi(v, w) = -\phi(w, v).$$

**Lemma 26.9.1.** Una caratterizzazione equivalente di una forma antisimmetrica é:

$$\phi(v, v) = 0$$

per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo l'identità

$$\phi(v, w) + \phi(w, v) = \frac{\phi(v + w, v + w) - \phi(v - w, v - w)}{2}.$$

□

Ogni forma bilineare antisimmetrica puo essere rappresentata come segue

$$\phi(u, v) = \langle u, Av \rangle, \quad A^t = -A. \quad (26.9.27)$$

**Lemma 26.9.2.** *Se  $\phi$  é una forma bilineare ed antisimmetrica,  $f_1, f_2$  sono due vettori in  $\mathbb{R}^n$ , allora abbiamo la relazione*

$$\sum_{k_1 k_2=1}^2 b_{k_1 k_2} \phi(f_{k_1}, f_{k_2}) = (\det B) \phi(f_1, f_2)$$

per ogni matrice

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

**Esempio 26.9.1.** *Sia  $n = 3$ . Ogni matrice antisimmetrica ha la forma*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (26.9.28)$$

cosí possiamo concludere, ogni matrice antisimmetrica e

$$A = \alpha_1 J_{23} + \alpha_2 J_{13} + \alpha_3 J_{12}$$

con

$$J_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (26.9.29)$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26.9.30)$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26.9.31)$$

**Definizione 26.9.2.** *Sia  $dx_1 \wedge dx_2 \in A^2(\mathbb{R}^3)$  la forma bilineare antisimmetrica che corrisponde alla matrice  $J_{12}$  del esempio (26.9.1). Se  $e_1, e_2, e_3$  é una base canonica in  $\mathbb{R}^3$  e*

$$\underbrace{v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3}_v, \quad \underbrace{w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3}_w$$

sono due vettori in  $\mathbb{R}^3$ , allora

$$dx_1 \wedge dx_2(v, w) = \langle v, J_{12}w \rangle = v_1w_2 - v_2w_1. \quad (26.9.32)$$

Abbiamo anche la definizione alternativa

$$dx_1 \wedge dx_2(e_{j_1}, e_{j_2}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \{j_1, j_2\} \neq \{1, 2\}; \\ 1, & \text{se } j_1 = 1, j_2 = 2; \\ -1, & \text{se } j_1 = 2, j_2 = 1. \end{cases} \quad (26.9.33)$$

Possiamo introdurre una base delle forme bilineari antisimmetriche in  $\mathbb{R}^n$  come segue.

**Definizione 26.9.3.** Sia  $e_1, e_2, \dots, e_n$  é una base canonica in  $\mathbb{R}^n$  e

$$\underbrace{v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_n e_n}_v, \quad \underbrace{w_1e_1 + w_2e_2 + \dots + w_n e_n}_w$$

sono due vettori in  $\mathbb{R}^n$ , allora per ogni coppia  $(k_1, k_2)$  con

$$1 \leq k_1, k_2 \leq n, \quad k_1 \neq k_2$$

possiamo definire la forma

$$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \in A^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3,$$

con

$$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2}(e_{j_1}, e_{j_2}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \{j_1, j_2\} \neq \{k_1, k_2\}; \\ 1, & \text{se } j_1 = k_1, j_2 = k_2; \\ -1, & \text{se } j_1 = k_2, j_2 = k_1. \end{cases} \quad (26.9.34)$$

Abbiamo le seguente proprietà

$$\begin{aligned} dx_j \wedge dx_k &= -dx_k \wedge dx_j, \\ dx_j \wedge dx_j &= 0. \end{aligned} \quad (26.9.35)$$

Ogni forma bilineare antisimmetrica  $\phi$  in  $\mathbb{R}^n$  si puo presentare (in modo unico) come

$$\phi = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \phi_{jk} dx_j \wedge dx_k,$$

cosi l'insieme

$$\{dx_j \wedge dx_k; 1 \leq j < k \leq n\}$$

é una base di tutte le forme bilineari antisimmetriche.



### Forme differenziali di grado 2

**Definizione 26.9.4.** Una 2-forma é un'applicazione  $x \rightarrow \alpha(x)$ , definita su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ed ad ogni  $x \in U$  associa una forma bilineare antisimmetrica

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk}(x) dx_j \wedge dx_k. \quad (26.9.36)$$

dove le forme bilineari  $dx_j \wedge dx_k$  sono introdotti nella Definizione (26.9.3).

Prendendo una forma differenziale di grado 1

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) dx_j,$$

possiamo introdurre il differenziale di  $\omega$  usando l'identitá

$$d\omega = \sum_{j=1}^n d\omega_j(x) \wedge dx_j, \quad (26.9.37)$$

usando le relazioni (26.9.35) e

$$d\omega_j(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} \omega_j(x) dx_k$$

otteniamo

$$d\omega = \sum_{j,k=1}^n \partial_{x_k} \omega_j(x) dx_k \wedge dx_j = \sum_{1 \leq k < j \leq n} (\partial_{x_k} \omega_j(x) - \partial_{x_j} \omega_k(x)) dx_k \wedge dx_j. \quad (26.9.38)$$

La 2-forma  $\alpha$  si chiama esatta se esiste 1-forma  $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) dx_j$  tale che

$$\alpha = d\omega.$$

## 26.10 Pull - back delle forme differenziali

Sia  $U$  un aperto e sia data una funzione

$$\varphi : u \in U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq m$$

in classe  $C^1(U; \mathbb{R}^n)$  allora il pull-back di una forma differenziale in  $\mathbb{R}^n$  é definito come segue.

Se

$$f(x) : x \in U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A^0(\mathbb{R}^n)$$

é forma differenziale di grado 0 il pull - back é

$$\varphi^* f(u) = f(\varphi(u)). \quad (26.10.39)$$

Se

$$\alpha = \sum_{j=1}^n A_j(x) dx_j \in A^1(\mathbb{R}^n)$$

é forma differenziale di grado 1 il pull - back é

$$\varphi^*(\alpha)(u) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m A_j(\varphi(u)) \partial_{u_k} \varphi_j(u) du_k. \quad (26.10.40)$$

Se

$$\omega = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n F_{j_1 j_2}(x) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \in A^2(\mathbb{R}^n)$$

é forma differenziale di grado 2 il pull - back é

$$\varphi^*(\omega)(u) = \sum_{j_1, j_2=1}^n \sum_{k_1, k_2=1}^m A_{j_1 j_2}(\varphi(u)) \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u) \partial_{u_{k_2}} \varphi_{j_2}(u) du_{k_1} \wedge du_{k_2}. \quad (26.10.41)$$

In questa sezione studiamo solo forme differenziali di grado 0, 1, 2 per semplicitá.

**Lemma 26.10.1.** *Se  $\alpha$  é forma differenziale (di grado 0, 1, 2) e*

$$\chi : u \in I = \{u \in \mathbb{R}^m; \|u\|_\infty < 1\} \rightarrow v = \chi(u) \in V \subset \mathbb{R}^m$$

é funzione in  $C^1(U; V)$  e

$$\varphi : v \in V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

é altra funzione in  $C^1(V; W)$ , allora

$$(\varphi \circ \chi)^*(\alpha) = (\chi)^*((\varphi)^*(\alpha)). \quad (26.10.42)$$

*Dimostrazione.* Se  $\alpha$  é di grado 0, cioè  $\alpha$  é funzione, allora l'affermazione é ovvia.

Se  $\alpha$  é forma di grado 1

$$\alpha = dx_1,$$

usando (26.10.40) possiamo scrivere

$$\varphi^*(dx_1)(v) = \sum_{k=1}^m \partial_{v_k} \varphi_1(v) dv_k. \quad (26.10.43)$$

Poi le relazioni

$$\chi^*(dv_k) = \sum_{j=1}^m \partial_{u_j} \chi_k du_j$$

e

$$\partial_{u_j} \varphi_1(\chi(u)) = \sum_{k=1}^m \partial_{v_k} \varphi_1(\chi(u)) \partial_{u_j} \chi_k(u)$$

implicano

$$\chi^*(\varphi^*(dx_1))(u) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^m \partial_{v_k} \varphi_1(\chi(u)) \partial_{u_j} \chi_k du_j$$

e

$$(\varphi \circ \chi)^*(dx_1) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^m \partial_{v_k} \varphi_1(\chi(u)) \partial_{u_j} \chi_k du_j.$$

In modo simile si procede per forma generica

$$\alpha = \sum_{j=1}^n A_j(x) dx_j$$

di grado 1 oppure per forma di grado 2. □

Le definizioni (26.10.40) e (26.10.41) implicano il seguente risultato.

**Lemma 26.10.2.** *Se*

$$\varphi : u \in U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow v = \chi(u) \in V \subset \mathbb{R}^n, n \geq m$$

*é funzione in  $C^1(U; V)$ , allora vale la relazione*

$$\varphi^*(dx_1 \wedge dx_2) = \varphi^*(dx_1) \wedge \varphi^*(dx_2).$$

*Nella situazione generica di*

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^n A_j(x) dx_j, \quad \alpha_2 = \sum_{j=1}^n B_j(x) dx_j$$

*due forme differenziali di grado 1, abbiamo la relazione*

$$\varphi^*(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \varphi^*(\alpha_1) \wedge \varphi^*(\alpha_2). \quad (26.10.44)$$

Alla fine abbiamo l'operazione  $d$  e possiamo verificare il seguente risultato.

**Lemma 26.10.3.** *Se*

$$\varphi : u \in U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow v = \chi(u) \in V \subset \mathbb{R}^n, n \geq m$$

*é funzione in  $C^1(U; V)$  e*

$$\alpha = \sum_{j=1}^n A_j(x) dx_j,$$

*una forma differenziale di grado 1. Allora abbiamo la relazione*

$$\varphi^*(d\alpha) = d\varphi^*(\alpha). \quad (26.10.45)$$

*Dimostrazione.* Abbiamo

$$\varphi^*(\alpha) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^m A_{j_1}(\varphi(u)) \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u) du_{k_1}.$$

La definizione (26.9.38) del differenziale implica

$$d(\varphi^*(\alpha)) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1, k_2=1}^m \partial_{u_{k_2}} \left( A_{j_1}(\varphi(u)) \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u) \right) du_{k_2} \wedge du_{k_1}.$$

La regola di Leibniz implica

$$\begin{aligned} d(\varphi^*(\alpha)) &= \sum_{j_1, j_2=1}^n \sum_{k_1, k_2=1}^m (\partial_{x_{j_2}} A_{j_1}(\varphi(u))) \partial_{u_{k_2}} \varphi_{j_2}(u) \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u) du_{k_2} \wedge du_{k_1} + \\ &+ \sum_{j_1=1}^n \underbrace{\sum_{k_1, k_2=1}^m A_{j_1}(\varphi(u)) \left( \partial_{u_{k_2}} \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u) \right) du_{k_2} \wedge du_{k_1}}_{R_{j_1}(u)}. \end{aligned}$$

Per il termine  $R_{j_1}(u)$  possiamo usare la simmetria in  $k_1, k_2$  della espressione

$$b_{k_1 k_2} = \partial_{u_{k_2}} \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u)$$

Piu' precisamente  $b_{k_1 k_2}$  soddisfa la proprietá (ricordiamo che qui  $j_1$  é fissato)

$$b_{k_1 k_2} = b_{k_2 k_1}$$

e questa simmetria implica

$$\sum_{k_1, k_2=1}^m b_{k_1 k_2} du_{k_2} \wedge du_{k_1} = 0, \quad (26.10.46)$$

perche la forma

$$du_{k_2} \wedge du_{k_1}$$

é antisimmetrica. Cosi deduciamo che  $R_{j_1}(u) = 0$  e quindi

$$d(\varphi^*(\alpha)) = \quad (26.10.47)$$

$$\sum_{j_1, j_2=1}^n \sum_{k_1, k_2=1}^m (\partial_{x_{j_2}} A_{j_1}(\varphi(u))) \partial_{u_{k_2}} \varphi_{j_2}(u) \partial_{u_{k_1}} \varphi_{j_1}(u) du_{k_2} \wedge du_{k_1}.$$

La definizione (26.9.38) del differenziale di  $\alpha$  ci da

$$d\omega = \sum_{j_1, j_2=1}^n \partial_{x_{j_1}} A_{j_2}(x) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2}. \quad (26.10.48)$$

Applicando la definizione del pull - back concludiamo che  $\varphi^*(d\omega)$  coincide con l'espressione in (26.10.47) così possiamo concludere che (26.10.45) é verificato.

□

## 26.11 Integrali delle forme differenziali di grado 2 sulle superfici

Sia  $(\varphi, I, \Sigma)$  una parametrizzazione della superficie  $\Sigma$

$$\underbrace{\varphi : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n}_{\Sigma}$$

possiamo utilizzare questa parametrizzazione per il pull - back delle forme differenziali in  $\mathbb{R}^n$ .

Se

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) dx_j : x \in U \rightarrow A^1(\mathbb{R}^n)$$

é una forma differenziale di grado 1 in  $\mathbb{R}^n$  il pull - back della parametrizzazione é definito con la relazione

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \omega_j(\varphi(u)) \partial_{u_k} \varphi_j(u) du_k \quad (26.11.49)$$

Usando la relazione

$$\varphi^*(dx_1 \wedge dx_2) = \varphi^*(dx_1) \wedge \varphi^*(dx_2),$$

possiamo calcolare il pull - back della forma differenziale

$$dx_1 \wedge dx_2 \in A^2(\mathbb{R}^n), n \geq 3.$$

La relazione (26.10.40) e Lemma 26.9.2 implicano

$$\varphi^*(dx_1 \wedge dx_2)(u) = (\partial_{u_1} \varphi_1(u) \partial_{u_2} \varphi_2(u) - \partial_{u_2} \varphi_1(u) \partial_{u_1} \varphi_2(u)) du_1 \wedge du_2. \quad (26.11.50)$$

Se

$$\alpha = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk}(x) dx_j \wedge dx_k$$

é una forma differenziale di grado 2, allora il pull - back della forma é

$$\begin{aligned} & \varphi^*(\alpha)(u) = \\ & = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \alpha_{jk}(\varphi(u)) (\partial_{u_1} \varphi_j(u) \partial_{u_2} \varphi_k(u) - \partial_{u_1} \varphi_k(u) \partial_{u_2} \varphi_j(u)) du_1 \wedge du_2. \end{aligned}$$

**Definizione 26.11.1.** *L' integrale di superficie di  $\omega$  sulla parametrizzazione  $(\varphi, I, \Sigma)$*

$$\underbrace{\varphi : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n}_{\Sigma}$$

é definito come segue

$$\int_{(\varphi, I, \Sigma)} \omega := \int_I \varphi^*(\omega)$$

**Osservazione 26.11.1.** *Usando la parametrizzazione locale possiamo scrivere*

$$\begin{aligned} & \int_{(\varphi, I, \Sigma)} \omega := \int_I \varphi^*(\omega) \\ & = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \int_I \omega_{jk}(\varphi(u)) (\partial_{u_1} \varphi_j(u) \partial_{u_2} \varphi_k(u) - \partial_{u_1} \varphi_k(u) \partial_{u_2} \varphi_j(u)) du \end{aligned}$$

L'integrale sulle forme differenziali dipende dell'orientazione.

### Integrale di 2 forma nel caso di superfici con bordo

Se

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

e superficie regolare, connessa ed orientabile con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

**Definizione 26.11.2.** *Sia*

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

*superficie regolare, connessa ed orientabile con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante*

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

*localmente finito. Se*

$$\psi_k \in C^1(\Sigma; [0, 1]),$$

*é partizione dell'unitá, tale che tale che*

**a)**  $\text{supp}\psi_k \subseteq W_k \cap \Sigma$ ;

**b)**  $\sum_k \psi_k(x) = 1, \forall x \in \Sigma$ ,

*allora per ogni 2- forma*

$$\beta = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

*l'integrale della forma  $\beta$  sulla superficie  $(\Sigma, \partial\Sigma, \mathcal{F})$  é definito come segue*

$$\int_{\Sigma} \beta = \sum_k \int_{U_k} \varphi_k^*(\psi_k \beta). \quad (26.11.51)$$

**Osservazione 26.11.2.** *Sappiamo che per ogni  $x \in \Sigma$  ci sono due possibilitá*

**a)** *il punto  $x \in \text{Int}(\Sigma)$  é un punto interno, cioé esiste un aperto  $W_k \subset \mathbb{R}^n$  tale che  $x \in W_k \cap \Sigma$  ed esiste un omeomorfismo*

$$\varphi_k : U_k = I_{\varepsilon} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V, \varphi_k^{-1} : W_k \cap \Sigma \rightarrow I_{\varepsilon}.$$

**b)** *il punto  $x \in \partial\Sigma$  é un punto della frontiera, cioé esiste un aperto  $W_k \subset \mathbb{R}^n$  tale che  $x \in W_k \cap \Sigma$  ed esiste un omeomorfismo*

$$\varphi_k : I_{\varepsilon}^- \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W_k \cap \Sigma, \varphi_k^{-1} : W_k \cap \Sigma \rightarrow I_{\varepsilon}^-,$$

*tale che*

$$\varphi_k : \partial I_{\varepsilon}^- \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial\Sigma \cap W_k$$

*é anche omeomorfismo.*



Così l'atlante è composto da carte locali

$$\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k),$$

dove

$$U_k = I_\varepsilon = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon\}$$

se  $\Sigma \cap W_k = \emptyset$  o

$$U_k = I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_2 \leq 0\}$$

se  $\Sigma \cap W_k \neq \emptyset$ .

**Osservazione 26.11.3.** Sappiamo inoltre che esistono atlanti localmente finiti (vedi Lemma 26.5.2) e partizione dell'unità subordinato a questo atlante localmente finito (Lemma 26.6.1).

Così abbiamo una famiglia di funzioni

$$\psi_k : \Sigma \rightarrow [0, 1],$$

tale che

- a)  $\psi_k \in C^m(\Sigma)$ ;
- b)  $\text{supp}\psi_k \subseteq W_k \cap \Sigma$ ;
- c) per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di  $k$  tale che  $\psi_k(x) \neq 0$ ;
- d)  $\sum_k \psi_k(x) = 1$ .

**Esempio 26.11.1.** Data una forma

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j$$

possiamo definire il differenziale di  $\alpha$  che è 2 forma

$$\omega = d\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} F_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \alpha_j(x) dx_i \wedge dx_j$$

dove

$$F_{ij}(x) = \partial_{x_i} \alpha_j(x) - \partial_{x_j} \alpha_i(x).$$

Usando la partizione dell'unit  abbiamo

$$\alpha = \sum_k \alpha^k, \quad \alpha^k = \psi_k(x) \alpha(x) = \sum_k \sum_{j=1}^n \alpha_j^k(x) dx_i \wedge dx_j,$$

con

$$\alpha_j^k(x) = \psi_k(x) \alpha_j(x).$$

Poi abbiamo

$$\begin{aligned} \omega = d\alpha &= \sum_k d\alpha^k = \sum_k \sum_{1 \leq i < j \leq n} F_{ij}^k(x) dx_i \wedge dx_j = \\ &= \sum_k \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \alpha_j^k(x) dx_i \wedge dx_j, \end{aligned}$$

dove

$$F_{ij}^k(x) = \partial_{x_i} \alpha_j^k(x) - \partial_{x_j} \alpha_i^k(x).$$

La definizione (26.11.51) implica

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \omega &= \sum_{k_1, k_2} \int_{U_{k_1}} \varphi_{k_1}^* (\psi_{k_1} \omega^{k_2}) = \\ &= \sum_{k_1, k_2} \int_{U_{k_1}} \varphi_{k_1}^* (\psi_{k_1} d\alpha^{k_2}) = \sum_{k_2} \int_{U_{k_2}} \varphi_{k_2}^* (d\alpha^{k_2}), \end{aligned}$$

Nella ultima identit  usiamo il fatto che per ogni  $k_2$  possiamo definire

$$N(k_2) = \{k_1; W_{k_1} \cap W_{k_2} \neq \emptyset\}$$

e possiamo definire un intorno di  $W_{k_2}$

$$\widehat{W}_{k_2} = \cup_{k_1 \in N(k_2)} W_{k_1},$$

e supporre che  $\varphi_{k_2}^{-1}$  puo essere esteso al

$$\widehat{W}_{k_2},$$

in modo tale che per ogni  $k_1 \in N(k_2)$  esiste un diffeomorfismo tale che

$$\varphi_{k_1} = \varphi_{k_2} \circ \chi_{k_1 k_2}$$

Usando il cambiamento di variabili definito dal diffeomorfismo  $\chi_{k_1 k_2}$  abbiamo

$$\int_{U_{k_1}} \varphi_{k_1}^*(\alpha) = \int_{U_{k_2}} \varphi_{k_2}^*(\alpha)$$

per ogni forma con coefficienti che hanno supporto in

$$(W_{k_1} \cap W_{k_2}).$$

Usando la relazione

$$\sum_{k_1} \psi_{k_1}(x) = 1, \quad x \in (\varphi_{k_2})^{-1} \widehat{W}_{k_2},$$

deduciamo

$$\sum_{k_1, k_2} \int_{U_{k_1}} \varphi_{k_1}^*(\psi_{k_1} d\alpha^{k_2}) = \sum_{k_2} \int_{U_{k_2}} \varphi_{k_2}^*(d\alpha^{k_2}),$$

e quindi

$$\int_{\Sigma} \omega = \sum_k \int_{U_k} \varphi_k^*(d\alpha^k). \quad (26.11.52)$$

## 26.12 Formula di Stokes - Green

**Lemma 26.12.1.** *Se il punto  $x \in \text{Int}(\Sigma)$  è un punto interno,  $W$  è intorno di  $x$  con parametrizzazione*

$$\varphi : U = I_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W \cap \Sigma.$$

ed  $\alpha$  è una forma con coefficienti con supporto in  $W$  allora

$$\int_{\Sigma \cap W} d\alpha = 0. \quad (26.12.53)$$

*Idea della dimostrazione.* Sia

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j.$$

Abbiamo l'identità

$$\int_{\Sigma \cap W} d\alpha = \sum_{\ell, m=1}^2 \int_{I_\varepsilon} G_{\ell m}(u) du_\ell \wedge du_m,$$

con

$$\begin{aligned} G_{\ell m}(u) &= \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \alpha_j(\varphi(u)) \partial_{u_\ell} \varphi_i(u) \partial_{u_m} \varphi_j(u) = \\ &= \partial_{u_\ell} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_m} \varphi_j(u). \end{aligned}$$

Abbiamo la relazione

$$\begin{aligned} & \int_{I_\varepsilon} \partial_{u_\ell} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_\ell \wedge du_m = \\ &= - \int_{I_\varepsilon} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_\ell} \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_\ell \wedge du_m. \end{aligned} \quad (26.12.54)$$

grazie al fatto che la funzione

$$\alpha_j(\varphi(u))$$

ha supporto in  $I_\varepsilon$ . Tenendo conto che

$$\sum_{\ell, m=1}^2 \partial_{u_\ell} \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_\ell \wedge du_m = 0$$

otteniamo (26.12.53). □

**Lemma 26.12.2.** *Se il punto  $x \in \partial\Sigma$  é un punto della frontiera,  $W$  é intorno di  $x$  con parametrizzazione*

$$\varphi : U = I_\varepsilon^+ \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W \cap \Sigma.$$

ed  $\alpha$  é una forma con coefficienti con supporto in  $W$  allora

$$\int_{\Sigma \cap W} d\alpha = \int_{\partial \Sigma \cap W} \alpha, \quad (26.12.55)$$

dove  $\partial \Sigma_k$  é con la parametrizzazione

$$\psi(u_1) = \varphi(u_1, 0) : I_\varepsilon^+ \cap \{u_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W \cap \partial \Sigma.$$

*Idea della dimostrazione.* Sia

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j.$$

Abbiamo l'identitá

$$\int_{\Sigma \cap W} d\alpha = \sum_{\ell, m=1}^2 \int_{I_\varepsilon^+} G_{\ell m}(u) du_\ell \wedge du_m,$$

con

$$G_{\ell m}(u) = \sum_{i, j=1}^n \partial_{x_i} \alpha_j(\varphi(u)) \partial_{u_\ell} \varphi_i(u) \partial_{u_m} \varphi_j(u) = \partial_{u_\ell} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_m} \varphi_j(u).$$

Abbiamo la relazione (26.12.56) se  $\ell = 1$ . Se  $\ell = 2$  abbiamo

$$\begin{aligned} & \int_{I_\varepsilon^+} \partial_{u_2} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_1} \varphi_j(u) du_2 \wedge du_1 = \\ & = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\alpha_j(\varphi(u_1))) \partial_{u_1} \varphi_j(u_1, 0) du_1 - \int_{I_\varepsilon^+} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_2} \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_2 \wedge du_1 \end{aligned} \quad (26.12.56)$$

grazie al fatto che la funzione

$$\alpha_j(\varphi(u))$$

ha supporto in  $I_\varepsilon^-$ . Tenedo conto che

$$\sum_{\ell, m=1}^2 \partial_{u_\ell} \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_\ell \wedge du_m = 0$$

otteniamo (26.12.59), perche

$$\int_{\partial\Sigma \cap W} \alpha = \int_{I_\varepsilon \cap \{u_2=0\}} (\alpha_j(\varphi(u))) \partial_{u_m} \varphi_j(u) du_m.$$

□

Possiamo unire i due Lemmi precedenti in una versione globale per una

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

regolare orientabile e con bordo  $\partial\Sigma$  e con atlante

$$\mathcal{F} = \{\sigma_k(\varphi_k, U_k, \Sigma \cap W_k), k = 1, \dots, \infty\}$$

localmente finito é partizione dell'unita' subordinato a questo atlante localmente finito (Lemma 26.6.1)

Cosí abbiamo una famiglia di funzioni

$$\psi_k : \Sigma \rightarrow [0, 1],$$

tale che

- a)  $\psi_k \in C^m(\Sigma)$ ;
- b)  $\text{supp}\psi_k \subseteq W_k \cap \Sigma$ ;
- c) per ogni  $x \in \Sigma$  esiste al massimo numero finito di  $k$  tale che  $\psi_k(x) \neq 0$ ;
- d)  $\sum_k \psi_k(x) = 1$ .

Possiamo definire

$$\int_{\Sigma} d\alpha = \sum_k \int_{\Sigma} d\alpha^k \quad (26.12.57)$$

$$\int_{\partial\Sigma} d\alpha = \sum_k \int_{\partial\Sigma} \alpha^k \quad (26.12.58)$$

Ricordiamo che

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j$$

possiamo definire il differenziale di  $\alpha$  che è 2 forma

$$\omega = d\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} F_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \alpha_j(x) dx_i \wedge dx_j$$

dove

$$F_{ij}(x) = \partial_{x_i} \alpha_j(x) - \partial_{x_j} \alpha_i(x).$$

**Lemma 26.12.3.** (*Formula di Stokes - Green*) Se

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$$

è una superficie regolare orientabile e con bordo  $\partial\Sigma$  e

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) dx_j$$

è 1 - forma, allora

$$\int_{\Sigma} d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha. \quad (26.12.59)$$

## 26.13 Formula di Stokes (integrale di superfici del I tipo)

Se

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

e superficie connessa, regolare ed orientabile con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante  $\mathcal{F}$  sappiamo che per ogni  $x_0 \in \partial\Sigma$  esiste parametrizzazione

$$\varphi : I_{\varepsilon}^{-} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_{\infty} < \varepsilon, u_2 \leq 0\} \rightarrow W \cap \Sigma,$$

tale che  $W$  è intorno di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(0) = x_0$ ,

$$\varphi : I_{\varepsilon}^{-} \cap \{u_2 = 0\} \rightarrow W \cap \partial\Sigma,$$

finalmente l'orientabilità di  $Int(\Sigma)$  significa che possiamo scegliere la parametrizzazione tale che

$$\frac{\partial_{u_1}\varphi(u) \wedge \partial_{u_2}\varphi(u)}{\|\partial_{u_1}\varphi(u) \wedge \partial_{u_2}\varphi(u)\|} = N(\varphi(u)), \quad (26.13.60)$$

dove

$$x \in \Sigma \rightarrow N(x) \in \mathbb{S}^2$$

è la mappa di Gauss.

La formula di Stokes afferma che la forma differenziale

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^3 A_j(x) dx_j$$

soddisfa la relazione

$$\int_{\Sigma} d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha.$$

dove

$$d\alpha = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} F_{jk} dx_j \wedge dx_k$$

e

$$F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j.$$

Possiamo usare i due prodotti in  $\mathbb{R}^3$

$$\langle a, f \rangle = \sum_{j=1}^3 a_j f_j \quad (26.13.61)$$

$$a \times f = (a_2 f_3 - a_3 f_2, -a_1 f_3 + a_3 f_1, a_1 f_2 - a_2 f_1) \quad (26.13.62)$$

introdurre i due operatori differenziali

$$\langle \nabla, f(x) \rangle = \sum_{j=1}^3 \partial_j f_j(x) \quad (26.13.63)$$

e

$$\nabla \times f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, -\partial_1 f_3 + \partial_3 f_1, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) \quad (26.13.64)$$

Notazione per  $\langle \nabla, f(x) \rangle$  è  $\text{div } f$ .

Notazione per  $\nabla \times f$  è  $\text{rot } f$ .



**Lemma 26.13.1.** Se  $N = (N_1, N_2, N_3)$  é vettore e

$$F_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j,$$

allora

$$N_1 F_{23} - N_2 F_{13} + N_3 F_{12} = \langle N, \text{rot}A \rangle.$$

*Dimostrazione.* Segue dalla identità

$$\det[N, a, b] = \langle N, a \times b \rangle.$$

□

**Lemma 26.13.2.** Abbiamo la relazione

$$\varphi^* d\alpha = \langle N, \text{rot}A \rangle dS. \quad (26.13.65)$$

*Dimostrazione.* Abbiamo le relazioni

$$\varphi^* d\alpha = G_{\ell m}(u) du_\ell \wedge du_m = (G_{12} - G_{21}) du_1 \wedge du_2$$

con

$$G_{\ell m}(u) = \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} A_j(\varphi(u)) \partial_{u_\ell} \varphi_i(u) \partial_{u_m} \varphi_j(u)$$

Abbiamo

$$G_{12} - G_{21} = \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} A_j(\varphi(u)) (a_i b_j - a_j b_i)$$

con

$$a_i = \partial_{u_1} \varphi_i(u), \quad b_j = \partial_{u_2} \varphi_j(u).$$

Possiamo usare l'identità

$$\sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i} A_j(\varphi(u)) (a_i b_j - a_j b_i) = \det[\text{rot}A, a, b] = \langle a \times b, \text{rot}A \rangle.$$

Questa relazione e (26.13.60) implicano

$$\begin{aligned} \varphi^* d\alpha &= \langle \partial_{u_1} \varphi \times \partial_{u_2} \varphi, \text{rot}A \rangle du_1 \wedge du_2 = \\ &= \langle N(\varphi(u)), \text{rot}A \rangle \underbrace{\| \partial_{u_1} \varphi \times \partial_{u_2} \varphi \|}_{dS} du_1 \wedge du_2. \end{aligned}$$

□

**Corollario 26.13.1.** *Se*

$$\Sigma = \text{Int}(\Sigma) \cup \partial\Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

*e superficie connessa, regolare ed orientabile con bordo  $\partial\Sigma$  ed atlante  $\mathcal{F}$  e' orientazione indotta dalla orientazione di  $\text{Int}(\Sigma)$  allora abbiamo*

$$\int_{\Sigma} \langle N(x), \text{rot}A \rangle dS = \int_{\partial\Sigma} \langle T, A \rangle ds.$$

## 26.14 Forme multilineari antisimetriche

Sia  $1 \leq m \leq n$  e sia  $\chi$  una applicazione multilineare

$$\chi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$$

tael che sia lineare in ogni componente. Cosí deve valere la relazione

$$\begin{aligned} \chi(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + \mu v'_i, v_{i+1}, \dots, v_m) &= \\ = \lambda \chi(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m) &+ \mu \chi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_m) \end{aligned}$$

per ogni componente  $i$ , per ogni  $m$ -pla di vettori  $v_1, \dots, v_m$ , per ogni  $v_i, v'_i \in \mathbb{R}^n$ , e per ogni coppia di scalari  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . In altre parole, tenendo fisse tutte le variabili tranne la  $i$ -esima si ottiene una applicazione lineare.

L'insieme delle applicazioni  $m$ -lineari da  $\mathbb{R}^{mn}$  si indica con

$$L^m(\mathbb{R}^n)$$

e si dimostra essere uno spazio vettoriale.

Una applicazione multilineare e alternante se si annulla quando un vettore viene ripetuto:

$$\chi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$$

In altre parole,  $\chi(v_1, \dots, v_m) = 0$  quando i vettori  $v_1, \dots, v_m$  non sono tutti distinti. In generale

$$\chi(v_1, \dots, v_m) = 0$$

ogni volta che gli  $v_i$  sono linearmente dipendenti.

Una applicazione multilineare e antisimmetrica se lo scambio di due vettori ha come effetto un cambiamento di segno:

$$\chi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\chi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

**Lemma 26.14.1.** *I due concetti coincidono: una forma e alternante se e solo se e antisimmetrica.*

Il determinante e una funzione multilineare antisimmetrica. Si tratta di un esempio fondamentale: se  $\chi$  é una  $n$ - forma antisimmetrica in  $\mathbb{R}^n$  allora

$$\chi(v_1, \dots, v_n) = c \det[v_1, \dots, v_n].$$

cos'ipossiamo dire che il determinante e l'unica forma multilineare antisimmetrica

$$\chi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

che vale

$$\chi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

sulla base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 26.14.1.** *Useremmo la notazione*

$$A^m(\mathbb{R}^n)$$

per l'insieme di tutte le forme  $m$ - lineari antisimmetriche in  $\mathbb{R}^n$ .

Ovviamente  $A^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq m \leq n$  é un spazio lineare.

**Osservazione 26.14.2.** *Lo spazio*

$$A^m(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leq m \leq n$$

é un spazio lineare. Abbiamo inoltre

$$m > n, \implies A^m(\mathbb{R}^n) = \{0\}.$$

### Antisimetrizzazione, prodotto tensoriale e prodotto esterno

Data un forma

$$\chi \in L^m(\mathbb{R}^n)$$

$m$ -lineare possiamo considerare  $\mathcal{G}_m$  il gruppo di tutte le permutazioni di  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Per ogni  $s \in \mathcal{G}_m$  possiamo definire

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} 1, & \text{se la permutazione } s \text{ é pari;} \\ -1, & \text{se la permutazione } s \text{ é dispari.} \end{cases} \quad (26.14.66)$$

Se

$$v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$$

possiamo introdurre la nuova forma

$$\mathcal{A}(\chi)(v_1, \dots, v_m) = \frac{1}{m!} \sum_{s \in \mathcal{G}_m} \varepsilon(s) \chi(v_{s(1)}, v_{s(2)}, \dots, v_{s(m)}). \quad (26.14.67)$$

**Lemma 26.14.2.** *La mappa*

$$\mathcal{A} : \chi \in L^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{A}(\chi) \in A^m(\mathbb{R}^n)$$

soddisfa la proprietà

$$\mathcal{A}(\chi) = \chi$$

se  $\chi \in A^m(\mathbb{R}^n)$ .

Se

$$\chi_1 \in L^{m_1}(\mathbb{R}^n), \chi_2 \in L^{m_2}(\mathbb{R}^n)$$

sono due forme multi lineari, si può definire prodotto tensoriale

$$\chi_1 \otimes \chi_2 \in L^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$$

tramite l'identità

$$\begin{aligned} \chi_1 \otimes \chi_2(v_1, \dots, v_{m_1}, v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}) = & \quad (26.14.68) \\ \chi_1(v_1, \dots, v_{m_1}) \chi_2(v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}). & \end{aligned}$$

Il prodotto tensoriale è associativo,

$$\chi_1 \otimes (\chi_2 \otimes \chi_3) = (\chi_1 \otimes \chi_2) \otimes \chi_3.$$

**Definizione 26.14.1.** *Se*

$$\chi_1 \in A^{m_1}(\mathbb{R}^n), \chi_2 \in A^{m_2}(\mathbb{R}^n)$$

*sono due forme multilineari e antisimmetriche il prodotto esterno*

$$\chi_1 \wedge \chi_2 \in A^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n)$$

*é definito come segue*

$$\chi_1 \wedge \chi_2 = \frac{1}{m_1!m_2!} \mathcal{A}(\chi_1 \otimes \chi_2), \quad (26.14.69)$$

*dove*

$$\mathcal{A} : L^m(\mathbb{R}^n) \rightarrow A^m(\mathbb{R}^n)$$

*é l'operatore di antisimmetrizzazione definito in (26.14.67).*

**Esempio 26.14.1.** *La forma bilineare antisimmetrica  $dx_1 \wedge dx_2 \in A^2(\mathbb{R}^3)$  si puo definire usando la base  $e_1, e_2, e_3$  é una base canonica in  $\mathbb{R}^3$  e*

$$\underbrace{v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3}_v, \quad \underbrace{w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3}_w$$

*sono due vettori in  $\mathbb{R}^3$ , allora (26.9.32) ci da*

$$dx_1 \wedge dx_2(v, w) = v_1w_2 - v_2w_1.$$

*Per ogni coppia  $(k_1, k_2)$  con*

$$1 \leq k_1, k_2 \leq n, \quad k_1 \neq k_2$$

*possiamo definire la forma*

$$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \in A^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3,$$

*con*

$$dx_{k_1} \wedge dx_{k_2}(v, w) = v_{k_1}w_{k_2} - v_{k_2}w_{k_1}.$$

Se  $1 \leq m \leq n$  e consideriamo

$$(j_1, \dots, j_m)$$

una disposizione semplice di lunghezza  $m$  di elementi del insieme  $(1, 2, \dots, n)$ , cioè abbiamo una presentazione ordinata di  $m$  elementi di  $(1, 2, \dots, n)$  nella quale non si possono avere ripetizioni di uno stesso numero intero tra 1 e  $n$ . Possiamo definire la forma multilineare antisimmetrica

$$dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}$$

come segue.

**Definizione 26.14.2.** Sia  $e_1, e_2, \dots, e_n$  é una base canonica in  $\mathbb{R}^n$ . Possiamo definire la forma antisimmetrica multi lineare con

- a)  $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}(e_{k_1}, \dots, e_{k_m}) = 1$ , se  $(k_1, \dots, k_m)$  é una permutazione pari di  $(j_1, \dots, j_m)$ ;
- b)  $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}(e_{k_1}, \dots, e_{k_m}) = -1$ , se  $(k_1, \dots, k_m)$  é una permutazione dispari di  $(j_1, \dots, j_m)$ ;
- c)  $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}(e_{k_1}, \dots, e_{k_m}) = 0$ , se  $(k_1, \dots, k_m)$  non é una permutazione di  $(j_1, \dots, j_m)$ .

Ogni forma multi lineare antisimmetrica  $\phi$  in  $\mathbb{R}^n$  si puo presentare (in modo unico) come

$$\phi = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \phi_{j_1 \dots j_m} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m},$$

cosi l'insieme

$$\{dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}; 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n\}$$

é una base di tutte le forme multi lineari antisimmetriche.

Abbiamo le seguente proprietá

$$\begin{aligned} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \wedge \dots \wedge dx_k &= & (26.14.70) \\ = -dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \wedge \dots \wedge dx_k, \\ dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \wedge \dots \wedge dx_k &= 0. \end{aligned}$$

**Forme differenziali di grado m**

**Definizione 26.14.3.** Una  $m$ -forma é un'applicazione  $x \rightarrow \alpha(x)$ , definita su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ed ad ogni  $x \in U$  associa una forma multi lineare antisimmetrica

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \alpha_{j_1 \dots j_m}(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}. \quad (26.14.71)$$

dove le forme multi lineari  $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_m}$  sono definiti in Definizione (26.14.2).

**2- forme differenziali esatte in  $\mathbb{R}^3$ .**

Prendendo una forma differenziale di grado 2 in  $\mathbb{R}^3$

$$\omega = \omega_3(x) dx_1 \wedge dx_2 - \omega_2(x) dx_1 \wedge dx_3 + \omega_1(x) dx_2 \wedge dx_3$$

possiamo introdurre il differenziale di  $\omega$  usando l'identitá

$$d\omega = d\omega_3(x) \wedge dx_1 \wedge dx_2 - d\omega_2(x) \wedge dx_1 \wedge dx_3 + d\omega_1(x) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (26.14.72)$$

usando le relazioni (26.14.70) e

$$d\omega_j(x) = \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} \omega_j(x) dx_k$$

otteniamo

$$d\omega = (\partial_{x_3} \omega_3(x) + \partial_{x_2} \omega_2 + \partial_{x_1} \omega_1) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \quad (26.14.73)$$

La 2-forma

$$\omega = \omega_3(x) dx_1 \wedge dx_2 - \omega_2(x) dx_1 \wedge dx_3 + \omega_1(x) dx_2 \wedge dx_3$$

si chiama chiusa se

$$\sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \omega_j(x) = 0.$$

La forma

$$\omega = \omega_3(x)dx_1 \wedge dx_2 - \omega_2(x)dx_1 \wedge dx_3 + \omega_1(x)dx_2 \wedge dx_3$$

si chiama esatta se

$$\omega = d\alpha,$$

dove

$$\alpha = \sum_{j=1}^3 A_j dx_j,$$

così la forma è esatta se e solo se

$$\omega_1 = F_{23}, \omega_2 = -F_{13}, \omega_3 = F_{23}$$

con

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

## 26.15 Partizione di unità per domini con frontiere regolari

Se

$$U \subset \mathbb{R}^3$$

un aperto connesso e limitato in  $\mathbb{R}^3$  con frontiera regolare in classe  $C^1$ , tale che

$$\partial U = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_N,$$

dove l'unione è disgiunta e ogni

$$\Sigma_j, j = 1, \dots, N$$

è una superficie regolare e connessa.

L'insieme

$$\bar{U} = U \cup \partial U$$

è un compatto e possiamo trovare per ogni  $x \in U$  una palla  $B(x, r)$  tale che

$$B(x, r) \subset U.$$



Per ogni  $x \in \partial U$  possiamo trovare una palla  $B(x, r)$  tale che esiste un diffeomorfismo

$$\varphi_x : I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 \leq 0\} \rightarrow B(x, r) \cap \overline{U}$$

tale che  $\varphi_x(0) = x$  e

$$\varphi_x : \partial I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 = 0\} \rightarrow B(x, r) \cap \partial U.$$

In questo modo otteniamo un ricoprimento

$$\overline{U} \subset \cup_x B(x, r).$$

Se  $\overline{U}$  é un compatto, possiamo scegliere un sottoricoprimento finito

$$\{B(x_j, r_j), j = 1, \dots, N\}.$$

Seguendo la dimostrazione del Lemma 26.2.1 possiamo costruire una partizione dell'unitá subordinata al ricoprimento

$$\{B(x_j, r_j), j = 1, \dots, N\}.$$

**Lemma 26.15.1.** *Se  $\overline{U}$  é un compatto con ricoprimento*

$$\{B(x_j, r_j), j = 1, \dots, N\}.$$

*esiste un numero finito di funzioni*

$$\psi_j : \overline{U} \rightarrow [0, 1],$$

*tale che*

**a)**  $\psi_j \in C^m(\overline{U});$

**b)**  $\text{supp}\psi_j = \overline{B(x_j, r_j)};$

**c)**  $\sum_j \psi_j(x) = 1.$

*Dimostrazione.* Sia

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$$

la funzione definita in (26.2.5)

Possiamo definire

$$g_k(x) = \psi \left( \frac{\|x - x_k\|}{r_k} \right),$$

dove  $\psi(s)$  soddisfa (26.2.5). Le funzioni soddisfano le proprietà a), b) e

$$\sum_k g_k(x) = G(x) > 0, \forall x \in \bar{U}.$$

Ponendo

$$f_k(x) = \frac{g_k(x)}{G(x)},$$

allora abbiamo tutte le proprietà a), b), c). □

## 26.16 Formula di Stokes - Gauss in $\mathbb{R}^3$

Sia

$$U \subset \mathbb{R}^3$$

un aperto connesso e limitato in  $\mathbb{R}^3$  con frontiera regolare in classe  $C^1$ , tale che

$$\partial U = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_N,$$

dove l'unione è disgiunta e ogni

$$\Sigma_j, j = 1, \dots, N$$

è una superficie regolare e connessa. Data una 2 forma

$$\omega = \omega_1(x) dx_2 \wedge dx_3 - \omega_2(x) dx_1 \wedge dx_3 + \omega_3(x) dx_1 \wedge dx_2$$

sappiamo che il differenziale di  $\omega$  è

$$d\omega = \left( \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \omega_j(x) \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

**Lemma 26.16.1.** (*Formula di Stokes nello spazio*) Se  $U \subset \mathbb{R}^3$  é aperto in  $\mathbb{R}^3$  e

$$\partial U = \cup_{j=1}^M \Sigma_j$$

dove  $\Sigma_j$  é una superficie regolare, compatta e connessa, allora

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega. \quad (26.16.74)$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo (26.17.82) per

$$\omega_2 = \omega_3 = 0,$$

cioé supponiamo

$$\omega = \omega_1(x) dx_2 \wedge dx_3.$$

Allora

$$d\omega = \partial_{x_1} \omega_1(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Usiamo la partizione dell'unitá

$$\sum_k \psi_k(x) = 1,$$

tale che

- a)  $\psi_k \in C^m(\bar{U})$ ;
- b)  $\text{supp} \psi_k = \overline{B(x_k, r_k)}$ ;

del Lemma 26.15.1. Possiamo scrivere

$$\omega = \sum_k \omega^{(k)},$$

dove

$$\omega^k = \underbrace{\psi_k(x) \omega_1(x)}_{\omega_1^{(k)}} dx_2 \wedge dx_3$$

Abbiamo inoltre le relazioni

$$d\omega = \sum_k d(\omega^k),$$

dove

$$d(\omega^k) = \partial_{x_1} \omega_1^{(k)}(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Lo scopo é di dimostrare l'identitá

$$\int_{U \cap B(x_k, r_k)} d\omega^k = \int_{\partial U \cap B(x_k, r_k)} \omega^k. \quad (26.16.75)$$

Prima consideriamo il caso quando

$$B(x_k, r_k) \subset U.$$

In questo caso usiamo le relazioni

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \omega_j^{(k)}(x) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

La proprietá

$$\partial U \cap B(x_k, r_k) = \emptyset$$

implica

$$\int_{\partial U \cap B(x_k, r_k)} \omega^k = 0$$

Cosí otteniamo (26.16.75) quando

$$B(x_k, r_k) \subset U.$$

Nel caso  $x_k \in \partial U$  esiste un diffeomorfismo

$$\varphi : I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 \leq 0\} \rightarrow B(x_k, r_k) \cap \bar{U}$$

tale che  $\varphi_x(0) = x_k$  e

$$\varphi : \partial I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 = 0\} \rightarrow B(x_k, r_k) \cap \partial U.$$

Abbiamo le identitá

$$\begin{aligned} & \varphi^*(d\omega)(u) = \\ & = \sum_{j_1, j_2, j_3} \partial_{x_1} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_1}} \varphi_1(u) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3}. \end{aligned}$$

Possiamo usare le relazioni

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, j_2, j_3} \partial_{u_{j_1}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3} &= \\ &= \det[\nabla_u \varphi_2, \nabla_u \varphi_2, \nabla_u \varphi_3] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, j_2, j_3} \partial_{u_{j_1}} \varphi_3(u) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3} &= \\ &= \det[\nabla_u \varphi_3, \nabla_u \varphi_2, \nabla_u \varphi_3] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 = 0. \end{aligned}$$

Così usando

$$\sum_{\ell=1}^3 \partial_{x_\ell} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_1}} \varphi_\ell(u) = \partial_{u_{j_1}} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \varphi^*(d\omega^{(k)})(u) &= \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3} \partial_{u_{j_1}} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3} = \\ &= \det[\nabla_u \omega_1^{(k)}(\varphi(u)), \nabla_u \varphi_2(u), \nabla_u \varphi_3(u)] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3. \end{aligned}$$

Abbiamo secondo la definizione

$$\begin{aligned} \int_{U \cap B(x_k, r_k)} d\omega^k &= \iiint_{\mathbb{R}^3 \cap \{u_3 \leq 0\}} \varphi^*(d\omega^k) = \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3} \iiint_{u_3 \leq 0} \partial_{u_{j_1}} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3}. \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\iiint_{u_3 \leq 0} \partial_{u_{j_1}} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3} = 0$$

se  $j_1 \neq 3$ . Così abbiamo la relazione

$$\sum_{j_1, j_2, j_3} \iiint_{u_3 \leq 0} \partial_{u_{j_1}} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_{j_1} \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_2, j_3=1,2} \iiint_{u_3 \geq 0} \partial_{u_3} \omega_1^{(k)}(\varphi(u)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u) du_3 \wedge du_{j_2} \wedge du_{j_3} = \\
&= \sum_{j_2, j_3=1,2} \iint_{\mathbb{R}^2} \omega_1^{(k)}(\varphi(u', 0)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u', 0) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u', 0) du_{j_2} \wedge du_{j_3},
\end{aligned}$$

dove  $u' = (u_1, u_2)$ . Siamo arrivati alla relazione

$$\int_{U \cap B(x_k, r_k)} d\omega^k = \tag{26.16.76}$$

$$\sum_{j_2, j_3=1,2} \iint_{\mathbb{R}^2} \omega_1^{(k)}(\varphi(u', 0)) \partial_{u_{j_2}} \varphi_2(u', 0) \partial_{u_{j_3}} \varphi_3(u', 0) du_{j_2} \wedge du_{j_3}.$$

Abbiamo la rappresentazione del integrale di superficie

$$\int_{\partial U \cap B(x_k, r_k)} \omega^{(k)} = \iint_{\partial I_\varepsilon^-} \psi^*(\omega^{(k)}).$$

con

$$\psi(u') = \varphi(u', 0).$$

Il pull-back é

$$\psi^*(\omega^{(k)})(u') = \sum_{j_2, j_3=1,2} \omega^{(k)}(\psi(u')) \partial_{u_{j_2}} \psi_2(u') \partial_{u_{j_3}} \psi_3(u') du_{j_2} \wedge du_{j_3}$$

e la relazione (26.16.76) implica (26.16.75).  $\square$

## 26.17 Formula di Gauss - Green

Sia

$$U \subset \mathbb{R}^3$$

un aperto connesso e limitato in  $\mathbb{R}^3$  con frontiera regolare in classe  $C^1$ , tale che

$$\partial U = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_N,$$

dove l'unione é disgiunta e ogni

$$\Sigma_j, j = 1, \dots, N$$

é una superficie regolare e connessa. Dato uno campo vettoriale

$$A(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x)).$$

Si puo vedere la seguente relazione tra integrale della

$$\langle \nabla, A \rangle = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} A_j$$

su  $U$  e l'integrale del differenziale della 2-forma

$$\omega = A_1(x) dx_2 \wedge dx_3 - A_2(x) dx_1 \wedge dx_3 + A_3(x) dx_1 \wedge dx_2$$

sappiamo che il differenziale di  $\omega$  é

$$d\omega = \left( \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \omega_j(x) \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Abbiamo la relazione

$$\int_U \langle \nabla, A \rangle dx = \int_U d\omega. \quad (26.17.77)$$

Se  $x_0 \in \partial U$ , possiamo introdurre riferimento tale che  $x_0 = 0$  e possiamo rappresentare la frontiera (usando il teorema della funzione implicita) con l'equazione

$$x_3 = h(x_1, x_2), x_1, x_2 \in I_\varepsilon, \quad (26.17.78)$$

tale che  $U$  localmente é definita con

$$x_3 < h(x_1, x_2).$$

Possiamo inoltre scegliere il riferimento in modo tale che

$$\nabla h(0) = 0. \quad (26.17.79)$$

Così nella parametrizzazione locale

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, u_3) := u_1, \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, u_3) := u_2 \\ x_3 &= \varphi_3(u_1, u_2, u_3), \quad \varphi_3(u_1, u_2, u_3) = u_3 + h(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (26.17.80)$$

Possiamo inoltre definire

$$N(x_0) = (0, 0, 1)$$

come vettore normale ESTERNO per  $U$ . Per  $u = (u_1, u_2, 0)$  vicino a zero possiamo definire

$$N(u) = \frac{\partial_{u_1}\psi(u_1, u_2, 0) \times \partial_{u_2}\psi(u_1, u_2, 0)}{\|\partial_{u_1}\psi(u) \times \partial_{u_2}\psi(u)\|}$$

come vettore normale ESTERNO (rispetto  $U$ ). In questo modo è trovato un diffeomorfismo

$$\varphi : I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 \leq 0\} \rightarrow B(x_0, r_0) \cap \overline{U}$$

tale che  $\varphi_x(0) = x_0$  e

$$\varphi : \partial I_\varepsilon^- = \{u \in \mathbb{R}^3; \|u\|_\infty < \varepsilon, u_3 = 0\} \rightarrow B(x_k, r_k) \cap \partial U.$$

possiamo considerare la parametrizzazione

$$\psi(u') = \varphi(u', 0).$$

Abbiamo le relazioni

**Lemma 26.17.1.**

$$\psi^*(\omega)(u_1, u_2) = \langle A, N \rangle dS, \quad (26.17.81)$$

dove

$$N(u) = \frac{\partial_{u_1}\psi \times \partial_{u_2}\psi}{\|\partial_{u_1}\psi \times \partial_{u_2}\psi\|}$$

è il vettore normale esterno per  $U$  e

$$dS = \|\partial_{u_1}\psi \times \partial_{u_2}\psi\| du_1 du_2.$$



*Proof.* Abbiamo l'identità

$$\begin{aligned} \psi^*(\omega)(u_1, u_2) &= \sum_{j_2, j_3=1,2} \omega_1(\psi(u')) \partial_{u_{j_2}} \psi_2(u') \partial_{u_{j_3}} \psi_3(u') du_{j_2} \wedge du_{j_3} - \\ &- \sum_{j_1, j_3=1,2} \omega_2(\psi(u')) \partial_{u_{j_1}} \psi_1(u') \partial_{u_{j_3}} \psi_3(u') du_{j_1} \wedge du_{j_3} + \\ &+ \sum_{j_1, j_2=1,2} \omega_3(\psi(u')) \partial_{u_{j_1}} \psi_1(u') \partial_{u_{j_2}} \psi_2(u') du_{j_1} \wedge du_{j_2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\psi^*(\omega)(u_1, u_2) = \det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \partial_{u_1} \psi_1 & \partial_{u_1} \psi_2 & \partial_{u_1} \psi_3 \\ \partial_{u_2} \psi_1 & \partial_{u_2} \psi_2 & \partial_{u_2} \psi_3 \end{pmatrix} du_1 \wedge du_2.$$

Usando la relazione

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \langle A, b \times a \rangle.$$

otteniamo (27.5.21).

□

**Corollario 26.17.1.** (*Formula di Gauss - Green nello spazio*) Se  $U \subset \mathbb{R}^3$  è aperto in  $\mathbb{R}^3$  e

$$\partial U = \cup_{j=1}^M \Sigma_j$$

dove  $\Sigma_j$  è una superficie regolare, compatta e connessa, allora

$$\int_U \langle \nabla, A \rangle = \int_{\partial U} \langle N, A \rangle dS, \quad (26.17.82)$$

dove  $N$  è vettore normale esterno per  $U$ .

*Dimostrazione.* Si applica il Teorema di Stokes insieme con Lemma 26.17.1. □

# Chapter 27

## Esercizi sui integrali sulle superficie

### 27.1 Integrali sulle superficie del I tipo

Al inizio trattiamo superficie con atlante composta da unica carta locale.

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dove  $I \subset \mathbb{R}^2$  é un intervallo aperto.

**Problema 27.1.1.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS,$$

dove  $\Sigma$  e la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Risp  $8\pi a^4/3$ .

**Problema 27.1.2.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} (\sqrt{x^2 + y^2}) dS,$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - z^2 = 0, 0 \leq z \leq a\}.$$

Risp  $2\sqrt{2}\pi a^3/3$ .

**Problema 27.1.3.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\Sigma} z dS,$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + (z - 2)^2 = 4, x^2 + y^2 < z^2, z > 0\}.$$

*Soluzione.* Usiamo la parametrizzazione

$$x = 2 \cos \varphi,$$

$$y = y,$$

$$z = 2 + 2 \sin \varphi,$$

La disequazione

$$x^2 + y^2 < z^2$$

implica

$$y^2 < 4 + 8 \sin \varphi + 4 \sin^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi = 8 \sin^2 \varphi + 8 \sin \varphi.$$

Abbiamo il dominio normale

$$I = \{(\varphi, y); -k(\varphi) \leq y \leq k(\varphi), \varphi \in (0, \pi)\},$$

dove

$$k(\varphi) = 2\sqrt{2}\sqrt{\sin^2 \varphi + \sin \varphi}.$$

In questo modo, troviamo

$$\int_{\Sigma} z dS = \int_0^{\pi} \int_{-k(\varphi)}^{k(\varphi)} 2(1 + \sin \varphi) \sqrt{g(y, \varphi)} dy d\varphi,$$

dove  $g(y, \varphi) = 4$  e quindi

$$\int_{\Sigma} z dS = 16\sqrt{2} \int_0^{\pi} (1 + \sin \varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sin \varphi} d\varphi. \quad (27.1.1)$$

Cambiamento di variabili  $t \rightarrow \pi - t$  implica

$$I = \int_0^\pi (1 + \sin \varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \sin \varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sin \varphi} d\varphi.$$

Usando altro cambiamento di variabili  $1 + \sin t = x$  si trova

$$\begin{aligned} I/2 &= \int_0^{\pi/2} (1 + \sin \varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \int_1^2 \frac{x \sqrt{x(x-1)}}{\sqrt{x(2-x)}} dx = \int_1^2 \frac{x \sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} dx \end{aligned}$$

Così (27.1.1) ci da

$$\int_{\Sigma} z dS = 32\sqrt{2} \int_1^2 \frac{x \sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} dx. \quad (27.1.2)$$

Altra sostituzione

$$\sqrt{2-x} = \cos t$$

ci da

$$\int_1^2 \frac{x \sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} dx = 2 \int_0^{\pi/2} (2 - \cos^2 t) \sin^2 t dt = \frac{7\pi}{8}$$

e usando (27.1.2), troviamo

$$\int_{\Sigma} z dS = 32\sqrt{2} \frac{7\pi}{8} = 28\sqrt{2}\pi.$$

□

**Problema 27.1.4.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\Sigma} z dS,$$

dove

$$S = \{(x, y, z); z = \frac{x^2 + y^2}{2}, 0 \leq z \leq 1\}.$$

*Idea della soluzione.* Usiamo la parametrizzazione

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2z} \cos \varphi, \\y &= \sqrt{2z} \sin \varphi, \\z &= z,\end{aligned}$$

dove  $0 \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Abbiamo inoltre

$$dS = \sqrt{g(z, \varphi)} dz d\varphi,$$

dove  $g(z, \varphi)$  é il determinante di

$$G(z, \varphi) = \begin{pmatrix} \langle \partial_z F, \partial_z F \rangle & \langle \partial_z F, \partial_\varphi F \rangle \\ \langle \partial_\varphi F, \partial_z F \rangle & \langle \partial_\varphi F, \partial_\varphi F \rangle \end{pmatrix},$$

con

$$F(z, \varphi) = (\sqrt{2z} \cos \varphi, \sqrt{2z} \sin \varphi, z)$$

usando le relazioni

$$\partial_z F(z, \varphi) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{z}} \cos \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{z}} \sin \varphi, 1 \right)$$

$$\partial_\varphi F(z, \varphi) = \left( -\sqrt{2z} \sin \varphi, \sqrt{2z} \cos \varphi, 0 \right)$$

troviamo

$$G(z, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + 1/(2z) & 0 \\ 0 & 2z \end{pmatrix},$$

e quindi

$$dS = \sqrt{1 + 2z} dz d\varphi.$$

L'integrale sulla superficie é

$$\int_{\Sigma} z dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \sqrt{1 + 2z} dz d\varphi = 2\pi \int_0^1 z \sqrt{1 + 2z} dz. \quad (27.1.3)$$

La sostituzione

$$\sqrt{1 + 2z} = t$$

implica

$$z = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad dz = t dt$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 z\sqrt{1+2z}dz &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{2} t dt = \frac{1}{2} \left( \int_1^{\sqrt{3}} t^4 - t^2 dt \right) = \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{10} - \frac{1}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{15} + \frac{2\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

Usando (27.1.3) deduciamo

$$\int_{\Sigma} z dS = \frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}.$$

□

**Problema 27.1.5.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} \frac{(x_1 - 1)}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}} dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3); (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 = 1\}.$$

*Suggerimento.* La sostituzione

$$x_1 - 1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$$

trasforma l'integrale in

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} dS$$

dove

$$\tilde{\Sigma} = \{(y_1, y_2, y_3); y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 = 1\}.$$

La simmetria

$$S(y_1, y_2, y_3) = (-y_1, y_2, y_3)$$

é tale che  $\tilde{\Sigma}$  é invariante rispetto  $S$ , la funzione

$$\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

é dispari rispetto  $S$  e quindi

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} dS = 0.$$

□

**Problema 27.1.6.** *Calcolare l'integrale*

$$\int_{\Sigma} \frac{dS}{z},$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + (z - 2)^2 < 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}.$$

*Breve soluzione.* Usiamo la parametrizzazione

$$x = z \cos \varphi,$$

$$y = z \sin \varphi,$$

$$z = z$$

La condizione

$$x^2 + (z - 2)^2 < 4, z > 0$$

ed equivalente a

$$0 < z < \frac{4}{1 + \cos^2 \varphi}.$$

Così deduciamo

$$(z, \varphi) \in I = \left\{ 0 < z < \frac{4}{1 + \cos^2 \varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

Abbiamo la relazione

$$dS = \sqrt{2} z dz d\varphi$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \frac{dS}{z} &= \sqrt{2} \iint_I dz d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{4/(1+\cos^2 \varphi)} dz d\varphi = 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2 \varphi)} = \\ &= 16\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2 \varphi)}.\end{aligned}$$

Usando la sostituzione

$$\tan \varphi = u$$

troviamo

$$d\varphi = \frac{du}{1+u^2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+u^2}$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2 \varphi)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{2+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Alla fine otteniamo

$$\int_{\Sigma} \frac{dS}{z} = 16\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 8\pi.$$

□

**Problema 27.1.7.** Calcolare il flusso del campo  $(0, 0, 1/z)$  attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + (z-2)^2 < 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}.$$

*Breve soluzione.* Usiamo la parametrizzazione

$$\begin{aligned}x &= z \cos \varphi, \\ y &= z \sin \varphi, \\ z &= z.\end{aligned}\tag{27.1.4}$$

La condizione

$$x^2 + (z-2)^2 < 4, z > 0$$



ed equivalente a

$$0 < z < \frac{4}{1 + \cos^2 \varphi}.$$

Così deduciamo

$$(z, \varphi) \in I = \left\{ 0 < z < \frac{4}{1 + \cos^2 \varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

Per ogni parametrizzazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi(z, \varphi),$$

abbiamo la relazione

$$F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy = \langle F(\Psi(z, \varphi)), \partial_z \Psi \times \partial_\varphi \Psi \rangle$$

e con  $F = (0, 0, 1/z)$  e parametrizzazione (27.2.5) troviamo

$$\Psi^* \left( \frac{dx \wedge dy}{z} \right) = dz d\varphi$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{dx \wedge dy}{z} &= \iint_I dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{4/(1+\cos^2 \varphi)} dz d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)} = \\ &= 16 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Usando la sostituzione

$$\tan \varphi = u$$

troviamo

$$d\varphi = \frac{du}{1+u^2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+u^2}$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + \cos^2 \varphi)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{2+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Alla fine otteniamo

$$\int_{\Sigma} \frac{dx \wedge dy}{z} = 16\sqrt{2}\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}\pi.$$

□

**Problema 27.1.8.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} \frac{3x_1 - 3}{\sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}} dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3); (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 = 1\}.$$

**Problema 27.1.9.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} \frac{3x_1 + 3}{\sqrt{(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2}} dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3); 3(x_1 + 1)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

**Problema 27.1.10.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} \frac{3x_2 - 6}{\sqrt{x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2}} dS$$

dove

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3); 3x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 4\}.$$

**Problema 27.1.11.** *Trovare il baricentro della superficie laterale di*

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = az, 0 \leq z \leq a\}.$$

Risp.  $(0, 0, z_0)$ ,  $z_0 = (25\sqrt{5} + 1)/(10(5\sqrt{5} - 1))$ .

**Problema 27.1.12.** *Calcolare la divergenza ed il flusso (rispetto la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) della forza di gravita'  $F = -m \vec{r} / |\vec{r}|^3$ .*

Suggerimento. Il flusso della forza  $F = F(\vec{r})$  rispetto la superficie  $S$  é  $\int_S F \cdot N dS$ . Risp.  $-4\pi m$ .

## 27.2 Integrali di 2-forme sulle superficie.

**Problema 27.2.1.** *Calcolare*

$$I = \iint_S x^{-1} dy \wedge dz + \int \int_S y^{-1} dz \wedge dx + \int \int_S z^{-1} dx \wedge dy$$

dove  $S$  é l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*Suggerimento.* Usiamo la parametrizzazione

$$x = a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = b \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = c \cos \theta$$

e via (27.2.7) troviamo con

$$F(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta)$$

$$\partial_\theta F = (a \cos \theta \cos \varphi, b \cos \theta \sin \varphi, -c \sin \theta),$$

$$\partial_\varphi F = (-a \sin \theta \sin \varphi, b \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

e quindi

$$\partial_\theta F \times \partial_\varphi F = (bc \sin^2 \theta \cos \varphi, ac \sin^2 \theta \sin \varphi, ab \sin \theta \cos \theta)$$

Cosí troviamo

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

□

Risp.  $4\pi abc(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2})$ .

**Problema 27.2.2.** Calcolare l'integrale

$$\int_{\Sigma} \frac{dx \wedge dy}{z},$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + (z - 2)^2 < 4, x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}.$$

*Breve soluzione.* Usiamo la parametrizzazione

$$\begin{aligned} x &= z \cos \varphi, \\ y &= z \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{27.2.5}$$

La condizione

$$x^2 + (z - 2)^2 < 4, z > 0$$

ed equivalente a

$$0 < z < \frac{4}{1 + \cos^2 \varphi}.$$

Così deduciamo

$$(z, \varphi) \in I = \left\{ 0 < z < \frac{4}{1 + \cos^2 \varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

Per ogni parametrizzazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi(z, \varphi),$$

abbiamo la relazione

$$F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy = \langle F(\Psi(z, \varphi)), \partial_z \Psi \times \partial_\varphi \Psi \rangle$$

e con  $F = (0, 0, 1/z)$  e parametrizzazione (27.2.5) troviamo

$$\Psi^* \left( \frac{dx \wedge dy}{z} \right) = dz d\varphi$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{dx \wedge dy}{z} &= \iint_I dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{4/(1+\cos^2 \varphi)} dz d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2 \varphi)} = \\ &= 16 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Usando la sostituzione

$$\tan \varphi = u$$

troviamo

$$d\varphi = \frac{du}{1+u^2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+u^2}$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2 \varphi)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+u^2}} \frac{du}{1+u^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{2+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Alla fine otteniamo

$$\int_{\Sigma} \frac{dx \wedge dy}{z} = 16\sqrt{2}\frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2}\pi.$$

□

**Problema 27.2.3.** *Calcolare*

$$\int \int_S z dx \wedge dy + \int \int_S x dy \wedge dz$$

dove  $S : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ .

Risp.  $8\pi abc/3$ .

**Problema 27.2.4.** *Calcolare*

$$\int \int_S x^2 dy \wedge dz + \int \int_S y^2 dz \wedge dx + \int \int_S z^2 dx \wedge dy$$

dove  $S$  é la superficie del cubo

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a.$$

Risp.  $3a^4$

**Problema 27.2.5.** *Calcolare*

$$\int \int_S x dy \wedge dz + \int \int_S y dz \wedge dx + \int \int_S z dx \wedge dy$$

dove  $S$  é la superficie del piramide

$$0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x + y + z \leq a.$$

Risp.  $a^3/2$

L'espressione

$$\beta = F_1 dx_2 \wedge dx_3 - F_2 dx_1 \wedge dx_3 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$$

definisce il flusso del campo  $F = (F_1, F_2, F_3)$  attraverso la superficie  $\Sigma$  come segue

$$\text{Flusso}(F; \Sigma) = \int_{\Sigma} \beta. \quad (27.2.6)$$

**Problema 27.2.6.** *Verificare l'identitá*

$$\text{Flusso}(F; \Sigma) = \int_{\Sigma} \langle F, N \rangle dS. \quad (27.2.7)$$

*Soluzione.* Sia

$$\Sigma : x = \varphi(t), t = (t_1, t_2) \in U$$

é una carta di  $\Sigma$  Abbiamo la relazione

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \beta &= \int_U F_1(\varphi(t)) (\partial_{t_1} \varphi_2 \partial_{t_2} \varphi_3 - \partial_{t_1} \varphi_3 \partial_{t_2} \varphi_2) + \\ &+ \int_U F_2(\varphi(t)) (\partial_{t_1} \varphi_3 \partial_{t_2} \varphi_1 - \partial_{t_1} \varphi_1 \partial_{t_2} \varphi_3) + \\ &+ \int_U F_3(\varphi(t)) (\partial_{t_1} \varphi_1 \partial_{t_2} \varphi_2 - \partial_{t_1} \varphi_2 \partial_{t_2} \varphi_1) = \\ &= \int_U \langle F(\varphi(t)), \partial_{t_1} \varphi(t) \times \partial_{t_2} \varphi(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

□

**Problema 27.2.7.** Calcolare il flusso del campo  $(x^2, y^2, z^2)$  attraverso la semisfera

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = a^2, 0 \leq z\}.$$

Risp.  $\pi a^4/2$ .

**Problema 27.2.8.** Calcolare il flusso del campo  $(x + 3y^5, y + 10xz, z - xy)$  attraverso la semisfera

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z\}.$$

Risp.  $2\pi$ .

### 27.2.1 La prima forma differenziale

Sia

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) \in D$$

l'equazione locale della superficie  $\Sigma$ . I coefficienti

$$g_{ij} = \langle \partial_{u_i} \vec{r}, \partial_{u_j} \vec{r} \rangle, \quad i, j = 1, 2$$

definiscono la forma quadratica

$$Q(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} u_i v_j$$

si chiama la prima forma differenziale.

**Problema 27.2.9.** Dimostrare che

$$dS = \sqrt{g} du_1 du_2,$$

dove  $g = \det(g_{ij})$ .

## 27.3 Coordinate polari e cilindriche

### 27.3.1 Coordinate polari

Le tre coordinate cartesiane di un punto si ottengono dalle tre coordinate sferiche di quel punto con le formule:

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

dove  $\phi \in [0, 2\pi)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ . Per integrali tripli

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 < a^2} f(x, y, z) dx dy dz$$

possiamo usare la relazione

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta.$$

Ponendo

$$e(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$\partial_\phi e(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_\theta e(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

**Lemma 27.3.1.**

$$\|e(\phi, \theta)\| = 1, \quad \|\partial_\phi e(\phi, \theta)\| = \sin \theta, \quad \|\partial_\theta e(\phi, \theta)\| = 1.$$

*I tre vettori*

$$e(\phi, \theta), \quad \frac{\partial_\phi e(\phi, \theta)}{\|\partial_\phi e(\phi, \theta)\|}, \quad \partial_\theta e(\phi, \theta),$$

*definiscono una base ortonormale in  $\mathbb{R}^3$  per  $0 < \theta < \pi$ .*



Se una superficie é deinita sulla sfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, a > 0,$$

possiamo parametrizzarla con

$$x(\phi, \theta) = ae(\phi, \theta),$$

cioé

$$x_1 = a \sin \theta \cos \phi,$$

$$x_2 = a \sin \theta \sin \phi,$$

$$x_3 = a \cos \theta,$$

dove  $\phi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, \pi]$ . Per integrali sulle superfici del I tipo

$$\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2} f(x) dS,$$

possiamo usare

$$dS = a^2 \sin \theta d\phi d\theta.$$

Per integrali sulle superfici del II tipo possiamo procedere usando

$$dx_j = \partial_\phi x_j d\phi + \partial_\theta x_j d\theta$$

o

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} &= a \partial_\phi e(\phi, \theta) d\phi + a \partial_\theta e(\phi, \theta) d\theta = \\ &= a \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi + a \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} d\theta. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$dx_1 \wedge dx_2 = -a^2 (\sin \theta \cos \theta) d\phi \wedge d\theta,$$

$$dx_1 \wedge dx_3 = a^2 (\sin^2 \theta \sin \phi) d\phi \wedge d\theta,$$

$$dx_2 \wedge dx_3 = -a^2 (\sin^2 \theta \cos \phi) d\phi \wedge d\theta.$$

Sono relazioni utili per integrali sulle superfici del II tipo.

**Problema 27.3.1.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

dove

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = a^2, 0 \leq z\}.$$

Risp.  $\pi a^4/2$ .

### 27.3.2 Coordinate cilindriche

Il sistema di coordinate cilindriche è un sistema di coordinate che estende il sistema bidimensionale polare aggiungendo una terza coordinata, che misura l'altezza di un punto dal piano base, in modo simile a quello in cui si introduce la terza dimensione nel piano cartesiano. La terza coordinata è spesso chiamata  $h$ , e l'intera terna è quindi  $(r, \phi, h)$ .

Le tre coordinate cilindriche possono essere convertite in coordinate cartesiane con le formule

$$x = r \cos \phi \quad (27.3.8)$$

$$y = r \sin \phi \quad (27.3.9)$$

$$z = h. \quad (27.3.10)$$

Una dominio per quale le coordinate cilindriche sono utili è una superficie di rotazione (intorno dell'asse  $z$ ) tale che

$$z > g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Per integrali tripli

$$\iiint_{g(\sqrt{x^2+y^2}) < z} f(x, y, z) dx dy dz$$

possiamo usare la relazione

$$dx dy dz = r dr d\phi dh.$$

Se una superficie é definita con

$$z = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

possiamo parametrizzarla con  $x(r, \theta)$  definito come segue

$$x_1 = r \cos \phi,$$

$$x_2 = r \sin \phi,$$

$$x_3 = g(r),$$

dove  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Abbiamo le relazioni

$$\partial_\phi x = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_r x = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ g'(r) \end{pmatrix}.$$

Possiamo usare la relazione

$$\partial_\phi x \times \partial_r x = \begin{pmatrix} rg'(r) \cos \phi \\ rg'(r) \sin \phi \\ -r \end{pmatrix}$$

Per integrali sulle superfici del I tipo

$$\int_{z=g(\sqrt{x^2+y^2})} f(x) dS,$$

possiamo usare

$$dS = \sqrt{1 + g'(r)^2} d\phi r dr.$$

Per integrali sulle superfici del II tipo possiamo procedere usando

$$dx_j = \partial_\phi x_j d\phi + \partial_r x_j dr$$

o

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi + \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ g'(r) \end{pmatrix} dr.$$

Abbiamo

$$dx_1 \wedge dx_2 = -rd\phi \wedge dr,$$

$$dx_1 \wedge dx_3 = -rg'(r) \sin \phi d\phi \wedge dr,$$

$$dx_2 \wedge dx_3 = rg'(r) \cos \phi d\phi \wedge dr.$$

Sono relazioni utili per integrali sulle superfici del II tipo.

### 27.3.3 Simetria ed integrazione

Abbiamo varie tipi di simmetria in  $\mathbb{R}^3$ . Simmetria rispetto un punto (per esempio 0) si può definire con la relazione

$$S(x) = -x \quad (27.3.11)$$

La simmetria rispetto piano  $x_1 = 0$  è definita come segue

$$S(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3) \quad (27.3.12)$$

La simmetria rispetto piano  $x_2 = 0$  è definita come segue

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_3) \quad (27.3.13)$$

La simmetria rispetto piano  $x_3 = 0$  è definita come segue

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3). \quad (27.3.14)$$

La simmetria rispetto l'asse  $x_1$  è definita come segue

$$S(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3) \quad (27.3.15)$$

La simmetria rispetto l'asse  $x_2$  è definita come segue

$$S(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, -x_3) \quad (27.3.16)$$

La simmetria rispetto l'asse  $x_3$  è definita come segue

$$S(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, x_3) \quad (27.3.17)$$

**Definizione 27.3.1.** *Un dominio (insieme aperto) in  $\mathbb{R}^3$  è invariante rispetto una simmetria  $S$  se*

$$x \in U \implies S(x) \in U.$$

**Definizione 27.3.2.** *Sia  $U$  un dominio (insieme aperto) invariante rispetto una simmetria  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Una funzione*

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

*è pari (rispetto la simmetria  $S$ ), se*

$$f(Sx) = f(x), \quad \forall x \in U.$$

**Definizione 27.3.3.** Sia  $U$  un dominio (insieme aperto) invariante rispetto una simmetria  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Una funzione

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

è dispari (rispetto la simetria  $S$ ), se

$$f(Sx) = -f(x), \quad \forall x \in U.$$

**Lemma 27.3.2.** Se un dominio  $U$  è simmetrico rispetto una simmetria  $S$  e

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione dispari (rispetto  $S$ ) allora

$$\int_U f(x) dx = 0.$$

**Definizione 27.3.4.** Una superficie  $\Sigma$  in  $\mathbb{R}^3$  è invariante rispetto una simmetria  $S$  se

$$x \in \Sigma \implies S(x) \in \Sigma.$$

**Definizione 27.3.5.** Sia  $\Sigma$  una superficie invariante rispetto una simmetria  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Una funzione

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

è pari (rispetto la simetria  $S$ ), se

$$f(Sx) = f(x), \quad \forall x \in \Sigma.$$

**Definizione 27.3.6.** Sia  $\Sigma$  una superficie invariante rispetto una simmetria  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Una funzione

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

è dispari (rispetto la simetria  $S$ ), se

$$f(Sx) = -f(x), \quad \forall x \in \Sigma.$$

**Lemma 27.3.3.** *Se una superficie  $\Sigma$  é simmetrica rispetto una simetria  $S$  e*

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

*é una funzione dispari (rispetto  $S$ ) allora*

$$\int_{\Sigma} f(x) dS = 0.$$

**Problema 27.3.2.** *Calcolare*

$$\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz$$

*dove*

$$\Sigma = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

*Suggerimento.* Applicando la formula di Stokes troviamo

$$\int_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz = -2 \int_{x^2+y^2+z^2 < a^2} x dx dy dz$$

la funzione  $x$  é dispari, il dominio é simmetrico rispetto la simetria (27.3.11) per esempio e quindi l'integrale é zero.  $\square$

## 27.4 L'operazione \*

Consideriamo la mappa lineare che ad ogni 2-forma  $\alpha$  in  $\mathbb{R}^3$  corrisponde 1-forma  $\beta = A(\alpha)$ , tale che

$$\alpha \wedge A(\alpha) = dx \wedge dy \wedge dz. \quad (27.4.18)$$

Si usa la notazione

$$*\alpha = A(\alpha).$$

In fatti, ogni 2-forma  $\alpha$  é combinazione lineari delle forme

$$dx \wedge dy, dy \wedge dz, dx \wedge dz$$

Definiamo la mappa  $A$

$$A(dx \wedge dy) = dz, A(dy \wedge dz) = dx, A(dx \wedge dz) = -dy.$$

Per ogni combinazione  $c_1 dx \wedge dy + c_2 dy \wedge dz + c_3 dx \wedge dz$  abbiamo

$$A(c_1 dx \wedge dy + c_2 dy \wedge dz + c_3 dx \wedge dz) = c_1 dz + c_2 dx - c_3 dy.$$

**Problema 27.4.1.** *Dimostrare (27.4.18)*

**Problema 27.4.2.** *Dimostrare che la mappa  $A$  é invertibile.*

**Problema 27.4.3.** *Sia*

$$\alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3, \beta = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3$$

e

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

*Dimostrare l'identitá*

$$A(\alpha \wedge \beta) = a \times b.$$

## 27.5 Applicazioni della formula di Gauss - Green

**Problema 27.5.1.** *Dimostrare l'identitá'*

$$\int \int \int_{\Omega} (v(x)\nabla^2 u(x) - u(x)\nabla^2 v(x)) dx = \int \int_{\partial\Omega} (v(x)\partial_N u(x) - u(x)\partial_N v(x)) dS. \quad (27.5.19)$$

**Problema 27.5.2.** *Se*

$$\Sigma(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x - x_0\| = \varepsilon\}.$$

e  $v(x) = 1/|x - x_0|$  trovare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\Sigma(\varepsilon)} v(x)\partial_N u(x) dS,$$

dove  $N(x) = -(x - x_0)/|x - x_0|$ .

Risp. 0.

**Problema 27.5.3.** Se

$$\Sigma(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x - x_0\| = \varepsilon\}.$$

e  $v(x) = 1/|x - x_0|$  trovare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{\Sigma(\varepsilon)} u(x) \partial_N v(x) dS,$$

dove  $N(x) = -(x - x_0)/|x - x_0|$ .

Risp.  $4\pi u(x_0)$ .

**Problema 27.5.4.** Applicare l'identità (27.5.19) con  $v(x) = 1/|x - x_0|$  e

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < M, |x - x_0| > \varepsilon\}.$$

Trovando limite  $M \rightarrow \infty$ , e  $\varepsilon \rightarrow 0$  dimostrare che se  $u(x)$  è soluzione della equazione

$$\nabla^2 u(x) = f(x)$$

allora vale l'identità

$$u(x_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x_0 - x|} dx.$$

**Problema 27.5.5.** Sia  $u(x)$  una funzione in  $C^2(\mathbb{R}^3)$  tale che esiste  $R > 0$  tale che  $u(x) = 0$  per  $|x| \geq R$ . Allora l'equazione

$$\Delta u = 0$$

implica  $u = 0$ .

*Soluzione.* Moltiplicando l'equazione  $\Delta u = 0$  per  $u$  e integrando nel dominio

$$U = \{|x| < 2R\},$$

otteniamo

$$0 = \int_U \Delta u u dx = - \int_U \|\nabla u(x)\|^2 dx$$



e quindi  $\nabla u(x) = 0$  in  $U$  così troviamo

$$u(x) = C, \quad \forall x \in U$$

così usando di nuovo la proprietà  $u(x) = 0$  per  $|x| \geq R$  concludiamo

$$u(x) = 0, \quad \forall x \in U.$$

□

**Problema 27.5.6.** *Sia*

$$L = \sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j},$$

*Verificare che per ogni  $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$  tale che  $f$  ha supporto compatto vale la relazione*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x) L(f)(x) dx = c \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx, \quad (27.5.20)$$

con  $c = (n - 2)/2$ .

*Idea della soluzione.* Abbiamo la relazione

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} F_j(x) dx = 0 \quad (27.5.21)$$

per ogni funzione  $F_j \in C^1$  a supporto compatto. Abbiamo inoltre le relazioni

$$\begin{aligned} \Delta f L(f) &= \left( \sum_k \partial_{x_k}^2 f \right) \left( \sum_j x_j \partial_{x_j} f \right) = \sum_{k,j} \partial_{x_k} [(\partial_{x_k} f) x_j \partial_{x_j} f] - \\ &\quad - \sum_{k,j} [(\partial_{x_k} f) \delta_{kj} \partial_{x_j} f] - \sum_{k,j} [(\partial_{x_k} f) x_j \partial_{x_j} \partial_{x_k} f]. \end{aligned}$$

Usando (27.5.21) troviamo

$$I := \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x) L(f)(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k,j} [(\partial_{x_k} f) \delta_{kj} \partial_{x_j} f] -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k,j} [(\partial_{x_k} f) x_j \partial_{x_j} \partial_{x_k} f] = \\
& = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j \langle \nabla f, x_j \partial_{x_j} \nabla f \rangle dx.
\end{aligned}$$

Abbiamo inoltre le relazioni

$$\sum_j g x_j \partial_{x_j} g = \sum_j x_j \partial_{x_j} \left( \frac{g^2}{2} \right) = \sum_j \partial_{x_j} \left( x_j \frac{g^2}{2} \right) - n \frac{g^2}{2}.$$

Così si ottiene

$$I = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx + \frac{n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx.$$

□

**Problema 27.5.7.** *Vedere se esiste costante  $C$  tale che per ogni funzione  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  e per ogni  $R > 0$  vale la disequazione*

$$\left| \iiint_{B(R)} \operatorname{div} F(x) dx \right|^2 \leq CR^2 \iint_{\partial B(R)} |F(x)|^2 dS,$$

dove  $B(R)$  è la palla di raggio  $R$  e centro  $0$  in  $\mathbb{R}^3$  e  $\partial B(R)$  è la sua frontiera.

*Soluzione.* La formula di Gauss - Green ci da

$$\iiint_{B(R)} \operatorname{div} F(x) dx = \iint_{\partial B(R)} \langle F(x), N(x) \rangle dS_x.$$

Così

$$\left| \iiint_{B(R)} \operatorname{div} F(x) dx \right| = \left| \iint_{\partial B(R)} \langle F(x), N(x) \rangle dS_x \right| \quad (27.5.22)$$

Usando i coordinati polari

$$x = R \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = R \cos \theta,$$

con  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ , troviamo

$$\iint_{\partial B(R)} \langle F(x), N(x) \rangle dS_x = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \langle F, N \rangle \sin \theta d\theta d\varphi$$

e quindi

$$\left| \iint_{\partial B(R)} \langle F(x), N(x) \rangle dS_x \right| \leq R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\langle F, N \rangle| \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (27.5.23)$$

Abbiamo la disequazione di Cauchy

$$|\langle F, N \rangle| \leq |F| |N| = |F|$$

e l'altra disequazione di Cauchy - Schwartz

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt.$$

In questo modo troviamo

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\langle F, N \rangle| \sin \theta d\theta d\varphi \right|^2 &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |F|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |F|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^{-2} \iint_{\partial B(R)} |F(x)|^2 dS. \end{aligned}$$

Usando (27.5.22) e (27.5.23) concludiamo che vale la disequazione

$$\left| \iiint_{B(R)} \operatorname{div} F(x) dx \right|^2 \leq 4\pi R^2 \iint_{\partial B(R)} |F(x)|^2 dS.$$

□

## 27.6 Nastro di Möbius

Una possibile rappresentazione del nastro di Möbius  $M$  e la superficie in  $R^3$  avente le seguenti equazioni parametriche (in coordinate cartesiane):

$$x_1(u, v) = \left( A - Bv \sin \frac{u}{2} \right) \cos(u)$$

$$x_2(u, v) = \left( A - Bv \sin \frac{u}{2} \right) \sin(u)$$

$$x_3(u, v) = Bv \cos \frac{u}{2}$$

dove  $0 \leq u < 2\pi$  e  $-1 \leq v \leq 1$ . I due parametri  $A, B > 0$  soddisfano

$$A > B > 0.$$

In questo modo si ottiene un nastro di Möbius di larghezza 1, centrato in  $(0, 0, 0)$  e con il cerchio centrale giacente sul piano  $x, y$ . Variando il parametro  $u$  ci si muove lungo il nastro.

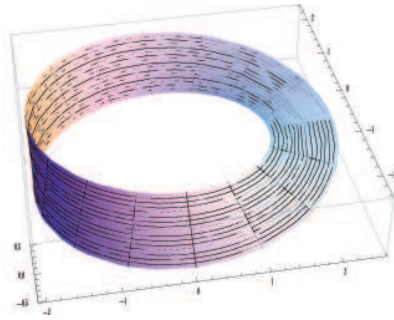


Figure 27.1: Nastro di Möbius

Si può vedere che il nastro di Möbius è superficie con frontiera  $\gamma$  parametrizzata con

$$\gamma : \begin{cases} x_1(u) = \left( A - B \sin \frac{u}{2} \right) \cos(u) \\ x_2(u) = \left( A - B \sin \frac{u}{2} \right) \sin(u) \\ x_3(u) = B \cos \frac{u}{2} \end{cases} \quad (27.6.24)$$

dove  $0 \leq u \leq 4\pi$ .

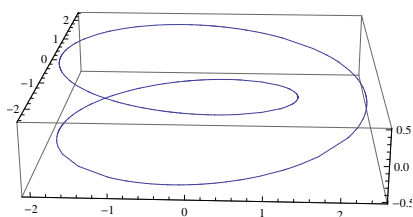


Figure 27.2: La frontiera di nastro di Möbius

Sia

$$\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2.$$

La forma é chiusa, ben definita sul nastro di Möbius  $M$ , perché  $M$  soddisfa

$$M \cap \{(0, 0, x_3); x_3 \in \mathbb{R}\} = \emptyset.$$

**Problema 27.6.1.** Sia  $\gamma$  la curva definita con

$$\gamma : \begin{cases} x_1(u) = \left(A - B \sin \frac{u}{2}\right) \cos(u) \\ x_2(u) = \left(A - B \sin \frac{u}{2}\right) \sin(u) \\ x_3(u) = B \cos \frac{u}{2} \end{cases} \quad (27.6.25)$$

dove  $0 \leq u \leq 4\pi$ . Calcolare l'integrale

$$\int_{\gamma} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2.$$

*Soluzione.* Abbiamo le relazioni

$$x_1'(u) = -\left(A - B \sin \frac{u}{2}\right) \sin(u) - \frac{B}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \cos(u),$$

$$x_2'(u) = \left(A - B \sin \frac{u}{2}\right) \cos(u) - \frac{B}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) \sin(u),$$

$$x_3'(u) = -\frac{B}{2} \sin \frac{u}{2}.$$

Possiamo definire la forma  $\omega$  come

$$\omega = F_1(x) dx_1 + F_2(x) dx_2 + F_3(x) dx_3,$$

dove

$$F_1(x) = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, F_2(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2, \quad F_3(x) = 0.$$

Abbiamo inoltre

$$F(x(u)) = \left( -\frac{\sin u}{\left(A - B \sin \frac{u}{2}\right)}, \frac{\cos u}{\left(A - B \sin \frac{u}{2}\right)}, 0 \right).$$

Abbiamo le relazioni

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{4\pi} \langle F(x(u)), x'(u) \rangle du = \int_0^{4\pi} du = 4\pi \neq 0.$$

□

**Problema 27.6.2.** *Vedere che il nastro di Möbius  $M$  parametrizzato per  $u \in [0, 2\pi)$ ,  $v \in [-1, 1]$  con*

$$x_1(u, v) + ix_2(u, v) = \left( A - Bv \sin \frac{u}{2} \right) e^{iu}, \quad x_3(u, v) = Bv \cos \frac{u}{2}$$

*è superficie regolare con frontiera  $\gamma$  (del Problema 27.6.1) per quale non è vero il teorema di Stokes.*



# Bibliography

- [1] E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica II, *Liguori Editore* , 1986.
- [2] J.P.Cecconi, G.Stampacchia, Analisi Matematica 2 volume, Funzioni di piú variabili, *Liguori Editore*, 1986
- [3] J.P.Cecconi, L.C.Piccinini, G.Stampacchia, Esercizi e problemi di Analisi Matematica, 2 volume, Funzioni di piú variabili, *Liguori Editore*, 1986
- [4] N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone, Analisi Matematica due, *Liguori Editore*, 1996
- [5] M. Giaquinta, G. Modica, Mathematical Analysis An Introduction to Functions of Several Variables *Birkhäuser*, 2009.
- [6] E.Guisti, Analisi Matematica 2, *Bollati Boringhieri*, 1989.
- [7] E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, volume secondo, *Bollati Boringhieri*, 1994.
- [8] W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, *McGraw Hill Libri Italia SRL*, 1991.