# Analisi Matematica 1.

## Differenziabbilitá. Integrazione. Equazioni ordinarie

Vladimir Georgiev

Dipartimento di Matematica "L.Tonelli",
Università di Pisa,
Largo Bruno Pontecorvo 5, I-56127, Pisa, Italy.
E-mail: georgiev@dm.unipi.it

# Contents

# Chapter 1

# Derivata della funzione: parte teorica

## 1.1 Regole di derivazione

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \ (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \ g(x) \neq 0, \ \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg}{dy}(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (x^A)' = Ax^{A-1}, .$$

$$(\ln x)' = 1/x, \ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \ (a^x)' = \mathrm{a}^x \ln a.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x, \ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}..$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \ (arccot\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Formula di Leibniz

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x),$$

dove

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

## 1.2 Il simbolo: $o(*)$

Si supponga che $f(t)$ e $g(t)$ siano due funzioni definite su qualche sottoinsieme del tipo $(N, +\infty)$ dei numeri reali. Supponiamo inoltre che

$$g(t) \neq 0 \tag{1.2.0.1}$$

per $t \in (N, +\infty)$. Diciamo che

$$f(t) \in o(g(t)) \text{ per } t \to \infty$$

se e solo se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

La notazione puó anche essere usata per descrivere il comportamento di $f$ nell'intorno di un numero reale $a$. Si supponga che $f(t)$ e $g(t)$ siano due funzioni definite su qualche intervallo $I$ dei numeri reali tale che $a \in I$. Supponiamo inoltre che

$$g(t) \neq 0 \tag{1.2.0.2}$$

per $t \in I, t \neq a$. Diciamo che

$$f(t) \in o(g(t)) \text{ per } t \to a$$

se e solo se

$$\lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

**Esempio 1.2.0.1.** *Per $t \to \infty$ abbiamo*

$$a > b \Longrightarrow t^b = o(t^a), \quad a > 0 \Longrightarrow \log t = o(t^a), \quad t^a = o(e^t). \tag{1.2.0.3}$$

**Esempio 1.2.0.2.** *Per $t \to 0$ abbiamo*

$$a < b \Longrightarrow t^b = o(t^a). \tag{1.2.0.4}$$

Algebra del simbolo $o(*)$.

**Lemma 1.2.0.1.** *Sia $t \to t_0$ e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é una funzione definita in un intorno $I$ di $t_0$ che soddisfa (1.2.0.2) per $t \neq t_0, t \in I$. Allora abbiamo le seguenti proprietá:*

*a) $o(g(t)) \pm o(g(t)) = o(g(t)),\ \ C \neq 0 \Longrightarrow Co(g(t)) = o(Cg(t)) = o(g(t))$,*

*b) per ogni funzione $f(t)$ definita in $I$ che soddisfa (1.2.0.2) per $t \neq t_0, t \in I$ vale l'inclusione*

$$o(f(t))o(g(t)) \subseteq o(f(t)g(t)),$$

*c) per ogni funzione $f(t)$ definita in $I$ che soddisfa (1.2.0.2) per $t \neq t_0, t \in I$ vale l'inclusione*

$$f(t)o(g(t)) \subseteq o(f(t)g(t)),$$

*d) per ogni funzione $f(t)$ definita in $I$ che soddisfa $|f(t)| \geq |g(t)|$ per $t \neq t_0, t \in I$ vale l'inclusione*

$$o(g(t)) \subseteq o(f(t)),$$

*e) $o(o(g(t))) \subseteq o(g(t))$,*

*f) per ogni funzione $f(t)$ definita in $I$ tale che $\lim_{t\to t_0} f(t) = C \neq 0$ allora*

$$o(f(t)g(t)) = o(g(t)).$$

**Idea della dimostrazione di d).** Sia $h(t) \in o(g(t))$. Abbiamo quindi

$$\frac{|h(t)|}{|g(t)|} = o(1)$$

La disequazione

$$\frac{|h(t)|}{|g(t)|} \geq \frac{|h(t)|}{|f(t)|}$$

e principio di confronto implicano

$$\frac{|h(t)|}{|f(t)|} = o(1).$$

□

**Idea della dimostrazione di e).** La definizione di $o$ ci da

$$h(t) \in o(o(g(t))) \Longrightarrow \exists H(t) \in o(g(t)) \ \text{ tale che } \quad h(t) \in o(H(t))$$

e $H(t) \neq 0$ per $t \in I, t \neq t_0$. Quindi

$$\frac{h(t)}{H(t)} = o(1), \frac{H(t)}{g(t)} = o(1), \tag{1.2.0.5}$$

cosi molteplicando queste due identitá otteniamo

$$\frac{h(t)}{H(t)} \frac{H(t)}{g(t)} = \frac{h(t)}{g(t)} = o(1) \Longrightarrow h(t) \in o(g(t)).$$

□

**Idea della dimostrazione di f).** La condizione

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = C$$

significa che

$$f(t) = C + o(1).$$

Quindi l'ipotesi $C \neq 0$ implica l'esistenza di un $\delta > 0$ tale che

$$\frac{|C|}{2} \leq |f(t)| \leq 2|C| \tag{1.2.0.6}$$

per $0 < |t - t_0| < \delta$. Molteplicando per $g(t)$ troviamo

$$\frac{|g(t)||C|}{2} \leq |f(t)||g(t)| \leq 2|C||g(t)| \tag{1.2.0.7}$$

Usando la proprietá d) e la disequazione $|f(t)||g(t)| \leq 2|C||g(t)$ in (1.2.0.7) si trova

$$o(fg) \subseteq o(2Cg) = o(g).$$

In modo simile la proprietá d) e la disequazione $|f(t)||g(t)| \geq \frac{|g(t)||C|}{2}$ in (1.2.0.7) implica

$$= o(g) = o\left(\frac{Cg}{2}\right) \subseteq o(fg).$$

$\square$

**Problema 1.2.0.1.** *Se $f(t)$ e $g(t)$ sono due funzioni tale che*

$$f(t) = Cg(t) + o(g(t))$$

*con $C \neq 0$ allora*

$$o(f(t)) = o(g(t)).$$

**Suggerimento.** Usare l'identita

$$f(t) = (C + o(1))\, g(t)$$

e il punto f) in Lemma 1.2.0.1.

# Chapter 2

# Esercizi sulla differenziabilitá

## 2.1 Esercizi sulla derivata delle funzioni elementari

**Problema 2.1.0.1.** *Trovare la derivata di*

$$\sin(\cos x) - \ln(2x/\pi)$$

**Problema 2.1.0.2.** *Verificare l'identitá*

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

**Problema 2.1.0.3.** *Trovare la derivata di:*

*a)* $f(x) = \mathrm{e} + \cos(\arcsin(x+1))$,

*b)* $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$,

*c)* $f(x) = \sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}$,

*d)* $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

*e)*

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)$$

*f)*

$$(\ln x)^2 \cos(1 + \ln x).$$

*Soluzione a).* Abbiamo le relazioni

$$(\mathrm{e} + \cos(\arcsin(x+1)))' = -\sin(\arcsin(x+1))\,(\arcsin(x+1))' =$$

$$= -\sin(\arcsin(x+1))\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}.$$

$\square$

*Soluzione b).* Abbiamo le relazioni

$$\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}}\frac{-\sin^2 x-(1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}}\frac{-1-\cos x}{\sin^2 x}$$

$\square$

*Soluzione c).* Abbiamo le relazioni

$$\left(\sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}}\left(\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}}\frac{-\arcsin x/\sqrt{1-x^2}-(1+\arccos x)/\sqrt{1-x^2}}{\arcsin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}}\frac{-1-\arcsin x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}.$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\arccos x}{\arcsin x}}}\frac{-1-\pi/2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}.$$

$\square$

*Soluzione d).* Abbiamo le relazioni

$$\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}(-\ln x \sin x)' =$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}\left(-\frac{\sin x}{x} - \ln x \cos x\right).$$

□

*Soluzione e).* Abbiamo le relazioni

$$\left(\ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)\right)' = \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x-1}{2x+1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\frac{x-1}{2x+1}\left(\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2(2x+1)(x-1)}.$$

□

*Soluzione f).* Abbiamo le relazioni

$$\left((\ln x)^2\cos(1+\ln x)\right)' = \left((\ln x)^2\right)'\cos(1+\ln x) + (\ln x)^2\left(\cos(1+\ln x)\right)' =$$

$$= 2\frac{\ln x}{x}\cos(1+\ln x) - (\ln x)^2\sin(1+\ln x)\frac{1}{x}.$$

□

**Problema 2.1.0.4** (Test 2017 Energia)**.** *La derivata di* $\cos^2(x)e^{\sqrt{\sin^2(x)+4}}$ *in* $x=\pi$ *vale*

*A:* $e^2$*;* *B: non esiste;* *C:* $0$*;* *D:* $2$*;* *E: N.A.*

**Risp C**

**Problema 2.1.0.5** (Test 2017 Energia)**.** *La derivata di* $\cos(x)e^{\sqrt{\sin^2(x)+3}}$ *in* $x=\pi/2$ *vale*

*A:* $2$*;* *B:* $-e^2$*;* *C: non esiste;* *D:* $0$*;* *E: N.A.*

**Risp B**

**Problema 2.1.0.6** (Test 2017 Energia)**.** *La derivata di* $\cos(x)e^{\sqrt{\sin(x)+4}}$ *in* $x = \pi$ *vale*
*A:* $0$*;* *B: non esiste;* *C:* $1/4$*;* *D:* $e^2/4$*;* *E: N.A.*

**Risp D**

**Problema 2.1.0.7** (Test 2017 Energia)**.** *La derivata di* $\sin^2(x)e^{\sqrt{\cos(x)+4}}$ *in* $x = \pi/2$ *vale*
*A:* $1$*;* *B:* $e^2/4$*;* *C:* $0$*;* *D: non esiste;* *E: N.A.*

**Risp E**

**Problema 2.1.0.8.** *Trovare la seconda derivata di:*
*a)* $x^2 e^x$,
*b)* $x^2 e^x \cos x$,
*c)* $\frac{x^2}{1-x^2}$,
*d)* $\frac{x}{\sqrt{1-x}}$,
*e)* $\ln(\arcsin x)$.
*f)* $\arctan(x+2)$.

## 2.2 Esercizi sui teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

**Problema 2.2.0.1.** *Se* $f$ *non é continua su* $[a, b]$*, ma derivabile in* $(a, b)$ *e se vale* $f(a) = f(b)$*, allora non vale il teorema di Rolle.*

**Problema 2.2.0.2.** *Se* $f$ *non é derivabile su* $(a, b)$*, ma* $f$ *é continua in* $[a, b]$ *e se vale* $f(a) = f(b)$*, allora non vale il teorema di Rolle.*

**Problema 2.2.0.3.** *Sia* $f(x) = x - \log(1 + x)$.
*a) Studiare intervalli dove* $f(x)$ *é monotona ed intracciare il grafico approssimativo.*
*b) Vedere se*

$$x > -1 \Longrightarrow f(x) \geq 0.$$

*c) Risolvere l'equazione* $f(x) = 0$.

**Problema 2.2.0.4.** *Vedere se per* $x \in [0, +\infty)$ *abbiamo*

$$\sin x \leq x.$$

**Problema 2.2.0.5.** *Vedere se per* $x \in [0, 1)$ *abbiamo*

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

**Problema 2.2.0.6.** *Vedere se per* $x \in [0, +\infty)$ *la funzione*

$$\cos x + \frac{x^2}{2}$$

*é monotona.*

**Problema 2.2.0.7.** *Vedere se per* $x \in (-1, 0]$ *abbiamo*

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

**Problema 2.2.0.8.** *Vedere quanti soluzioni ha l'equazione*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

**Problema 2.2.0.9.** *Se* $a > 0, \lambda > 1$ *sono numeri reali dimostrare*

$$(1 + a)^\lambda > 1 + a\lambda.$$

## 2.3 Esercizi sulla formula di Taylor

**Problema 2.3.0.1** (Test 2017 Energia)**.** *Lo sviluppo di Taylor di ordine* 3 *in* $x = 0$ *di* $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ *è*
*A:* $x - x^2/2 + o(x^3)$*;* *B:* $x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$*;* *C:* $x - x^2/2 - x^3 + o(x^3)$*;*
*D:* $x - x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)$*;* *E: N.A.*

**Risp. D**

**Problema 2.3.0.2** (Test 2017 Energia)**.** *Lo sviluppo di Taylor di ordine* 3 *in* $x = 0$ *di* $f(x) = \ln(1 - \sin(x))$ *è*
*A:* $-x - x^2/2 + o(x^3)$; *B:* $-x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$; *C:* $-x - x^2/2 - x^3 + o(x^3)$;
*D:* $-x - x^2 - 5x^3/6 + o(x^3)$; *E: N.A.*

**Risp. B**

**Problema 2.3.0.3** (Test 2017 Energia)**.** *Lo sviluppo di Taylor di ordine* 3 *in* $x = 0$ *di* $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ *è*
*A:* $x - x^2/2 + o(x^3)$; *B:* $x - x^2/2 - x^3/6 + o(x^3)$; *C:* $x - x^2/2 - x^3 + o(x^3)$;
*D:* $x - x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)$; *E: N.A.*

**Risp. D**

**Problema 2.3.0.4.** *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(\sin(x))}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1 + bx^2}},$$

*con* $b \neq 0$.

*Soluzione.* Si studia

$$\lim_{x\to 0} \frac{(ax^2 - 1 + \cos(\sin(x))}{-2bx^2 + 3\sqrt{1 + 2bx^2} - 3\sqrt[3]{1 + bx^2}}.$$

Abbiamo lo sviluppo asintotico

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

$$\tan y = y + y^3/3 + (2y^5)/15 + o(|y|^5), \quad y \to 0$$

Con $y = \sin x$ abbiamo

$$\tan(\sin x) = x + x^3/6 - x^5/40 + o(|x|^5).$$

Le relazioni

$$\sqrt[3]{1 + bx^2} = 1 + \frac{bx^2}{3} - \frac{b^2x^4}{9} + o(x^5),$$

implica

$$bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1 + bx^2} = \frac{b^2x^5}{3} + o(x^5).$$

Cosi troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(\sin(x))}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1 + bx^2}} = -\frac{3}{40b^2}.$$

□

*Osservazione.* Spesso in alcuni soluzioni si puo trovare l'identitá

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(\sin(x))}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1 + bx^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-(x^3/6) - x + \tan(x)}{bx^3 + 3x - 3x\sqrt[3]{1 + bx^2}}, \tag{2.3.0.1}$$

"giustificata" con la relazione

$$\sin x \sim x. \tag{2.3.0.2}$$

L'utilizzo del simbolo $\sim$ al posto di

$$\sin x = x + o(x) \tag{2.3.0.3}$$

spesso crea errori gravi nelle soluzioni. Bisogna usare sviluppi precisi, tipo (2.3.0.3) o

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4), \tag{2.3.0.4}$$

oppure

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^6),$$

dove serve.

Un controesempio tipico dove si puo ottenere risultato sbagliato usando (2.3.0.2) senza tenere conto del ordine del resto é

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3}.$$

Usando lo sviluppo (2.3.0.4) troviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6 + o(x^4)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

"Usando" (2.3.0.2) nel modo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sinx}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

ovviamente commettiamo errore grave.

$\square$

**Problema 2.3.0.5.** *Stabilire i coefficienti $a_0, a_1, a_2$ nello sviluppo assintotico*

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(|x|^2)$$

*per $x \to 0$.*

**Suggerimento.**

$$1 + \sin x = 1 + x + o(x^2), \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e usando la relazione

$$1 + \sin x = \cos x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

arriviamo alla conclusione

$$1 + x + o(x^2) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(|x|^2)\right) =$$

$$= a_0 + a_1 x - \frac{a_0 x^2}{2} + a_2 x^2 + o(x^2)$$

Cosí abbiamo

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}.$$

**Problema 2.3.0.6.** *Stabilire i coefficienti $a_0, a_1$ nello sviluppo assintotico*

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = a_0 + a_1(x - \pi) + o(|x - \pi|^1)$$

*per $x \to \pi$.*

**Problema 2.3.0.7.** *Stabilire i coefficienti $a_0, a_1, a_2$ nello sviluppo assintotico*

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1} = a_0 + a_1(x-\pi) + a_2(x-\pi)^2 + o((x-\pi)^2)$$

*per $x \to \pi$.*

*Soluzione.* Dopo la sostituzione $y = x - \pi$ abbiamo $x = y + \pi$ e usando le relazioni

$$\sin(y+\pi) = -\sin y, \ \cos(y+\pi) = -\cos y$$

dobbiamo avere sviluppo

$$\frac{\sin^2 y}{1-\cos y} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + o(y^2).$$

Abbiamo le relazioni

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$$

e quindi

$$\sin^2 y = \left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)\right)\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)\right) =$$

$$= y^2 - \frac{y^4}{3} + o(y^4) =$$

$$= y^2 - \frac{y^4}{3} + o(y^4)$$

D'altra parte

$$1 - \cos y = \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24} + o(y^4).$$

Cosi cerchiamo $a_0, a_1, a_2$ tali che

$$\frac{y^2 - \frac{y^4}{3} + o(y^4)}{\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24} + o(y^4)} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + o(y^2)$$

oppure dopo la simplifica

$$\frac{1-\frac{y^2}{3}+o(y^2)}{\frac{1}{2}-\frac{y^2}{24}+o(y^2)} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + o(y^2)$$

La relazione significa

$$\begin{aligned} 1-\frac{y^2}{3}+o(y^2) = \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{24}+o(y^2)\right)\left(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + o(y^2)\right). \end{aligned} \tag{2.3.0.5}$$

L'espresione a destra di (2.3.0.5) si puo simplificare come segue

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{24}+o(y^2)\right)\left(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + o(y^2)\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} y + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{24}\right) y^2 + o(y^2).$$

Confrontando con (2.3.0.5) deduciamo che $a_0, a_1, a_2$ devono soddisfare le relazioni

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a_0}{2}, \\ 0 &= \frac{a_1}{2}, \\ -\frac{1}{3} &= \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{24}\right) \end{aligned} \tag{2.3.0.6}$$

e quindi

$$a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}.$$

□

**Problema 2.3.0.8.** *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{1}{1+x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{20} x^{20} + o\left(x^{20}\right)$$

*per* $x \to 0$.

**Problema 2.3.0.9.** *Calcolare* $f^{(20)}(0)$ *della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Problema 2.3.0.10.** *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ *nello sviluppo assintotico*

$$\frac{1}{1+x^2} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{20}}{x^{20}} + o\left(\frac{1}{x^{20}}\right)$$

*per* $x \to \pm\infty$.

**Suggerimento** Cambiamento di variabili $x = 1/y$ e sviluppo per $y \to 0_\pm$, usando il Problema 2.3.0.8.

**Problema 2.3.0.11.** *Usando il teorema di Taylor vedere che lo sviluppo asintotico*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

*implica*

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}x^n}{n} + o(x^n).$$

**Problema 2.3.0.12.** *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, \cdots, a_{20}$ *nello sviluppo assintotico*

$$\arctan x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{20}}{x^{20}} + o\left(\frac{1}{x^{20}}\right)$$

*per* $x \to \infty$.

**Problema 2.3.0.13.** *Stabilire i coefficienti* $a_0, a_1, a_2$ *nello sviluppo assintotico*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

*per* $x \to \infty$.

## 2.4 Esercizi sullo studio delle funzioni

**Problema 2.4.0.1** (Test 2017 Energia)**.** *La funzione* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *data da* $f(x) = \ln(e^{1-x} + x)$
*A: è crescente;* *B: è limitata;* *C: ammette minimo;*
*D: ammette massimo;* *E: N.A.*

**Risp. C**

**Problema 2.4.0.2** (Test 2017 Energia)**.** *La funzione* $f(x) = \dfrac{\sin(x) + x}{x^4 + 2x^2 + 1}$
*A: ha un asintoto verticale;* *B: è periodica;* *C: è crescente;*
*D: N.A.;* *E: è limitata.*

**Risp. E**

**Problema 2.4.0.3** (Test 2017 Energia)**.** *La funzione* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *data da* $f(x) = \arctan\left(\dfrac{3}{x}\right)$
*A: è crescente;* *B: è limitata;* *C: ammette minimo;*
*D: ammette massimo;* *E: N.A.*

**Risp. B**

**Problema 2.4.0.4.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.5.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.6.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.7.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.8.** *Disegnare* $f(x) = \ln(1 + |x|)$.

**Problema 2.4.0.9.** *Disegnare* $f(x) = \ln|1 + x|$.

**Problema 2.4.0.10.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

**Problema 2.4.0.11.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}\right)$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.12.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{4x}{4 + x^2}$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.13.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.14.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = -x + 1 + \ln\left(1 + \frac{5}{|x|}\right)$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.15.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = -2x + 3 + \ln\left(1 + \frac{3}{|x|}\right)$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.16.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = x + 2 + \ln\left(1 + \frac{2}{|x|}\right)$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.17.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} - \sqrt{1+x}, \quad x \geq 2$$

*é trovare*

$$\sup f(x), \inf f(x)$$

*se esitono.*

*Suggerimento.* Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{6}x^{-3/2} - \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}.$$

Possiamo verificare che

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \geq 1.$$

Infatti, dobbiamo verificare

$$3x(1+x)^{1/2} - (1+x)^{1/2} - 3x^{3/2} > 0 \iff (3x-1)^2(1+x) > 9x^3 \iff$$

$$\iff 9x^3 - 6x^2 + x + 9x^2 - 6x + 1 > 9x^3$$

e quasta disequazione ed equaivalente a

$$3x^2 - 5x + 1 > 0$$

e questo é ovvio se $x > 2$. Cosi la funzione é crescente. Si puo vedere inoltre che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

cosi

$$\sup_{x\geq 2} f(x) = 0, \quad \inf_{x\geq 2} f(x) = f(2).$$

$\square$

**Problema 2.4.0.18.** *Sia*

$$f(x) = g\left(|x - 1/x|^{1/k}\right), x > 0$$

*dove $k > 1$, $g(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Studiare la differenziabilitá della funzione nel punto $x = 1$ e tracciare il grafico (senza la derivata seconda).*

*Soluzione.* Sia $h(x) = |x - 1/x|^a$, dove $a \in (0, 1/2)$. Abbiamo la relazione

$$f(x) = g(H(x)), \quad H(x) = |x - 1/x|^a$$

e

$$f'_-(1) = \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{g(H(1+h)) - g(0)}{h}.$$

Abbiamo inoltre

$$g(y) = g(0) + g'(1)y + \frac{g''(0)y^2}{2} + o(y^2$$

per $y \to 0$. Usando

$$g'(x) = (e^x - e^{-x})/2, \quad g''(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

troviamo

$$g(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

e quindi

$$\frac{g(H(1+h)) - g(0)}{h} = \frac{H(1+h)^2}{2h} = \frac{\left(\frac{1}{1+h} - 1 - h\right)^{2a}}{h}.$$

L'ipotesi $a < 1/2$ e $h < 0$ implica

$$f'_-(1) = -\infty.$$

La funzione non é differenziabile in $x = 1$.

Possiamo tracciare il grafico.

$$f'(x) = g'(H(x))a\left(x - \frac{1}{x}\right)^{a-1}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > 0 \quad \text{se} \quad x > 1$$

e

$$f'(x) = -g'(h(x))a\left(\frac{1}{x} - x\right)^{a-1}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.$$

L'unico punto critico (la soluzione di $f'(x) = 0$) é $x_0 = e^{-1/a}$. Per $x > x_0$ la funzione é crescente, mentre per $0 < x < x_0$ é decrescente. La figura 2.1 rappresenta il grafico di $f(x)$.

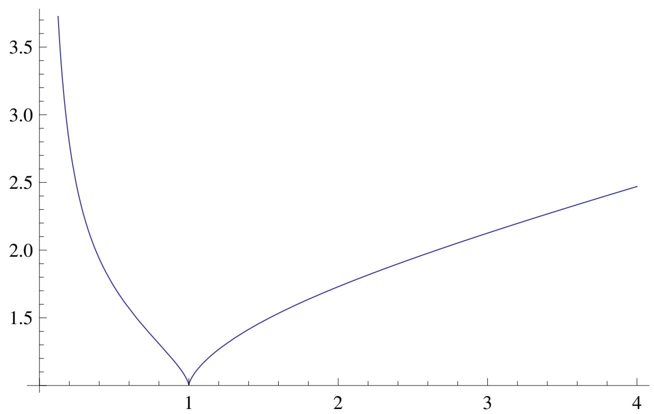


Figure 2.1: Grafico di $f(x)$.

$\square$

*Osservazione.* Spesso nelle soluzioni dei compitini si trova l'identitá

$$(|x|^a)' = a|x|^{a-1}$$

dove $a \neq 0$. Questa formula non é vera per ogni $x \neq 0$. La formula vera é

$$(|x|^a)' = a|x|^{a-2}x, \quad \forall x \neq 0. \tag{2.4.0.7}$$

o

$$(|x|^a)' = a \ \mathrm{sgn}(x) \ |x|^{a-1}x, \quad \forall x \neq 0, \tag{2.4.0.8}$$

dove

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Cosí abbiamo

$$\left(\left|x - \frac{1}{x}\right|^a\right)' = a\left|x - \frac{1}{x}\right|^{a-2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$. □

**Problema 2.4.0.19.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{|x-9|}$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.20.** *Studiare (senza calcolare la derivata seconda) la funzione*

$$f(x) = \cos x \cos 2x.$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.21.** *Studiare (senza calcolare la derivata seconda) la funzione*

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.22.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.23.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arctan x$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.24.** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \arctan(2x) - \arctan x$$

*e tracciare un grafico approssimativo.*

**Problema 2.4.0.25.** *Trovare tutti funzioni $f(x)$ tali che $f(x)$ e' una funzione differnziabile in $\mathbb{R}$ e*

$$f'(x) = |x|.$$

**Problema 2.4.0.26.** *Trovare i coefficienti della funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + mx^2 + n|x| + 2$$

*se la funzione ha minimo*

$$\min f(x) = -2$$

*nel punto $x = 2$. Intracciare il grafico della funzione $f(x)$.*

**Problema 2.4.0.27.** *Trovare tutti gli $A$ tali che l'equazione*

$$5 \sin x + 2 \cos x = A$$

*ha soluzione.*

**Risp.** $-\sqrt{29} \leq A \leq \sqrt{29}$.

**Problema 2.4.0.28.** *Sia $M \geq 1$ intero e sia $X(M)$ l'insieme*

$$X(M) = \{x \in (-M, M); \{x\} = \frac{2}{\pi} \arctan x\},$$

*dove $b(x) = \{x\}$ é la parte frazionaria di $x$ cioé'*

$$0 \leq b(x) < 1, \ x - b(x) \in \mathbb{Z}.$$

*Studiare l'esistenza dell'limite*

$$\lim_{M \nearrow \infty} \frac{card(X(M))}{M}.$$

*Soluzione.* Se $M \geq 1$ é un numero intero si puo vedereche (tracciando i grafici delle funzioni $b(x)$, $f_1(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$

$$\leq card(X(M)) = (M - 1).$$

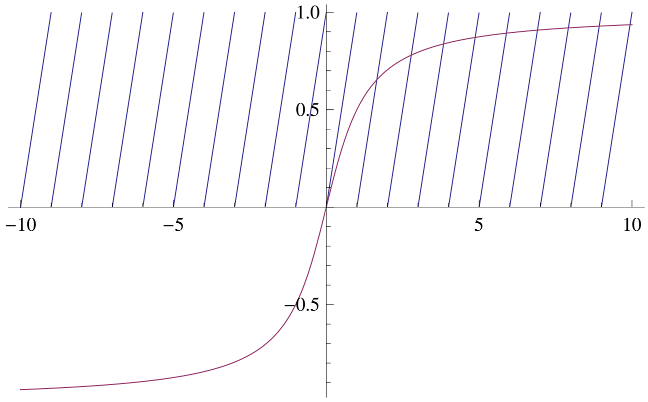


Figure 2.2: Il grafico di $f_1(x)$

Cosi otteniamo

$$\frac{card(X(M))}{M} \to 1.$$

□

**Problema 2.4.0.29.** *Tracciare il grafico della funzione*

$$\int_0^x \frac{\sin t}{(t+1)} dt$$

*per* $x \in (0, \infty)$.

*Soluzione.* Abbiamo l'identita'

$$f'(x) = \frac{\sin x}{1+x}.$$

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Abbiamo inoltre

$$\lim_{x \searrow 0} f(x)$$

esiste ed e un numero positivo (il problema (4.2.1.23)) Il grafico e' tracciato sulla Figura 2.3

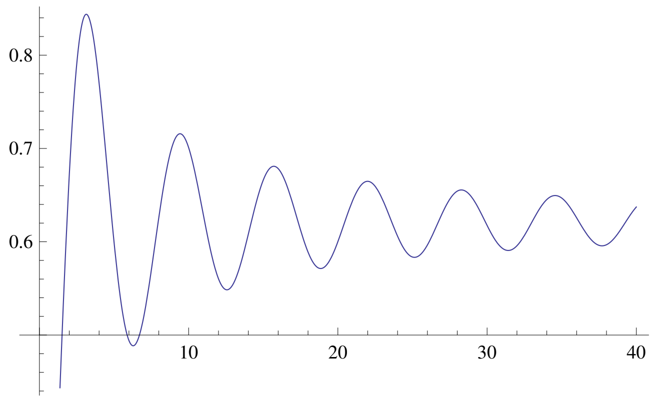


Figure 2.3: Il grafico di $f(x)$

$\square$

**Problema 2.4.0.30.** *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x) = 24x - \cos(12x) - 3\sin(8x)$$

*per* $x \in [-\pi/6, \pi/6]$.

**Risp.** $f_{max} = 4\pi - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f_{min} = -4\pi - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

**Problema 2.4.0.31.** *Trovare il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x) = 18x - \sin(9x) + 3\sin(6x)$$

*per* $x \in [-7\pi/18, \pi/18]$.

**Risp.** $f_{max} = \pi - 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $f_{min} = -7\pi - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

**Problema 2.4.0.32.** *Trovare tutti i punti* $x \in \mathbb{R}$ *tali che* $f'(x) = 0$, *dove*

$$f(x) = \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2\sin(3x)}{3} + \sin x.$$

*Intracciare il grafico di* $f$.

**Risp.** $x = \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$.

**Problema 2.4.0.33.** *Trovare tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ tali che $f'(x) = 0$, dove*

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(2x)}{2} - \sin x.$$

*Intracciare il grafico di $f$.*

**Risp.** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

**Problema 2.4.0.34.** *Trovare il minimo della funzione*

$$f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x.$$

*ha soluzione.*

**Risp.** $f_{min} = 12\pi - 1$.

# Chapter 3

# Integrale indefinito di Riemann in $\mathbb{R}$.

## 3.1 Integrale indefinito

Sia $f$ una funzione definita in $(a,b)$ con valori in $\mathbb{R}$.

**Definizione 3.1.0.1.** *La funzione $F(x)$ definita e differenziabile in $(a,b)$ é primitiva di $f(x)$ nel intervallo $(a,b)$ se e solo se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a,b)$.*

Indichiamo con $\int f(x)dx$ (integrale indefinito di $f$) l'insieme delle funzioni primitive di $f$ ovvero

$$\int f(x)dx = \{F(x) \text{ é differenziabile in } (a,b) \text{ e } F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)\}.$$

In generale si puo chiedere se l'insieme $\int f(x)dx$ non é vuoto. Infatti per certi funzioni $f(x)$ esiste alemeno una primitiva $F$

**Esempio 3.1.0.1.** *Usando le tabelle delle derivate delle funzioni elementari possiamo vedere che*

$$(x^A)' = Ax^{A-1} \implies \frac{x^A}{A} \in \int x^{A-1}dx, \forall A \neq 0,$$

$$(\ln|x|)' = 1/x \implies \ln|x| \in \int \frac{1}{x}dx,$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \Longrightarrow e^x \in \int e^x dx.$$

La caratterizzazione dell'insieme $\int f(x)dx$ é basato sulla segunete proprietá ottenuta come conseguenza del teorema di Lagrange.

**Lemma 3.1.0.1.** *Se $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ é una funzione differenziabile e $G'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$, allora la funzione $G(x)$ é costante.*

*Dimostrazione.* Se $x_1 < x_2$ so due punti dell'intervallo $(a,b)$, allora il teorema di Lagrange ci da

$$G(x_2) - G(x_1) = G'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

e l'ipotesi $G'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$ implica $G'(\xi) = 0$ e quindi

$$G(x_1) = G(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b).$$

$\square$

Se $\int f(x)dx$ non é vuoto e $F_0(x) \in \int f(x)dx$ possiamo verificare che

**Lemma 3.1.0.2.**

$$\int f(x)dx = \{F_0 + C; C \text{ é costante}\}. \tag{3.1.0.1}$$

*Dimostrazione.* Se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ allora $F(x) + C$ è anche una primitiva di $f$. Questa osservazione dimostra

$$\{F_0 + C; C \text{ é costante}\} \subset \int f(x)dx.$$

Per dimostrare l'inclusione opposta

$$\int f(x)dx \subset \{F_0 + C; C \text{ é costante}\}$$

si puo prendere una qualsiasi primitiva $F$ di $f$ e per $G = F - F_0$ si vede che

$$G'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Applicando Lemma 3.1.0.1 possiamo concludere la dimostrazione. $\square$

Il Lemma precedente ci permette di scrivere l'identitá

$$\underbrace{\int f(x)dx}_{\text{é un insieme}} = \underbrace{F_0 + C}_{\text{é sottointeso l'insieme a destra in (3.1.0.1)}} \tag{3.1.0.2}$$

### 3.1.1 Regole dell'integrazione.

Visto che la definizione 3.1.0.1 significa che l'integrale indefinito $\int f(x)dx$ é un insieme, possiamo usare la seguente regole per operazione tra insiemi. Se $A$ e $B$ sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora poniamo

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}. \tag{3.1.1.3}$$

In modo simile se $A$ é un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $\lambda$ é un numero reale, allora poniamo

$$\lambda A = \{\lambda a; a \in A\}. \tag{3.1.1.4}$$

**Lemma 3.1.1.1.** *Se $\int f(x)dx$ e $\int g(x)dx$ sono insiemi non vuoti, allora*

$$\int f(x) + g(x)dx \neq \emptyset$$

*e*

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{3.1.1.5}$$

*Dimostrazione.* Se

$$F_0(x) \in \int f(x)dx, \quad G_0(x) \in \int g(x)dx,$$

ovviamente

$$F_0'(x) + G_0'(x) = f(x) + g(x)$$

e quindi

$$F_0 + G_0 \in \int f(x) + g(x)dx.$$

□

**Lemma 3.1.1.2.** *Se* $\int f(x)dx$ *e un insieme non vuoto e* $\alpha$ *é un numero reale, allora*

$$\int \alpha f(x)dx \neq \emptyset$$

*e*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx. \tag{3.1.1.6}$$

*Dimostrazione.* Se

$$F_0(x) \in \int f(x)dx,$$

e $\alpha$ é un numero reale ovviamente

$$(\alpha F_0(x))' = \alpha f(x)$$

e quindi

$$\alpha F_0 \in \int \alpha f(x)dx.$$

□

**Lemma 3.1.1.3** (Integrazione per parti)**.** *Se* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *sono due funzioni differenziabili e*

$$\int f'(x)g(x)dx$$

*é un insieme non vuoto, allora*

$$\int f(x)g'(x)dx \neq \emptyset$$

*e*

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C. \tag{3.1.1.7}$$

*Dimostrazione.* Se

$$\Phi(x) \in \int f'(x)g(x)dx,$$

ovviamente

$$(f(x)g(x))' - \Phi'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

e quindi

$$f(x)g(x) - \Phi(x) \in \int f(x)g'(x)dx.$$

□

### 3.1.2 Cambiammento di variabili

Se
$$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$$
é una funzione differenziabile, allora possiamo definire il differenziale $d\varphi$ di $\varphi(x)$ come segue
$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx.$$

Se $I = (a,b)$ é un intervallo aperto, $J = (c,d)$ ed un altro intervallo aperto e
$$\varphi : I \to J$$
$$f : y \in J \to f(y) \in \mathbb{R}$$
sono due funzioni, allora possiamo definire la composizione (nota anche come "pull-back")
$$\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x)).$$
Se
$$f : y \in J \to f(y) \in \mathbb{R}$$
é una funzione tale che
$$\int f(y)dy \neq \emptyset,$$
allora poniamo
$$\varphi^*\left(\int f(y)dy\right)(x) = \left\{F(\varphi(x)); F(y) \in \int f(y)dy\right\}.$$
Spesso per semplificare le notazioni useremo anche la notazione
$$\int f(y)dy\Big|_{y=\varphi(x)}$$
al posto di
$$\varphi^*\left(\int f(y)dy\right)(x).$$

**Lemma 3.1.2.1** (Formula di cambiamento di variabili)**.** *Se*

$$\varphi : I \to J$$

*é una funzione differenziabile e*

$$f : y \in J \to f(y) \in \mathbb{R}$$

*é una funzione tale che*

$$\int f(y)dy \neq \emptyset,$$

*allora abbiamo le segunte relazioni*

$$\int \varphi^*(f)(x)\varphi'(x)dx \neq \emptyset \tag{3.1.2.8}$$

*e*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \varphi^* \left( \int f(y)dy \right)(x). \tag{3.1.2.9}$$

*o*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy \Big|_{y=\varphi(x)}.$$

*Dimostrazione.* Se

$$F(y) \in \int g(y)dy,$$

allora $F$ é differenziabile e

$$F'(y) = f(y).$$

Poniamo

$$G(x) = \underbrace{F(\varphi(x))}_{=\varphi^*(F)(x)}.$$

Abbiamo

$$G'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

e quindi

$$G(x) \in \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

□

### 3.1.3 Tabella delle primitive

| Funzione | Primitiva | Vincoli |
|---|---|---|
| $x^a$ | $x^{a+1}/(a+1)\ + C$ | $a \neq -1, a \in \mathbb{R}$, $C$ é costante |
| $x^{-1}$ | $\log\|x\| + C$ | $C$ é costante . |
| $\sin x$ | $-(\cos x) + C$ | $C$ é costante . |
| $\cos x$ | $(\sin x) + C$ | $C$ é costante . |
| $e^x$ | $e^x + C$ | $C$ é costante . |
| $a^x$ | $a^x/(\log a) + C$ | $a > 0$, e $C$ é costante . |
| $1/\cos^2 x$ | $(\tan x) + C$ | $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$, $C$ é costante . |
| $1/\sin^2 x$ | $(-\cot x) + C$ | $\cot x = (\cos x)/(\sin x)$, $C$ é costante . |
| $1/\sqrt{1-x^2}$ | $(\arcsin x) + C$ | $C$ é costante . |
| $1/\sqrt{k^2-x^2}$ | $(\arcsin(x/k)) + C$ | $k > 0$, $C$ é costante . |
| $1/\sqrt{1+x^2}$ | $(\log\|x+\sqrt{1+x^2}\|) + C$ | $C$ é costante . |
| $1/\sqrt{k^2+x^2}$ | $(\log\|x+\sqrt{k+x^2}\|) + C$ | $k \neq 0$, $C$ é costante . |
| $1/(1+x^2)$ | $\arctan x + C$ | $k \neq 0$, $C$ é costante . |
| $1/(k^2+x^2)$ | $k^{-1}\arctan(x/k) + C$ | $k \neq 0$, $C$ é costante . |
| $1/(k^2+(ax+b)^2)$ | $(ak)^{-1}\arctan((ax+b)/k) + C$ | $k \neq 0$, $C$ é costante . |

Quindi abbiamo le relazioni:

$$\int x^A dx = \frac{x^{A+1}}{A+1} + C, A \neq -1,$$
$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,$$
$$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C,$$
$$\int \mathrm{a}^x dx = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$
$$-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C,$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

La sostituzione universale $u = \tan x/2$, soddisfa

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{2}{1+u^2}du.$$

**Problema 3.1.3.1.** *Calcolare*

$$(\mathbf{a}) \int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx,\ (\mathbf{b}) \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}dx,\quad (\mathbf{c}) \int 3^x e^x dx$$
$$(\mathbf{d}) \int \frac{\cos^2 x + \sqrt{1-x^2}\cos^2 x \sin x - \sqrt{1-x^2}}{\cos^2 x\sqrt{1-x^2}}dx$$

**Problema 3.1.3.2.** *Calcolare*

$$\int \frac{x^7 dx}{(1+4x^8)^4}.$$

# 3.2 Esercizi sull'integrale indefinito

## 3.2.1 Esercizi sull'integrazione per parti

**Problema 3.2.1.1.** *(test 2017) Calcolare*

$$\int \sin^2 x\, dx$$

*Risposta.*
Applichiamo la *formula di integrazione per parti* dopo aver scritto l'integrale assegnato nel modo che segue

$$\int \sin^2 x \ dx = \int \sin x \quad \sin x \ dx.$$

Poniamo $g(x) = \sin x$ e $f'(x) = \sin x$, quindi $g'(x) = \cos x$ e $f(x) = -\cos x$. Sostituendo

$$\begin{aligned}\int \sin x \quad \sin x \ dx \quad &= -\cos x \ \sin x \ - \textstyle\int -\cos^2 x \, dx = \\ &= -\cos x \ \sin x + \textstyle\int \cos^2 x dx = \\ &= -\cos x \ \sin x + \textstyle\int (1-\sin^2 x) \, dx = \\ &= -\cos x \ \sin x + x + C - \textstyle\int \sin^2 x dx\end{aligned}$$

ovvero

$$\int \sin^2 x dx = -\cos x \ \sin x + x + C - \int \sin^2 x dx$$

Portando al primo membro l'integrale

$$2\int \sin^2 x dx = -\cos x \ \sin x + x + C$$

da cui

$$\int \sin^2 x dx = \frac{-\cos x \ \sin x + x}{2} + C$$

Allo stesso risultato si arriva mediante le *formule di bisezione*:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \ dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

**Problema 3.2.1.2.** *(test 2017) Calcolare*

$$\int \cos^2(x) \sin(x) \, dx$$

*Idea della soluzione.* Usiamo le relazioni

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

e

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Cosi troviamo

$$\cos^2(x) \sin(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \sin x = \frac{\sin x}{2} + \frac{\cos(2x) \sin x}{2} =$$

$$\frac{\sin x}{2} + \frac{1}{4} (\sin(3x) - \sin x)$$

Il risultato si trova subito

$$\int \cos^2(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{4} \int \sin(3x) dx - \frac{1}{4} \int \sin(3x) dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{12} \cos(3x) + C.$$

□

**Problema 3.2.1.3.** *Calcolare*

$$\int x \sin x \, dx$$

**Risposta**

Procediamo mediante l'integrazione per parti ponendo $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$, quindi $f(x) = -\cos x$ :

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

**Problema 3.2.1.4.** *Calcolare*

$$\int e^x \sin x \, dx$$

**Risposta.** Applichiamo la formula di integrazione per parti ponendo $g(x) = \sin x$ e $f'(x) = e^x$ :

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Portando al primo membro l'ultimo integrale e dividendo per 2 :

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C$$

**Problema 3.2.1.5.** *Calcolare*

$$\int \sin mx \cos nx \, dx$$

**Risposta.** Si può integrare per parti prendento ad esempio $g(x) = \sin mx$ e $f'(x) = \cos nx$, oppure si possono utilizzare le *formule di Werner*:

$$\int \sin mx \cos nx \, dx = \int \frac{1}{2} [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x] \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{1}{2} \frac{\cos(m+n)x}{m+n} + C$$

**Problema 3.2.1.6.** *Calcolare*

$$\int x \cos x \, e^x \, dx$$

**Risposta.** Procediamo integrando per parti. Poniamo $g(x) = x \cos x$ e $f'(x) = e^x$

$$\int x \cos x \, e^x \, dx = x \cos x \, e^x - \int \cos x \, e^x dx - \int x \sin x \, e^x dx \tag{3.2.1.10}$$

Consideriamo l'ultimo integrale

$$\int x \sin x \, e^x \, dx = x \sin x \, e^x - \int \sin x \, e^x \, dx - \int x \cos x e^x dx \tag{3.2.1.11}$$

Da (3.2.1.10) e (3.2.1.11) otteniamo

$$2\int x\cos x\; e^x\,dx \;=\; x\,e^x\,(\sin x+\cos x)-\int\cos x\; e^x\,dx-\int\sin x\; e^x\,dx.$$

Si ritorna così agli integrali visti sopra.
**OSSERVAZIONE**
Anche nel caso che si voglia calcolare

$$\int P_n(x)\; e^x\; dx$$

(dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado $n$ in $x$) si può procedere per parti. Esiste comunque un metodo alternativo che permette di semplificare la risoluzione di integrali di questo tipo o del tipo

$$\int P_n(x)\; sinx\; dx, \qquad \int P_n(x)\;\cos x\; dx,$$

si tratta del **metodo dei coefficienti indeterminati.** Illustrimo questo metodo con un esempio.

**Problema 3.2.1.7.** *Calcolare*

$$\int e^x\,(5x^2+x-3)\,dx$$

**Risposta.**
Cerchiamo primitive del tipo $(Ax^2+Bx+C)e^x$, ovvero determiniamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\int e^x\,(5x^2+x-3)\,dx = (Ax^2+Bx+C)e^x + C_1,$$

che equivale a

$$\frac{d}{dx}[(Ax^2+Bx+C)e^x] = \; e^x\,(5x^2+x-3)$$

Effettuando la derivazione otteniamo l'identità:

$$Ax^2+(2A+B)x+B+C = 5x^2-x-3$$

e quindi il sistema

$$\begin{cases} A & = & 5 \\ (2A+B) & = & -1 \\ B+C & = & -3 \end{cases}$$

Da cui $A=5,\ B=-9,\ C=6$.

**Problema 3.2.1.8.** *Calcolare*

$$\int (x^2+x)\ \sin x\, dx$$

**Risposta.**
Procediamo in modo analogo all'esercizio precedente determinando $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tali che

$$\int (x^2+x)\ \sin x\, dx = (Ax^2+Bx+C)\ \sin x + (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cos x + k.$$

Usando il *metodo di integrazione per parti*, calcolare

| | | |
|---|---|---|
| (1) $\int \log x dx$ | (2) $\int \arctan x dx$ | (3) $\int x^\alpha \log x dx$ |
| (4) $\int \log^2 x dx$ | (5) $\int x^2 \log^2 x dx$ | (6) $\int x \arctan x dx$ |
| (7) $\int x^2 \arctan x dx$ | (8) $\int x e^x dx$ | (9) $\int x \cos x dx$ |
| (10) $\int x^2 \cos x dx$ | (11) $\int \arcsin x dx$ | (12) $\int x e^x \sin x dx$ |
| (13) $\int\ \sin mx\ \sin nx\, dx$ | (14) $\int\ \cos mx\ \cos nx\, dx$ | |

### 3.2.2 Integrali di funzioni razionali

Si deve calcolare l'integrale $\int f(x)dx$, dove $f(x)=P(x)/Q(x)$, e $P(x), Q(x)$ sono polinomi in $x$.

I caso:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, n>1$$

In questo caso abbiamo

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C.$$

II caso:

$$\int \frac{1}{(x-a)}dx,$$

In questo caso abbiamo

$$\int \frac{1}{(x-a)}dx = \log|x-a| + C.$$

III Caso:

$$\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx,$$

a) se $x^2+ax+b$ ha radice reale $\alpha$ con molteplicità 2 :

$$\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)^2}dx = -\frac{1}{(x-\alpha)} + C,$$

b) se $x^2+ax+b$ ha due radici reali $\alpha \neq \beta$, allora

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{x-\beta} - \frac{1}{x-\alpha}\right).$$

c) se $x^2+ax+b$ ha due radici complesse

$$\alpha = p+iq,\ \overline{\alpha} = p-iq,$$

allora

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x-p)^2+q^2}.$$

**Problema 3.2.2.1.** *Verificare che*

$$\begin{aligned} &\int \frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}dx \\ =&\frac{A}{2}\ln((x-p)^2+q^2) + \frac{Ap+B}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right). \end{aligned} \tag{3.2.2.12}$$

*Soluzione.* Abbiamo le relazioni

$$\int \frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}dx = A\int \frac{x-p}{(x-p)^2+q^2}dx + \int \frac{Ap+B}{(x-p)^2+q^2}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d((x-p)^2)}{(x-p)^2+q^2} + \frac{Ap+B}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right) =$$

$$= \frac{A}{2}\ln((x-p)^2+q^2) + \frac{Ap+B}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right).$$

□

IV caso:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

dove grad$P \geq$ grad$Q$. In questo caso abbiamo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

dove grad$R <$ grad$Q$.

**Problema 3.2.2.2.** *Calcolare*

$$\int \frac{x^4-2x^2+x+1}{x^2+1}dx.$$

*Soluzione.* Abbiamo le relazioni

$$\begin{pmatrix} x^4 & +0x^3 & -2x^2 & x & +1 & | & x^2 & +0x & +1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ x^4 & +0x^3 & +x^2 & 0 & 0 & | & x^2 & -3x & +1 \\ \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow \\ 0 & 0 & -3x^2 & +x & +1 & | & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & -3x^2 & 0 & -3 & | & \bullet & \bullet & \bullet \\ \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow \\ 0 & 0 & 0 & +x & +4 & | & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\frac{x^4-2x^2+x+1}{x^2+1} = x^2-3x+1+\frac{x+4}{x^2+1}.$$

Cosi troviamo

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + x + 1}{x^2+1} dx = \int (x^2 - 3x + 1) dx + \int \frac{x+4}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\arctan x + C.$$

□

### 3.2.3 Il metodo di Hermite

Iniziamo con alcuni esempi.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2}\int x \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2(1+x^2)} dx \tag{3.2.3.13}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2(1+x^2)} dx. \tag{3.2.3.14}$$

Si possano verificare inoltre le relazioni

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^m} dx = \frac{1}{2}\int x \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^m} = -\frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} +$$

$$+ \int \frac{1}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} dx$$

e

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^m} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^m} dx = \frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} +$$

$$+ \int \frac{2m-3}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} dx.$$

Cosí per ogni $m \geq 2$ abbiamo

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^m} dx = \frac{x}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} + \int \frac{2m-3}{2(m-1)(1+x^2)^{m-1}} dx. \tag{3.2.3.15}$$

Se $Q(x)$ é polinomio con grad$Q = N \geq 1$, allora abbiamo.

**Lemma 3.2.3.1.** *Se* $Q(x)$ *é polinomio con* $\mathrm{grad} Q = N \geq 1$, *allora*

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{n} q_j(x)^{a_j}, \;\; a_j \geq 1,$$

*dove* $q_j(x)$ *sono polinomi primi tra loro tali che loro sono lineari o polinomi quadratici irreducibili.*

*Proof.* Siano

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h,$$

radici reali di Q con molteplicitá $m_1, m_2, \cdots, m_h$. Siano

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k,$$

e

$$\overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, \cdots, \overline{\beta_k},$$

radici complesse di $Q(x)$ con molteplicitá $\mu_1, \cdots, \mu_k$. Posto

$$\beta_j = p_j + iq_j, \quad j = 1, \cdots, k$$

abbiamo

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_h)^{m_h} (x-\beta_1)^{\mu_1} \cdots (x-\beta_k)^{\mu_k} (x-\overline{\beta_1})^{\mu_1} \cdots (x-\overline{\beta_k})^{\mu_k}.$$

L'identitá

$$(x - \beta_j)(x - \overline{\beta_j}) = (x - p_j)^2 + q_j^2$$

implica

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_h)^{m_h} ((x-p_1)^2 + q_1^2)^{\mu_1} \cdots ((x-p_k)^2 + q_k^2)^{\mu_k}.$$

□

Dobbiamo studiare

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

dove $\mathrm{grad} P < \mathrm{grad} Q$.

Il metodo di Hermite - Ostrogradski é basato sulla furmula.

**Lemma 3.2.3.2.** *(vedi [9])*
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \qquad (3.2.3.16)$$
*dove*
$$Q_1(x) = \prod_{j=1}^{n} q_j(x)^{(a_j-1)}, \quad Q_2(x) = \prod_{j=1}^{n} q_j(x).$$

*Proof.* Se $Q(x) = (x-c)^m$ e
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k$$
allora l'identitá (3.2.3.16) si puo dedurre come segue
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \sum_{j=-m}^{n-m} a_{j+m} \int (x-c)^j =$$
$$= \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + a_{m-1} \int \frac{1}{x-c}dx.$$
Se $Q(x) = (x^2+ax+b)^m$, $P(x) = R(x)Q_2(x) + S(x)$ con $S(x)$ lineare, allora
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{R(x)}{Q_2(x)^{m-1}}dx + \int \frac{S(x)}{Q_2(x)^m}dx$$
e possiamo verificare la tesi solo per
$$\int \frac{S(x)}{Q_2(x)^m}.$$
Se $S(x) = Ax + B$, e $m = 1$ allora l'identitá (3.2.3.16) vale con $P_1(x) = 0$.

Se $S(x) = Ax + B$, e $m \geq 2$ allora (3.2.3.15) implica
$$\int \frac{1}{Q_2(x)^m}dx = \frac{C_1}{Q_2(x)^{m-1}} + \int \frac{C_2}{Q_2(x)^{m-1}}dx$$
e possiamo dedurre (3.2.3.16).

□

Poniamo

$$T(x) = (x-\alpha_1)^{m_1-1} \cdots (x-\alpha_h)^{m_h-1}((x-p_1)^2+q_1^2)^{\mu_1-1} \cdots ((x-p_k)^2+q_k^2)^{\mu_k-1}.$$

Abbiamo la seguente

**Proposizione 3.2.3.1.** *Esistono numeri $A_j, B_j, C_j$ ed esiste un polinomio $R(x)$ con* $\mathrm{grad} R = \mathrm{grad} T - 1$ *tale che per ogni $x$ con $Q(x) \neq 0$ vale l'identità*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{h} \frac{A_j}{(x-\alpha_j)} + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_j x + C_j}{(x-p_j)^2+q_j^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{R(x)}{T(x)}\right).$$

**Problema 3.2.3.1.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}.$$

*Soluzione.* Cerchiamo come soggerito dal Proposizione 3.2.3.1 relazione del tipo

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Questa relazione e equivalente a

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1).$$

Cosi confrontando i due polinomi a sinistra e destra troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= A+B+C, \qquad (3.2.3.17)\\ 0 &= A-B+D\\ 0 &= A+B-C\\ 1 &= A-B-D. \end{aligned}$$

Da queste relazioni deduciamo $C = 0$, $B = -A$ e

$$\begin{aligned} 0 &= 2A+D, \qquad (3.2.3.18)\\ 1 &= 2A-D \end{aligned}$$

e quindi $A = 1/4$, $D = -1/2$. Alla fine otteniamo

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Per l'integrale abbiamo

$$\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \int \frac{1}{4(x-1)}dx - \int \frac{1}{4(x+1)}dx - \int \frac{1}{2(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

$\square$

**Problema 3.2.3.2.** *Calcolare*

$$\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}.$$

*Soluzione.* Abbiamo

$$\frac{1}{(t^2+t+1)^2} = \frac{A}{t^2+t+1} + \left(\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right)'.$$

secondo il metodo di Hermite. Abbiamo

$$\frac{1}{(t^2+t+1)^2} = \frac{A}{t^2+t+1} + \frac{B(t^2+t+1)-(Bt+C)(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}.$$

Cosi troviamo

$$1 = A(t^2+t+1) + B(t^2+t+1) - (Bt+C)(2t+1)$$

e quindi abbiamo il sistema

$$A - B = 0, \ A - 2C = 0, \quad A + B - C = 1.$$

L'unica soluzione e

$$A = B = \frac{2}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

In conclusione

$$\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+t+1} + \frac{1}{3}\frac{2t+1}{t^2+t+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\frac{2t+1}{t^2+t+1} + C.$$

□

**Problema 3.2.3.3.** *Calcolare*

$$\int \frac{dt}{(t^2-t+1)^2}.$$

*Soluzione.* Abbiamo

$$\frac{1}{(t^2-t+1)^2} = \frac{A}{t^2-t+1} + \left(\frac{Bt+C}{t^2-t+1}\right)'.$$

secondo il metodo di Hermite. Abbiamo

$$\frac{1}{(t^2-t+1)^2} = \frac{A}{t^2-t+1} + \frac{B(t^2-t+1)-(Bt+C)(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}.$$

Cosi troviamo

$$1 = A(t^2-t+1) + B(t^2-t+1) - (Bt+C)(2t-1)$$

e quindi abbiamo il sistema

$$A-B=0, \; A+2C=0, \quad A+B+C=1.$$

L'unica soluzione e

$$A=B=\frac{2}{3}, \quad C=-\frac{1}{3}.$$

In conclusione

$$\int \frac{dt}{(t^2-t+1)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-t+1} + \frac{1}{3}\frac{2t-1}{t^2-t+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\frac{2t-1}{t^2-t+1} + C.$$

□

**Problema 3.2.3.4.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{(t-1)^2(t^2+t+1)}\ dt$$

*Soluzione.* Usiamo il metodo di Hermite

$$\frac{1}{(t-1)^2(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t^2+t+1)}$$

e quindi

$$1 = A(t^3-1) + B(t^2+t+1) + C(t^2-2t+1)$$

Troviamo il sistema

$$A = 0, B - 2C = 0, -A + B + C = 1,$$

$$A = 0, C = \frac{1}{3},\ B = \frac{2}{3}.$$

In conclusione

$$\int \frac{1}{(t-1)^2(t^2+t+1)}\ dt = -\frac{2}{3(t-1)} + \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

□

**Problema 3.2.3.5.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t^2-t+1)}\ dt$$

*Soluzione.* Usiamo il metodo di Hermite

$$\frac{1}{(t+1)^2(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t^2-t+1)}$$

e quindi

$$1 = A(t^3+1) + B(t^2-t+1) + C(t^2+2t+1)$$

Troviamo il sistema

$$A = 0, B + 2C = 0, A - B + C = 1,$$

$$A = 0, C = \frac{1}{3},\ B = -\frac{2}{3}.$$

In conclusione

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t^2-t+1)}\, dt = \frac{2}{3(t+1)} - \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

□

**Problema 3.2.3.6.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2}.$$

*Soluzione.* Usando Proposizione 3.2.3.1 cerchiamo

$$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \left(\frac{Ex+F}{x^2+1}\right)'.$$

□

**Problema 3.2.3.7.** *Calcolare*

$$\int \frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} dx.$$

*Soluzione.* Abbiamo

$$\frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} = -\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2(x+2)}.$$

Possiamo supporre

$$\frac{2-x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{a+bx}{(x+1)^2} + \frac{c+dx}{(x+2)^2}$$

e quindi

$$2 - x^2 = (a+bx)(x+2)^2 + (c+dx)(1+x)^2$$

Confrontando i coefficienti troviamo

$$b + d = 0,\ a + 4b + c + 2d = -1, 4a + 4b + 2c + d = 0, 4a + c = 2$$

e

$$b = d = 0, a = 1, c = -2.$$

Cosi

$$\int \frac{2 - x^2}{(x+1)^2(x+2)^2} dx = -(1+x)^{-1} + (x+x)^{-1} + c.$$

$\square$

**Problema 3.2.3.8.** *Calcolare*

$$\int \frac{x^2 + 22x + 13}{(x-1)^2(x+2)^2} dx.$$

*Risp.*

$$-4(x-1)^{-1} + 3(x+2)^{-1} + c.$$

$\square$

**Problema 3.2.3.9.** *Calcolare*

$$\int \frac{x^2 + 22x + 10}{(x+2)^2(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

*Risp.*

$$4 \arctan(x-1) + 3(x+2)^{-1} + c.$$

$\square$

**Problema 3.2.3.10.** *Calcolare*

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 4}{x^3 - 1} dx.$$

*Risp.*

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(2(x+1/2)/\sqrt{3}) - 3\log(x-1) + c.$$

$\square$

### 3.2.4 Integrali del tipo $\int R(x, \sqrt{ax+b})dx$.

Si fa la sostituzione

$$t^2 = ax + b.$$

Abbiamo

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})dx = \int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t\right)\frac{2t}{a}dt.$$

**Problema 3.2.4.1.** *Calcolare*

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}-x}{x-1}\,dx$$

**Risposta** Poniamo $t = \sqrt{2x+3}$, da cui $t^2 = 2x+3$ e quindi $x = \dfrac{t^2-3}{2}$ da cui $dx = t\,dt$. Sostituendo nell'integrale proposto

$$\int \frac{\left(t - \frac{t^2-2}{2}\right)t}{\frac{t^2-3}{2}-1}\,dt = -\int \frac{t^3-2t^2-3t}{t^2-5}\,dt.$$

Effettuando la divisione tra numeratore e denominatore della funzione integranda possiamo scrivere: $t^3-2t^2-3t = (t-2)(t^2-5)+(2t-10)$. Sostituiamo l'espressione ottenuta nell'integrale:

$$-\int \frac{t^2-2t-3}{t^2-5}\,dt \;=\; -\int (t-2)\,dt + \int \frac{2t-10}{t^2-5}\,dt$$

Osserviamo che

$$\frac{2t-10}{t^2-5} = \frac{A}{t-\sqrt{5}} + \frac{B}{t+\sqrt{5}}$$

Da cui si ha $2t-10 = (A+B)t + (A-B)\sqrt{5}$, e quindi il sistema

$$\begin{cases} A+B &= 2 \\ A-B &= -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Da questo otteniamo $A = \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}$. Sostiuiamo questi valori nell'integrale dato e risolviamo ottenendo l'insieme delle primitive:

$$-\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}\log|t-\sqrt{5}| + \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}}\log|t+\sqrt{5}| + C.$$

**Problema 3.2.4.2.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{x^2+3}{1+\sqrt{x+1}}dx.$$

*Soluzione.* La sostituzione

$$t = \sqrt{x+1}$$

implica

$$x = t^2 - 1, \ dx = 2tdt$$

$$\int \frac{x^2+3}{1+\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{(t^2-1)^2+3}{1+t}tdt =$$

$$= \int \frac{t^5 - 2t^3 + 4t}{1+t}dt$$

Abbiamo

$$\frac{t^5 - 2t^3 + 4t}{1+t} = t^4 - t^3 - t^2 + t + 3 - \frac{3}{t+1}.$$

Cosi

$$I(x) = \int \left(t^4 - t^3 - t^2 + t + 3\right) dt - \int \frac{3}{t+1}dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t - 3\log(t+1) + C,$$

dove $t = \sqrt{x+1}$. □

### 3.2.5 Integrali del tipo $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right) dx$.

Si fa il cambiamento di variabili

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$$

**Problema 3.2.5.1.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} dx$$

**Risposta.**

Poniamo $t^3 = \dfrac{x+1}{x-1}$, da cui segue $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$ e $dx = \dfrac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$. Sostituiamo nell'integrale dato

$$-6\int \frac{t^4}{(t^3+1)^2}\,dt$$

Si osservi che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore. Calcoliamo le radici del denominatore per applicare il *metodo di Hermite*: $t_1 = -1$, $t_{2,3} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $(t^3+1)^2 = (t+1)^2[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2$.

Quindi dobbiamo determinare $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{d}{dt}\,\frac{R(t)}{T(t)},$$

dove

$$T(t) = (t+1)[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}],\ \ R(t) = Dt^2+Et+F.$$

Quindi

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A(t+1)(t^2-t+1)^2}{(t^3+1)^2} +$$

$$+\frac{(Bt+C)(t+1)^2(t^2-t+1)+(2Dt+E)(t^3+1)-3t^2(Dt^2+Et+F)}{(t^3+1)^2}.$$

Da questa relazione ricaviamo $A, B, C, D, E, F$ e quindi risolviamo l'integrale sostituendo sopra.

Un altro modo di scomporre la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ alternativo al *metodo di Hermite* è il seguente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} +$$
$$\frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+\frac{A_{h1}}{x-\alpha_h} + \frac{A_{h2}}{(x-\alpha_h)^2} + \cdots + \frac{A_{hm_h}}{(x-\alpha_h)^{m_h}} +$$
$$\frac{B_{11}x + C_{11}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]^2} + \cdots + \frac{B_{1\mu_1}x + C_{1\mu_1}}{[(x-p_1)^2 + q_1^2]^{\mu_1}} +$$
$$+\frac{B_{21}x + C_{21}}{[(x-p_2)^2 + q_2^2]} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{[(x-p_2)^2 + q_2^2]^2} + \cdots \frac{B_{2\mu_2}x + C_{2\mu_2}}{[(x-p_2)^2 + q_2^2]^{\mu_2}} + \cdots +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$\frac{B_{k1}x + C_{k1}}{[(x-p_k)^2 + q_k^2]} + \frac{B_{k2}x + C_{k2}}{[(x-p_k)^2 + q_k^2]^2} + \cdots + \frac{B_{k\mu_k}x + C_{k\mu_k}}{[(x-p_k)^2 + q_k^2]^{\mu_k}}.$$

Come esempio applichiamo al problema precedente questa scomposizione

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A_{11}}{t+1} + \frac{A_{12}}{(t+1)^2} + \frac{B_{11}t + C_{11}}{[(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]} + \frac{B_{12}t + C_{12}}{[(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2}$$

Da cui

$$\frac{t^4}{(t^3+1)^2} = \frac{A_{11}(t+1)(t^2-t+1)^2 + A_{12}(t^2-t+1)^2}{(t^3+1)^2} +$$
$$+\frac{(B_{11}t + C_{11})(t^2-t+1)(t+1)^2 + (B_{12}t + C_{12})(t+1)^2}{(t^3+1)^2}.$$

Otteniamo quindi un sistema lineare di primo grado in sei equazioni nelle incognite $A_{11}$, $A_{12}$, $B_{11}$, $B_{12}$, $C_{11}$, $C_{12}$, che risolto mi permette di scomporre la frazione $\frac{t^4}{(t^3+1)^2}$ in somma di frazioni delle quali si riesce a calcolare le primitive in maniera elementare.

**Problema 3.2.5.2.** *Calcolare*

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$$

### 3.2.6 Integrale del tipo $\int R\left(x,\ \sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}},\ \cdots,\ \sqrt[q_h]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_h}}\right)$.

Dove $p_j, q_j \in \mathbb{N},\ p_j > 0,\ q_j > 1\ j = 1, \cdots, h$. Questi integrali si possono ricondurre ad integrali di funzioni razionali mediante la sostituzione:

$$t^q = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

dove

$$q = m.c.m.(q_1, \cdots, q_h)$$

**Problema 3.2.6.1.** *Calcolare*

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\ \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\ dx$$

*Soluzione.* Usando la relazione

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\ \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = \sqrt[6]{\frac{x+2}{x+1}},$$

si vede che possiamo fare la sostituzione

$$t^6 = \frac{x+1}{x+2}$$

da cui

$$x = \frac{2t^6-1}{1-t^6} \quad \text{e} \quad dx = \frac{6t^5}{(1-t^6)^2}dt.$$

Dopo la sostituzione abbiamo

$$I(x) = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}\ \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\ dx = 6\int \frac{t^4}{(1-t^6)^2}\ dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4}{(1-t^3)^2(1+t^3)^2}\ dt$$

Usiamo la relazione

$$t^4 = \frac{t(t^3+1)^2 - t(t^3-1)^2}{4}$$

e troviamo

$$\frac{t^4}{(1-t^6)^2} = \frac{t^4}{(t^3-1)^2(1+t^3)^2} = \frac{t}{4(t^3-1)^2} - \frac{t}{4(t^3+1)^2}$$

$$I(x) = \frac{6}{4}\int \frac{t}{(t^3-1)^2}\ dt - \frac{6}{4}\int \frac{t}{(t^3+1)^2}\ dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{t}{(t^3-1)^2}\ dt - \frac{3}{2}\int \frac{t}{(t^3+1)^2}\ dt.$$

Usando le relazioni

$$t = (t^2+t+1) - (t-1)^2,\ t = \frac{(t+1)^2 - (t^2-t+1)}{3},$$

troviamo

$$I(x) = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(t-1)^2(t^2+t+1)}\ dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(t^2+t+1)^2}\ dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2-t+1)^2}\ dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2(t^2-t+1)} dt.$$

Usiamo Problema 3.2.3.2 per

$$\int \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}.$$

Usiamo Problema 3.2.3.3 per

$$\int \frac{dt}{(t^2-t+1)^2}.$$

Usiamo Problema 3.2.3.4 per

$$\int \frac{1}{(t-1)^2(t^2+t+1)}\ dt$$

Usiamo Problema 3.2.3.5 per

$$\int \frac{1}{(t+1)^2(t^2-t+1)}\ dt.$$

□

### 3.2.7 Integrali del tipo $\int R\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right)\,dx$.

**Esempio 3.2.7.1.** *Calcoliamo*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}}.$$

*É un integrale della tabella*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} = \log(x+(1+x^2)^{1/2}) + c.$$

**Esempio 3.2.7.2.** *Calcoliamo*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

*Usiamo le relazioni*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{2}\int \frac{xd(x^2+1)}{(1+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} + \int xd\left((x^2+1)^{-1/2}\right) =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} + x(x^2+1)^{-1/2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^{1/2}} =$$

$$= x(x^2+1)^{-1/2}.$$

In generale per l'integrale del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+ax+b}\right)\,dx$$

si fa il cambiamento di variabili

$$\sqrt{x^2+ax+b} = x+t.$$

**Problema 3.2.7.1.** *Calcolare*

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx.$$

Poniamo

$$\sqrt{x^2-2x+3} = x+t$$

da cui

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{t+1}, \quad dx = \frac{1}{2}\,\frac{-t^2-2t-3}{(t+1)^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2-2x+3} = \frac{1}{2}\,\frac{3-t^2}{t+1}+t.$$

Sostituendo sopra ci riconduciamo a risolvere

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-3t^2+2t+11}{(t+1)^2}\,dt.$$

**Problema 3.2.7.2.** *Calcolare*

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx.$$

### 3.2.8 Integrali del tipo $\int R\left(x,\,\sqrt{-x^2+ax+b}\right)\,dx$.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ le radici dell'equazione $-x^2+ax+b=0$, (se le radici sono complesse l'espressione non è definita) supponiamo $\alpha < \beta$. Osserviamo che

$$\sqrt{-x^2+ax+b} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (\beta-x)\,\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

Si pone

$$t^2 = \frac{x-\alpha}{\beta-x} \quad \text{quindi} \quad \sqrt{-x^2+ax+b} = t(\beta-x).$$

**Problema 3.2.8.1.** *Calcolare*

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}\,dx$$

Le radici del radicando sono $\alpha = -2$, $\beta = 4$. Quindi poniamo

$$t = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$$

da cui

$$x = \frac{4t^2-2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{12t}{(1+t^2)^2}\ dt$$

Sostituendo nell'integrale dato, ci riconduciamo a risolvere

$$2\int \frac{5t^2-1}{(1+t^2)^2}\ dt$$

### 3.2.9 Integrali del tipo $\int x^m(ax^p+b)^q dx$.

Questi integrali si trasformano in un integrale di funzioni razionali se almeno uno dei seguenti numeri

$$q, \frac{m+1}{p}, \quad q+\frac{m+1}{p}$$

è intero. Nel caso in cui $q$ è intero $q$ si ritorna ad uno dei casi esaminati in precedenza. Se è intero

$$\frac{m+1}{p},$$

o

$$q+\frac{m+1}{p}$$

si fa il cambiamento di variabili

$$x^p = t.$$

**Problema 3.2.9.1.** *Calcolare*

$$\int x^3\left(3+2x^2\right)^{\frac{1}{3}}\ dx.$$

In questo caso

$$m = 3,\ p = 2\, q = \frac{1}{3}$$

risulta intero

$$\frac{m+1}{p} = 2.$$

Si pone $x^2 = t$, quindi $x = \sqrt{t}$, e $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\ dt$. L'integrale diventa

$$\frac{1}{2} \int t\ (3+2t)^{\frac{1}{3}}\ dt,$$

che è del tipo visto nel $S4$.

**Problema 3.2.9.2.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{3+2\sqrt[3]{x^8}}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$$

L'integrale può essere scritto nella forma

$$\int x^{\frac{1}{3}}\ \left(3+2x^{\frac{8}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\ dx.$$

In questo caso

$$m = -\frac{1}{3},\ p = \frac{8}{3},\ q = -\frac{1}{4}$$

Risulta intero $q + \frac{m+1}{p}$. Si pone $x^{\frac{8}{3}} = t$ da cui $x = t^{\frac{3}{8}}$ e $dx = \dfrac{3}{8}\, t^{-\frac{5}{8}}\, dt$. Sostituendo nell'integrale otteniamo

$$\frac{3}{8} \int \frac{1}{t}\ \left(\frac{t}{3+2t}\right)^{\frac{1}{4}}\ dt,$$

che è del tipo di integrali visti nella sezione 3.2.5.

**Problema 3.2.9.3.** *Calcolare*

$$\int x^3(1+2x^2)^{-3/2}dx.$$

### 3.2.10 Integrali del tipo $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Si possono effettuare vari cambiamenti variabili. La scelta dipende dall'espressione della funzione integranda. Il più generale è il seguente

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

da cui

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Altri cambiamenti di variabile che si possono effettuare sono

$$t = \cos x,\ \text{oppure } t = \sin x,\ \text{oppure } t = \tan x.$$

Vediamo alcuni esempi.

**Problema 3.2.10.1.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx$$

**Risposta.** Poniamo

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

Sostituiamo nell'integrale dato

$$\int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{1+t}\,dt = \log|1+t| + C$$

Tenuto conto della posizione fatta l'insieme delle primitive dell'integrale di partenza è dato da:

$$\log\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) + C.$$

**Problema 3.2.10.2.** *Calcolare*

$$\int \frac{\sin x(\cos x - 1)}{1+\cos^2 x}\,dx$$

**Risposta** Poniamo $t = \cos x$ da cui $dt = -\sin x dx$. Sostituendo nell'integrale proposto

$$-\int \frac{t-1}{1+t^2}\, dt = -\frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\log|1+t^2| + \arctan(t) + C$$

Quindi

$$\int \frac{\sin x(\cos x - 1)}{1+\cos^2 x}\, dx = -\log|1+\cos^2 x| + \arctan(1+\cos^2) + C$$

**Problema 3.2.10.3.** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{(\sin x - 3)\, \cos x}\, dx$$

**Risposta**

$$\int \frac{1}{(\sin x - 3)\, \cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x - 3} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x - 3} \frac{1}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx$$

Poniamo $t = \sin x$, quindi $dt = \cos x dx$. Sostituendo nell'integrale di partenza ci riportiamo a risolvere

$$\int \frac{1}{t-3} \frac{1}{1-t^2}\, dt.$$

**Problema 3.2.10.4.** *Calcolare*

$$\int \frac{\sin^2 x + 4\cos^2 x}{\tan x + 2}\, dx$$

**Risposta.**

$$\int \frac{\sin^2 x + 4\cos^2 x}{\tan x + 2}\, dx = \int \cos^4 x \frac{\tan^2 x + 4}{\tan x + 2} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{(1+\tan^2 x)^2} \frac{\tan^2 x + 4}{\tan x + 2} (1+\tan^2 x)\, dx$$

Poniamo $t = \tan x$, da cui $dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = (1+\tan^2 x)\, dx$. Sostituendo nell'integrale dato ci riconduciamo a risolvere

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} \frac{t^2+4}{t+2}\, dt$$

**Problema 3.2.10.5.** *Calcolare*

$$\int \frac{1-\sin x}{\sin x(1-\cos x)} dx.$$

### 3.2.11 Vari esercizi sugli integrali indefiniti

**Problema 3.2.11.1.** *Calcolare*

(**a**) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx,$

(**b**) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx,$

(**c**) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$

(**d**) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^3}dx,$

(**e**) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x x^2 dx$

(**f**) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$

(**g**) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^3-x}dx$

(**h**) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+2)(x-2)}dx$

(**i**) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}dx$

(**j**) $\displaystyle\int \frac{x(x+3)}{(x^4-1)}dx$

(**k**) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx$

($\ell$) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

(**m**) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(**n**) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

(**o**) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x \sin 2x}{1+\cos^2 x}dx.$

*Risposte.* a)

$$\frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

b)

$$-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

c)

$$-\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C.$$

d)

$$-\frac{\ln^2 x}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

e)

$$e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x + C.$$

f)

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c.$$

g) Usando la relazione

$$x - 1 = 2x - 1 - x,$$

troviamo

$$\int \frac{x-1}{4x^3 - x} dx = \int \frac{1}{x(2x+1)} dx - \int \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{2x} dx - \int \frac{1}{(2x+1)} dx - \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{(2x-1)} dx - \int \frac{1}{(2x+1)} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \ln(2x+1) - \frac{1}{4}\ln(2x-1) + \frac{1}{4}\ln(2x+1) + C.$$

h) Usando il metodo di Hermite troviamo

$$\frac{x}{(x^2+2)(x-2)} = \frac{1}{3(x-2)} - \frac{x-1}{3(x^2+2)}$$

e quindi

$$\int \frac{x}{(x^2+2)(x-2)} dx = \frac{1}{3}\ln(x-2) - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

i) abbiamo la relazione (usando Hermite)

$$\frac{x^3}{(x+1)(x-2)} = x + 1 + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{8}{3(x-2)}$$

e quindi

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x-2)} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{8}{3}\ln(x-2) + C.$$

**(j)** Abbiamo (usando Hermite)

$$\frac{x(x+3)}{(x^4-1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x-1} - \frac{3x-1}{2(x^2+1)}$$

e quindi

$$\int \frac{x(x+3)}{(x^4-1)} dx = \frac{1}{2}\ln(x+1) + \ln(x-1) - \frac{3}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

k) usando la sostituzione universale $t = \tan(x/2)$ troviamo

$$\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} dx = \int \frac{2dt}{t^2(t^2+1)}.$$

La relazione

$$\frac{1}{t^2(t^2+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}$$

implica

$$\int \frac{2dt}{t^2(t^2+1)} = 2\int \frac{dt}{t^2} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{2}{t} - 2\arctan x + C.$$

$\ell$ )

$$\ln(\cos x - 1) - \ln(\cos x + 1) + C.$$

m) abbiamo la sostituzione universale $t = \tan(x/2)$ e troviamo

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = 4\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Usiamo le relazioni (usando Hermite)

$$\frac{1}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2(t^2+1)} + \frac{1}{4}\left(\frac{2t+1}{t^2+1}\right)'$$

e quindi

$$4\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = 2\arctan t + \frac{2t+1}{t^2+1} + C.$$

n) abbiamo le relazioni

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \frac{1+\tan^2 x}{2\tan^2 x + 1}$$

e usando la sostituzione

$$t = \tan x,$$

troviamo

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{1+t^2}{2t^2+1}\frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}t) + C.$$

o) abbiamo le relazioni

$$\int \frac{\cos^3 x \sin 2x}{1+\cos^2 x}dx = 2\int \frac{\cos^4 x \sin x}{1+\cos^2 x}dx = -2\int \frac{t^4}{1+t^2}dt,$$

dove $t = \cos x$. Usiamo le relazioni

$$\frac{t^4}{1+t^2} = t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

e quindi

$$-2\int \frac{t^4}{1+t^2}dt = -2\int (t^2-1)dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{2}{3}t^3 + 2t - 2\arctan t + C.$$

$\square$

**Problema 3.2.11.2.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx.$$

**Risposta.** $I(x) = C + x/\ln x$.

**Problema 3.2.11.3.** *Calcolare*

$$\int (1 + \log x) x^{2x} dx.$$

*Soluzione.* Usiamo la sostituzione

$$x \log x = t.$$

Da qui deduciamo

$$x^x = e^{x(\log x)} = e^t, \; x^{2x} = e^{2x(\log x)} = e^{2t}$$

e

$$(\log x + 1) dx = dt$$

e quindi

$$\int (1 + \log x) x^{2x} dx = \int e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2} + C$$

e dopo la sostituzione troviamo

$$\int (1 + \log x) x^{2x} dx = x^{2x}/2 + C.$$

□

**Problema 3.2.11.4.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

**Risposta.**

$$I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \; \arctan \left( \frac{\tan 2x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

**Problema 3.2.11.5.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1+x^4}.$$

**Problema 3.2.11.6.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1+x^6}.$$

**Problema 3.2.11.7.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{xdx}{1+x^8}.$$

**Problema 3.2.11.8.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \frac{dx}{1+x^4}.$$

*Suggerimento.* Verificare l'identitá

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{(x^2-\sqrt{2}x+1)} + \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

Alla fine la risposta é

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\left[-2\arctan\left((1-\sqrt{2}x\right)+2\arctan\left((1+\sqrt{2}x\right)\right] -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}\log\left(\frac{(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}\right).$$

$\square$

**Problema 3.2.11.9.** *Calcolare*

$$I(x) = \int \sqrt{\tan x}dx.$$

*Suggerimento.* La sostituzione

$$\sqrt{\tan x} = t$$

implica

$$\tan x = t^2$$

e quindi abbiamo

$$x = \arctan(t^2), \quad dx = \frac{2tdt}{1+t^4}.$$

Dopo la sistituzione troviamo

$$I = \int \frac{2t^2dt}{1+t^4}.$$

e possiamo seguire il metodo standard della soluzione del problema 3.2.11.8 per esempio. □

**Problema 3.2.11.10.** *Calcolare*

$$I_\alpha(x) = \int x^\alpha \ln x \; dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

*e' trovare una funzione* $F(x)$ *tale che*
*a)* $F(x)$ *é primitiva di* $x^\alpha \ln x$,
*b)* $F(e) = 1$.

# Chapter 4

# Esercizi su integrali definiti e impropri

## 4.1 Integrale di Riemann ed esercizi

**Problema 4.1.0.1.** *(test 2017) Calcolare*

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x)\cos(x+x^3)\,dx.$$

*Soluzione.* La funzione

$$f(x) = \tan(x)\cos(x+x^3)$$

é una funzione dispari e quindi per ogni intervallo symmetrico $(-a, a)$ con $a > 0$ abbiamo

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Cosi troviamo

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan(x)\cos(x+x^3)\,dx = 0.$$

□

**Problema 4.1.0.2.** *(test 2017) Calcolare*

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sin(x^2+x^4)\,dx.$$

**Risp.** 0.

**Problema 4.1.0.3.** *(test 2017 Gestionale) Calcolare*

$$\int_0^\pi x\cos x dx$$

*Soluzione.* Abbiamo

$$\int_0^\pi x\cos x dx = \int_0^\pi x d\sin x = xsinx|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x|_0^\pi = -2.$$

□

**Problema 4.1.0.4.** *(test 2017 Gestionale) Calcolare*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}.$$

*Soluzione.* La sostituzione $4-2x=t$ ci da $dx=-dt/2$ e

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_2^4 = 2-\sqrt{2}.$$

□

**Problema 4.1.0.5.** *Calcolare*

$$(\mathbf{a}) \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx, \ (\mathbf{b}) \int_0^1 \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x}}dx, \quad (\mathbf{c}) \int_0^1 \frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x}}dx$$
$$(\mathbf{d}) \int_1^{10} \frac{dx}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}dx, \quad (\mathbf{e}) \int_{1/2}^2 \mathrm{e}^{-1/x}\frac{dx}{x^2} \quad (\mathbf{f}) \int_0^\pi x^2\cos x dx$$

**Problema 4.1.0.6.** *Calcolare*

$$\int_{-1}^1 \left|e^x-1\right| \, dx.$$

**Risposta.** Tenuto conto della seguente proprietà degli integrali

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b,$$

e di

$$\left|e^x - 1\right| = \begin{cases} e^x - 1 & x \geq 0 \\ -e^x + 1 & x < 0, \end{cases}$$

sostituiamo

$$\int_{-1}^0 -\left(e^x - 1\right)\,dx + \int_0^1 \left(e^x - 1\right)\,dx = \left[-e^x\right]_{-1}^0 + \left[x\right]_{-1}^0 + \left[e^x\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 = 2e.$$

**Problema 4.1.0.7.** *Calcolare*

$$\int_0^2 e^{|x-1|}\,dx.$$

**Risposta.** Da

$$e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & x \geq 1 \\ e^{-(x-1)} & x < 1, \end{cases}$$

e dalla proprietà degli integrali definiti vista nell'esercizio precedente otteniamo

$$\int_0^2 e^{|x-1|}\,dx. = \int_0^1 e^{-(x-1)}\,dx + \int_1^2 e^{x-1}\,dx = \left[-\,ee^{-x}\right]_0^1 + \left[e^{-1}\,e^x\right]_1^2 = 2e - 2.$$

**Problema 4.1.0.8.** *(disequazione di Cauchy) Se $f, g \in C[a,b]$ dimostrare la disequazione*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx. \tag{4.1.0.1}$$

**Problema 4.1.0.9.** *(disequazione di Hölder) Se $p, q \in (1, \infty)$ soddisano*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*allora per ogni $f, g \in C[a,b]$ abbiamo la disequazione*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}. \tag{4.1.0.2}$$

**Problema 4.1.0.10.** *(disequazione di Minkowski) Se* $p \in (1, \infty)$ *allora per ogni* $f, g \in C[a, b]$ *abbiamo la disequazione*

$$\left( \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{4.1.0.3}$$

**Problema 4.1.0.11.** *Se* $f(x) \in C[0, 1]$ *e la funzione e' derivabile in* $(a, b)$ *e soddisfa la condizione*

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1 \tag{4.1.0.4}$$

*allora la condizione* $f(0) = 0$ *implica*

$$|f(x)| \leq 1 \tag{4.1.0.5}$$

*per ogni* $x \in [0, 1]$.

**Problema 4.1.0.12.** *Se* $f(x) \in C[0, 1]$ *e la funzione e' derivabile in* $(a, b)$ *e soddisfa le condizioni*

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1 \tag{4.1.0.6}$$

*e*

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq 1 \tag{4.1.0.7}$$

*implicano*

$$|f(x)| \leq 3 \tag{4.1.0.8}$$

*per ogni* $x \in [0, 1]$.

**Problema 4.1.0.13.** *Calcolare*

$$I = \int_{-3}^3 \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{1 + x^2 + x^{1000}} \arctan^2(x + x^{2005}) dx.$$

**Risposta** $I = 0$.

**Problema 4.1.0.14.** *Calcolare*

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1+\mathrm{e}^{\sin x}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\ dx.$$

**Risposta** $I = 2/3$.

**Problema 4.1.0.15.** *Dimostrare che per ogni funzione $f$ continua abbiamo*

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

**Problema 4.1.0.16.** *Calcolare*

$$I = \int_0^\pi x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx.$$

**Risposta** $I = \pi^2/4$.

**Problema 4.1.0.17.** *Se $f \in C[0,1]$ e' crescente, allora per ogni numero $\alpha \in (0,1)$ abbiamo*

$$\int_0^1 f(t)dt \geq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)dt.$$

## 4.2 Funzioni integrabili in senso improprio.

Sia $f\ : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $f$ è *integrabile in senso improprio* su $(a,b]$ se

1. $f$ è *integrabile secondo Riemann* in ogni intervallo $(c,b]$ con $a < c < b$,
2. esiste finito il limite $\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\, dx$,

in tal caso poniamo

$$\lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Analogamente
Sia $f\ : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $f$ è *integrabile in senso improprio* su $[a, +\infty)$ se

1. $f$ è *integrabile secondo Riemann* in ogni intervallo $[a, c]$ con $a < c$,

2. esiste finito il limite $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx$,

in tal caso poniamo

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx \ = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

### 4.2.1 Esercizi su integrali impropri

**Problema 4.2.1.1.** *Calcolare*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx, \quad a > 0.$$

*Soluzione.* Sia $0 < a < c$.

$$\int_a^c \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \log x & \alpha = 1. \end{cases}$$

Quindi se $\alpha \neq 1$

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left[ x^{1-\alpha} \right]_a^c = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} a^{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

Se invece $\alpha = 1$

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c \frac{1}{x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left[ \log x \right]_a^c = +\infty.$$

In definitiva la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

è *integrabile in senso improprio* su $[a, +\infty)$ se $\alpha > 1$. $\square$

**Problema 4.2.1.2.** *Vedere se l'integrale*

$$\int_0^1 \left(\cos(x+\pi)+1-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{x^5}$$

*esiste.*

*Soluzione.* Usiamo lo sviluppo di Taylor

$$\cos(x+\pi)+1-\frac{x^2}{2}=\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

e troviamo che l'integrale NON esiste. □

**Problema 4.2.1.3** (Gestionale 2018)**.** *Studiare la convergenza del integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{e^x sin(\sqrt{x})}{x^\alpha}dx$$

*al variare del parametro $\alpha$.*

*Soluzione.* L'integrale ha singlaritá solo per $x$ vicino a 0. Abbiamo lo sviluppo asintotico

$$\frac{e^x sin(\sqrt{x})}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-1/2}}\left(1+o(1)\right)$$

per $x\to 0$. Cosi applicando il principio di confronto troviamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1/2}}dx$$

converge se e solo se $\alpha-1/2<1$, che significa $\alpha<3/2$.

□

**Problema 4.2.1.4.** *(Gestionale 15 Dic. 2018) Vedere se l'integrale*

$$\int_0^1 \left(e^{1+2\sin x}-e-2ex\right)\frac{dx}{x^{5/2}}$$

*esiste.*

*Soluzione.* Usiamo lo sviluppo di Taylor

$$e^{1+2\sin x} - e - 2ex = 2ex^2 + o(x^2)$$

e troviamo che l'integrale esiste. $\square$

**Problema 4.2.1.5.** *(Gestionale, Dic. 15 2018) Vedere se l'integrale*

$$\int_0^1 \left( \sin(x+\pi) + x - \frac{x^3}{6} \right) \frac{dx}{x^6}$$

*esiste.*

*Soluzione.* Usiamo lo sviluppo di Taylor

$$\sin(x+\pi) = -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$$

e troviamo che l'integrale NON esiste. $\square$

**Problema 4.2.1.6.** *Studiare la convergenza del integrale improprio*

$$\int_0^{\pi/10} \frac{\ln x}{\sin(x \ln^2 x)} dx.$$

*Soluzione.* Usiamo lo svilupo di Taylor

$$\sin(x \ln^2 x) = x \ln^2 x + o(x \ln^2 x)$$

e applicand il principio di confronto troviamo che l'integrale da studiare e

$$\int_0^{\pi/10} \frac{\ln x}{x \ln^2 x} dx = \int_0^{\pi/10} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

L'ultimo integrale diverge a $-\infty$. Infatti, per $\delta > 0$ piccolo utiliziamo la sostituzione $y = \ln x$ e troviamo

$$\int_0^{\delta} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{-\infty}^{\ln \delta} \frac{dy}{y}$$

e la sostituzione $t = -y$ ci da

$$\int_{-\infty}^{\ln \delta} \frac{dy}{y} = \int_{\infty}^{-\ln \delta} \frac{dt}{t} = -\int_{-\ln \delta}^{\infty} \frac{dt}{t}$$

e ovviamente l'ultimo integrale improprio tende a $-\infty$. $\square$

**Problema 4.2.1.7.** *(Gestionale Gennaio 2019) Sia*

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{\pi/2} \frac{1+(\beta-1)x+\alpha\tan^2 x}{\beta+\tan x+\tan^2(x)}dx$$

**a)** *Calcolare l'integrale $I_{\alpha,\beta}$ (se esiste) per $\alpha=1, \beta=1$;*

**b)** *Calcolare l'integrale $I_{\alpha,\beta}$ (se esiste) per $\alpha=0, \beta=1$;*

**c)** *Studiare l'esistenza di $I_{\alpha,\beta}$ al variare dei parametri $\alpha\in\mathbb{R}, \beta\geq 0$.*

*Soluzione a).* Usiamo la sostituzione

$$\tan x = t$$

e troviamo

$$I_{\alpha,1} = \int_0^{\infty} \frac{1+\alpha t^2}{(1+t+t^2)(1+t^2)}dt. \tag{4.2.1.9}$$

Per $\alpha=1$ troviamo

$$I_{1,1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)}dt. \tag{4.2.1.10}$$

Abbiamo la relazione

$$\int \frac{1}{(1+t+t^2)}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

e quindi

$$I_{1,1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)}dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{4.2.1.11}$$

$\square$

*Soluzione b).* Usiamo (8.3.0.18) e con $\alpha=0$ troviamo

$$I_{0,1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t+t^2)(1+t^2)}dt. \tag{4.2.1.12}$$

Usiamo il metodo di Hermite

$$\frac{1}{(1+t+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t+t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

e troviamo $A = B = -C = 1, D = 0$

$$\int \frac{1}{(1+t+t^2)(1+t^2)}dt = \int \frac{t+1}{(1+t+t^2)}dt - \int \frac{t}{(1+t^2)}dt =$$

$$= \int \frac{t+1/2}{(1+t+t^2)}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+t+t^2)}dt - \int \frac{t}{(1+t^2)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t+t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C.$$

e quindi

$$I_{0,1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{4.2.1.13}$$

□

*Soluzione c).* Usiamo la sostituzione

$$\tan x = t$$

e troviamo

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^\infty \frac{1+(\beta-1)\arctan t + \alpha t^2}{(\beta+t+t^2)(1+t^2)}dt. \tag{4.2.1.14}$$

Per $\beta > 0$ si vede che l'integrale converge. Per $\beta = 0$ abbiamo

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^\infty \frac{1-\arctan t + \alpha t^2}{(t+t^2)(1+t^2)}dt. \tag{4.2.1.15}$$

L'integrale diverge vicino a $t = 0$. □

**Problema 4.2.1.8.** *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{k=1}^\infty c_k, \quad c_k = \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin y}{(y+1)}dy.$$

*Soluzione.* La successione $c_k$ soddisfa le proprietá

$$c_1 > -c_2 > c_3 > -c_4 > \cdots > c_{2N-1} > -c_{2N} > 0$$

e $c_k \to 0$. Quindi, la serie converge

$\square$

**Problema 4.2.1.9.** *Calcolare*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}.$$

**Problema 4.2.1.10.** *Calcolare*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx, \quad a > 0.$$

Procedendo in modo analogo a quello visto in precedenza si ottiene che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

è integrabile in senso improprio su $(a, b]$ se $\alpha < 1$.

**Problema 4.2.1.11.** *Sia* $f \in C^0\big([a, +\infty)\big)$. *Supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0$$

*dimostrare che*

$$\int_a^{+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0 \\ -\infty & L < 0 \end{cases}$$

Una funzione $f$ si dice *assolutamente integrabile in senso improprio* se è *integrabile in senso improprio* la funzione $|f|$.

Si dimostra che

se $f$ *assolutamente integrabile in senso improprio* allora è *integrabile in senso improprio.*

Questa proposizione ci permette di risolvere il seguente problema.

**Problema 4.2.1.12.** *Dimostrare che esiste finito il seguente integrale improprio.*

$$\int_a^{+\infty} \sin x^2\, dx$$

Non è restrittivo considerare $a > 0$. Sia $a < b$. Dopo aver effettuato il cambiamento di variabile $x^2 = t$ si ha

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^2 x\, dx &= \int_{a^2} b^2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \quad \text{(integrazione per parti)}\\ &= \Big[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Big]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\, dt = -\frac{\cos b^2}{b} + \frac{\cos a^2}{a} - \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\, dt\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\cos b^2}{b} = 0$$

mentre

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\, dt < +\infty$$

perchè

$$\left|\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\right| < \frac{1}{\sqrt{t^3}}, \quad t > 0.$$

Poichè la funzione $t \to \frac{1}{\sqrt{t^3}}$ è integrabile in senso improprio su $(a, +\infty)$ anche $x \to \left|\frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}\right|$ risulta integrabile in s.i. in tale intervallo e quindi la funzione $x \to \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}}$ è ivi assolutamente integrabile in s.i. e dunque integrabile in s.improprio. Abbiamo anche utilizzato il *criterio del confronto per integrali impropri* nelle considerazioni precedenti.

**Problema 4.2.1.13.** *Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrabilita sulla semiretta $[0, +\infty)$ della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^\alpha$$

**Risposta:** la funzione risulta integrabile in s.i. per $\alpha > 1$.

**Problema 4.2.1.14.** *Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrabilita sulla semiretta $[0, +\infty)$ della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}\right)^{\alpha}$$

**Risposta:** la funzione risulta integrabile in s.i. per $\alpha > \frac{1}{3}$.

**Problema 4.2.1.15.** *Dato l'integrale improprio*

$$I(n) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n \, dx$$

1. *dimostrare che esiste finito per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
2. *dimostrare che $I(n) = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

**Problema 4.2.1.16.** *(Gestionale, 2018, Dic. 15) Studiare la convergenza del integrale*

$$\int_3^{\infty} \ln^{\alpha}(x-2) \sin(1+x^2) dx$$

*al variare del parametro $\alpha \in [0, 1]$.*

*Soluzione.* Per $x$ vicino a 2 abbiamo

$$\ln(x-1) = \ln(1 + (x-2)) = (x-2) + o(x-2)$$

e quindi

$$\ln^{\alpha}(x-1) = (x-2)^{\alpha}(1 + o(1)).$$

Per $\alpha \in [0, 1]$ l'inntegrale converge vicino a $x = 2$. Cosi rimane a studiare

$$\int_3^{\infty} \ln^{\alpha}(x-1) \sin(1+x^2) dx$$

Usiamo la relazione

$$\sin(1+x^2) = -\frac{(\cos(1+x^2))'}{2x}$$

e dopo una integrazione per parti troviamo

$$\int_3^R \ln^\alpha(x-1)\sin(1+x^2)dx = -\ln^\alpha(x-1)\frac{\cos(1+x^2)}{2x}\Big|_3^R +$$

$$+\int_3^R \left(\frac{\ln^\alpha(x-1)}{2x}\right)'\cos(1+x^2)dx.$$

PPer $x$ grande abbiamo

$$\left|\left(\frac{\ln^\alpha(x-1)}{2x}\right)'\right| \le \frac{C\ln^{\alpha-1}(x-1)}{x^2} \le \frac{C}{x^{3/2}}.$$

Cosi l'integrale converge. □

**Problema 4.2.1.17.** *(Gestionale, 2018, Dic. 15) Studiare la convergenza del integrale*

$$\int_2^\infty \ln^\alpha(x-1)\sin(1+x^2)dx$$

*al variare del parametro* $\alpha \in [-2,-1]$.

*Soluzione.* Per $x$ vicino a 2 abbiamo

$$\ln(x-1) = \ln(1+(x-2)) = (x-2) + o(x-2)$$

e quindi

$$\ln^\alpha(x-1) = (x-2)^\alpha(1+o(1)).$$

Per $\alpha \in [-2,-1]$ l'integrale diverge vicino a $x=2$.

Per $x$ vicino a $+\infty$ usiamo

$$\sin(1+x^2) = -\frac{\cos(x^2+1)}{2x}$$

e dopo integrazione per parti troviamo la convergenza vicino a $+\infty$. □

**Problema 4.2.1.18.** *Studiare al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'integrabilita sulla semiretta* $(0,+\infty)$ *della funzione*

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{(1+2\arctan x)^x - (1+\arctan 2x)^x}$$

*Soluzione.* Si verifica prima di tutto che il denominatore di $f$ non ammette zeri sulla semiretta $(0, +\infty)$. Abbiamo due integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{(1+2\arctan x)^x - (1+\arctan 2x)^x} dx$$

e

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+2\arctan x)^x - (1+\arctan 2x)^x} dx.$$

Per $x$ vicino a 0 abbiamo

$$(1+2\arctan x)^x = e^{x\ln(1+2\arctan x)}$$

e usando

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \ \arctan(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

troviamo

$$\ln(1+2\arctan x) = 2\arctan x - \frac{4\arctan^2 x}{2} + \frac{8\arctan^3 x}{3} + o(x^3) =$$

$$= 2x - \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3).$$

e

$$\ln(1+\arctan(2x)) = \arctan(2x) - \frac{\arctan^2(2x)}{2} + \frac{\arctan^3(2x)}{3} + o(x^3) =$$

$$= 2x - \frac{8x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3).$$

Cosi troviamo

$$x\ln(1+2\arctan x) - x\ln(1+\arctan(2x)) = \frac{6x^4}{3} + o(x^4).$$

In questo caso troviamo

$$(1+2\arctan x)^x - (1+\arctan 2x)^x =$$

$$= (1+\arctan 2x)^x[e^{x\ln(1+2\arctan x)-x\ln(1+\arctan(2x))}-1] = (1+o(1))(\frac{6x^3}{3}+o(x^3))$$

e usando il principio di confronto si vede che l'integrale $\int_0^\infty$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{x^4}$$

e quindi $\alpha > 3$.

Per

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+2\arctan x)^x - (1+\arctan 2x)^x}dx$$

usiamo

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} + 1/x + o(1/x), \; x \to \infty.$$

Cosi troviamo

$$(1+2\arctan x)^x - (1+\arctan(2x))^x =$$

$$= (2\pi/2 + 2/x + o(1/x))^x - (\pi/2 + 1/(2x) + o(1/x))^x \geq c\pi^x(1+o(1))$$

per qualche costante $c > 0$. L'integrale

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha dx}{\pi^x}$$

converge sempre. Intersecando i valori di $\alpha$ per i quali $f$ è integrabile in s. i. nei due intervalli la funzione risulta integrabile in s.i. su $(0, +\infty)$ per $\alpha > 3$. □

**Problema 4.2.1.19.** *Studiare la convergenza del integrale improprio*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{a+x^2}\; e^{x-a\sqrt{x^2+1}}dx$$

*al variare del parametro* $a \geq 0$.

*Idea della solzuione.* Usiamo la relazione

$$x - a\sqrt{x^2+1} = \begin{cases} x(1-a) + o(x), & \text{se } x \text{ é grande e } a \neq 1; \\ 1/(2x) + o(1/x), & \text{se } x \text{ é grande e } a = 1. \end{cases}$$

Abbiamo 4 casi diversi.

Caso a) $a > 1$. In questo caso

$$e^{x-a\sqrt{x^2+1}} < 2e^{x(1-a)}$$

per $x$ grande e quindi la disequazione

$$\frac{\sin^2 x}{a+x^2}\ e^{x-a\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2}{a}e^{x(1-a)}$$

e applicando principio di confronto concludiamo che integrale converge.

Caso b) $a \in (0,1)$. In questo caso

$$e^{x-a\sqrt{x^2+1}} > e^{x(1-a)}/2$$

per $x$ grande. Usiamo la relazione

$$\sin^2 x > \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A,$$

dove

$$A = \cup_k (I_k \cup J_k)$$

dove

$$I_k = (\pi/4 + 2k\pi, 3\pi/4 + 2k\pi),\ J_k = (5\pi/4 + 2k\pi, 7\pi/4 + 2k\pi)$$

Scegliendo $R = (2N+1)\pi$ usiamo la inclusione

$$\cup_{k=1}^N I_k \cup J_k \subset (0,R)$$

troviamo

$$\int_0^R f(x)dx \geq \sum_{k=0}^N \left( \int_{I_k} f(x)dx + \int_{J_k} f(x)dx \right),$$

dove

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{a+x^2}\ e^{x-a\sqrt{x^2+1}}.$$

Le disequazioni

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{a+x^2}\ e^{x-a\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{1}{4a}e^{x(1-a)}$$

per $x \in A$ e $x$ grande. E quindi

$$\int_{I_k} f(x)dx = \int_{\pi/4+2k\pi}^{3\pi/4+2k\pi} f(x)dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{4a} e^{2k\pi(1-a)} \int_{\pi/4+2k\pi}^{3\pi/4+2k\pi} 1dx = \frac{\pi}{8a} e^{2k\pi(1-a)}$$

per $k$ grande. Inoltre abbiamo anche

$$\int_{J_k} f(x)dx \geq \frac{1}{4a} e^{2k\pi(1-a)} \int_{J_k} 1dx = \frac{\pi}{8a} e^{2k\pi(1-a)}$$

La serie

$$\sum_{k \geq k_0} e^{2k\pi(1-a)}$$

diverge per ogni $k_0 \geq 1$ e per $a \in (0,1)$ e quindi

$$\int_0^R f(x)dx \geq C \sum_{k \geq k_0} e^{2k\pi(1-a)}$$

mostra che l'integrale diverge.

Caso $a = 0$ si studia in modo come fatto nel caso b). La serie diverge.

Caso $a = 1$ In questo caso per $x$ grande abiamo

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + x^2}$$

e confrontando con

$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

da convergenza assoluta del integrale improprio.

□

**Problema 4.2.1.20.** *Calcolare il valore del seguente limite*

$$\lim_{x \to 0+} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{1 - \cos t}{\sqrt{t^5}} \, dt$$

**Risposta.** Il valore del limite è 0.

**Problema 4.2.1.21.** *Calcolare il valore del seguente limite*

$$\lim_{x\to 0+} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{1-\cos t}{t^3}\, dt$$

**Risposta.** Il valore del limite è $\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$.

**Problema 4.2.1.22.** *Studiare la funzione:*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x - \int_0^x e^{t^2}\, dt, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

**Problema 4.2.1.23.** *Dire se la successione*

$$a_N = \sqrt{N} \int_0^{2\pi N^2} \frac{\sin x/N}{(x+N)} dx, \ \ N = 1, 2, \cdots$$

*é limitata.*

*Soluzione.* Cambiamento di variabli $Nx = y$ implica

$$\int_0^{2\pi N^2} \frac{\sin Nx}{(x+N)} dx = \int_0^{2\pi N} \frac{\sin y}{(y+1)} dy.$$

Si vede che

$$b_N = \int_0^{2\pi N} \frac{\sin y}{(y+1)} dy = \sum_{k=1}^{2N} c_k, \quad c_k = \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \frac{\sin y}{(y+1)} dy.$$

La successione $c_k$ soddisfa le proprietá

$$c_1 > -c_2 > c_3 > -c_4 > \cdots > c_{2N-1} > -c_{2N} > 0$$

cosi otteniamo

$$b_N > c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \cdots + c_{2N-2} + c_{2N} > c_1 + c_2 > 0.$$

Quindi, la successione

$$a_N = \sqrt{N} b_N > \sqrt{N}(c_1 + c_2)$$

é illimitata.

□

# Chapter 5

# Equazioni ordinarie

### 5.0.1 Equazioni ordinarie a variabili separabili

**Equazioni Ordinarie** L'equazione $y'(x) = f(y)$ é una equazione ordinarie. La soluzione si trova integrando:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx.$$

Se $F(y)$ é una primitiva di $1/f(y)$ allora $1/f(y) = F'(y)$ e tutti soluzioni $y(x)$ sono soluzioni di

$$F(y) = x + C.$$

Il problema di Cauchy

$$y'(x) = f(y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.0.1.1}$$

con $f(y_0) \neq 0$ ha unica soluzione $y = y(x)$ in un intorno di $x_0$ definita dalla primitiva

$$F(y)$$

della funzione $1/f(y)$ cioe' dell'integrale indefinito

$$F(y) = \int \frac{dy}{f(y)} \quad \Longleftrightarrow F'(y) = \frac{1}{f(y)}$$

e dalla costante $C$ che soddisfa l'equazione

$$F(y_0) + C = x - x_0. \tag{5.0.1.2}$$

L'equazione

$$y'(x) = f(y)g(x),$$

e' equazione a variabili separabili.

Il problema di Cauchy

$$y'(x) = f(y)g(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.0.1.3}$$

con $f(y_0) \neq 0$ ha unica soluzione $y = y(x)$ in un intorno di $x_0$ definita dalla equazione

$$F(y) + C = G(x), \tag{5.0.1.4}$$

dove

$$F(y) = \int \frac{dy}{f(y)}, \quad G(x) = \int g(x)dx. \tag{5.0.1.5}$$

**Problema 5.0.1.1.** *Trovare tutti soluzioni di*

$$y' = y^2, \ y' = siny, \ y' = 2y + 3.$$

**Problema 5.0.1.2.** *Risolvere le equazioni*

$$xy + (x+1)^2 y' = 0, \ y'\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}.$$

Risp.

$$y = \frac{c}{x+1}\mathrm{e}^{-1/(x+1)}, y + \sqrt{1+y^2} = c(x + \sqrt{1+x^2}).$$

### 5.0.2 Equazioni ordinarie lineari

L'equazione

$$y' = a(t)y(t) + b(t), \tag{5.0.2.6}$$

dove $t \in I$ e $I$ e' un intervallo in $\mathbb{R}$ si chiama equazione lineare. Se $b(t) = 0$ l'equazione si chiama omogeneo. Tutte le soluzioni di questa equazione si possono representare come

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left( c + \int b(s)\mathrm{e}^{-A(s)} ds \right),$$

dove $A(t) = \int a(s)ds$ e' una primitiva di $a(t)$. Il problema di Cauchy

$$y' = a(t)y(t) + b(t), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5.0.2.7}$$

ha soluzione definita da

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left( C + \int b(t)\mathrm{e}^{-A(t)} dt \right), \quad A(t) = \int a(t)dt.$$

### 5.0.3 Esercizi su equazioni differenziali lineari del I ordine

**Problema 5.0.3.1.** *Trovare tutti soluzioni di*

$$1) \quad y' = 3t^2 y(t) + t^5, \quad 2) y' = y + \sin t.$$

Risp.

$$1) y(t) = c\mathrm{e}^{-t^3} - \frac{1}{3}(t^3 + 1), \quad 2) \quad y(t) = c\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t).$$

**Problema 5.0.3.2.** *(Gestionale, 2018, Dic. 15) Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$y'(x) + \frac{y(x)}{(x-1)^2} = -\frac{\sin x}{x-1}$$

$$y(0) = -1.$$

*Soluzione.* La soluzone é

$$y(x) = -1 - e^{1/(x-1)} \left( \int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy \right).$$

La funzione e ben definita per $x \in (-\infty, 1)$. Il limite per $x \to -\infty$ esiste ed e

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -1 + \int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy$$

dove l'integrale

$$\int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy$$

e oscillante e esiste. Per vedere il comportamento di $y(x)$ quando $x \to 1_-$, si studia l'integrale improprio

$$\int_0^1 e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy$$

L'integrale diverge in 1. Per vedere il limite di

$$\frac{\int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\sin y}{y-1} dy}{e^{1/(1-x)}}$$

usiamo la regola di l'Hôpital

$$\frac{e^{1/(1-x)} \sin x/(x-1)}{e^{1/(1-x)}/(1-x)^2}$$

Cosi si puo vedere che

$$\lim_{x \nearrow 1} y(x) = 0.$$

□

**Problema 5.0.3.3.** *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$y'(x) + \frac{y(x)}{(x-1)^2} = -\frac{\cos x}{x-1}$$

$$y(0) = 0.$$

*Soluzione.* La soluzone é

$$y(x) = -e^{1/(x-1)} \left( \int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy \right).$$

La funzione e ben definita per $x \in (-\infty, 1)$. Il limite per $x \to -\infty$ esiste ed e

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -1 + \int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy$$

dove l'integrale

$$\int_{-\infty}^0 e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy$$

e oscillante e esiste. Per vedere il comportamento di $y(x)$ quando $x \to 1_-$, si studia l'integrale improprio

$$\int_0^1 e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy$$

L'integrale diverge in 1. Per vedere il limite di

$$\frac{\int_0^x e^{-1/(y-1)} \frac{\cos y}{y-1} dy}{e^{1/(1-x)}}$$

usiamo la regola di l'Hôpital

$$\frac{e^{1/(1-x)} \sin x/(x-1)}{e^{1/(1-x)}/(1-x)^2}$$

Cosi si puo vedere che

$$\lim_{x \nearrow 1} y(x) = 0.$$

□

### 5.0.4 Equazioni ordinarie di secondo ordine

**Problema 5.0.4.1.** *Se $y(t)$ soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove $a$ e' costante, allora l'energia*

$$E(t) = \frac{|y'(t)|^2}{2} - a\frac{|y(t)|^2}{2}$$

*e' costante. Concludere che se $a < 0$, $y(t)$ soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$, allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

**Problema 5.0.4.2.** *Se $y(t)$ soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove $a$ e' costante, e $y(t)$ soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$, allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

**Problema 5.0.4.3.** *Se $y(t)$ soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove $a < 0$ e' costante, allora esistono due costanti $A, B$ tali che*

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{-a}\ t\right) + B\sin\left(\sqrt{-a}\ t\right)$$

*per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

## 5.1 Equazioni particolari

L'equazione di Bernoulli

$$z' = a(t)z(t) + b(t)z^k, \ \ k \neq 0, 1, \tag{5.1.0.8}$$

si puo trasformare in (5.0.2.6) con la trasformata

$$z^A = y,$$

dove il parametro $A$ si sceglie in modo opportuno. Abbiamo le relazioni

$$\underbrace{Az^{A-1}z'}_{y'} = Az^{A-1}\left(az + bz^k\right) = Aay + Abz^{A-1+k},$$

quindi con $A = 1 - k$ deduciamo

$$y' = Aay + Ab.$$

L'equazione di Riccati

$$z' = a(t)z^2(t) + b(t)z + c(t), \tag{5.1.0.9}$$

non si puo risolvere esplicitamente in generale. Se conosciamo una soluzione $z_0(t)$ usando la sostituzione

$$z(t) = u(t) - z_0(t)$$

possiamo ottenere una equazione (rispetto $u(t)$) tale che questa equazione e' una equazione di Bernoulli.

**Problema 5.1.0.1.** *Trovare tutti soluzioni di*

$$2ty' + y = y^3 t^3 \mathrm{e}^{2t}$$

Risp.

$$y^2(t) = ct - \mathrm{e}^{2t}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4}\right).$$

**Problema 5.1.0.2.** *Trovare tutti soluzioni della equazione di Riccati*

$$3t^2 y' + y^2 t^2 + 2 = 0,$$

Soggerimento. Una soluzione particolare e' del tipo $y(t) = a/t$, dove $a = 1, 2$ Dopo la sostituzione $y = x + 1/t$ otteniamo l'equazione di Bernoulli

$$3tx' + x^2 t + 2x = 0$$

Le soluzioni sono $x = 0$ o $x = (t + ct^{2/3})^{-1}$.

## 5.2 Un'altro tipo di equazioni omogenee

Sia

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Allora si sostituisce $v = y/t$ da cui

$$v'(t) = \frac{f(v) - v}{t}$$

e dunque

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log|t| + C.$$

Risostituendo e risolvendo rispetto a $y$ si ottiene la soluzione cercata.

## 5.3 Equazioni ordinarie di secondo ordine

**Problema 5.3.0.1.** *Se $y(t)$ soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove $a$ e' costante, allora l'energia*

$$E(t) = \frac{|y'(t)|^2}{2} - a\frac{|y(t)|^2}{2}$$

*e' costante. Concludere che se $a < 0$, $y(t)$ soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$, allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

**Problema 5.3.0.2.** *Se $y(t)$ soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove $a$ e' costante, e $y(t)$ soddisfa $y(0) = y'(0) = 0$, allora $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

**Problema 5.3.0.3.** *Se $y(t)$ soddisfa l'equazione*

$$y''(t) = ay(t),$$

*dove $a < 0$ e' costante, allora esistono due costanti $A, B$ tali che*

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{-a}\ t\right) + B\sin\left(\sqrt{-a}\ t\right)$$

*per ogni $t \in \mathbb{R}$.*

# Chapter 6

# Equazioni ordinarie di ordine $n \geq 1$.

Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, con $\Omega \neq \varnothing$ un insieme aperto e connesso e $n \geq 1$ intero. Si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine $n$ una relazione del tipo:

$$F\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{6.0.0.1}$$

dove con $u^{(j)}(x), j = 1, \cdots, n$ si indica la derivata $j-$esima della funzione $u(x)$.

**Definizione 6.0.0.1.** *Sia $I$ un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Si definisce soluzione o integrale dell'equazione differenziale ordinaria una funzione $u = u(x)$ tale che:*

$$u(x) \in C^n(I) \qquad F\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Un'equazione differenziale ordinaria si dice autonoma se F non dipende esplicitamente da $x$, cioé (6.0.0.1) diventa

$$F\left(u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{6.0.0.2}$$

.

L'equazione differenziale ordinaria (6.0.0.1) si dice scritta in forma normale se puó essere esplicitata rispetto $u^{(n)}(x)$ :

$$u^{(n)}(x) = G\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right). \tag{6.0.0.3}$$

Si dice inoltre che L'equazione differenziale ordinaria (6.0.0.1) é lineare se $F$ é combinazione lineare di $u, u', \ldots, u^{(n)}$ , ovvero:

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = s(x) + b_0(x)u + b_1(x)u' + \ldots + b_n(x)u^{(n)}$$

o, l'equazione (6.0.0.1) si puo rescrivere come segue

$$u^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)u^{(i)} + f(x)$$

dove:

$$f(x), a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x) \in C^0(I)$$

Il termine $f(x)$ é detto sorgente o forzante, e se e' nullo l'equazione differenziale lineare si dice omogenea.

## 6.1 Risoluzione globale di un problema di Cauchy

Consideriamo due tipi di equazioni ordinarie:

$$y'(t) = f(t, y), \tag{6.1.0.4}$$

dove $f$ sia continua in $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$, oppure un sistema $(2 \times 2)$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1, y_2), \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1, y_2). \end{aligned} \tag{6.1.0.5}$$

Vediamo ora le condizioni sufficienti per la risoluzione globale di (6.1.0.4) in un intervallo $(\alpha, \beta)$ assegnato a priori.

**Theorem 6.1.0.1.** *(di esistenza ed unicita' globale della soluzione di un Problema di Cauchy):*

*Sia*

$$f : [(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}] \to \mathbb{R}$$

*tale che*

1. *$f$ sia continua in $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$;*

2. *$f$ sia localmente lipschitziana rispetto a $y$, uniformemente rispetto a $t$;*

3. $$|f(t, y)| \leq A(t) + B(t)|y|,$$

   *dove $A(t)$ e $B(t)$ siano funzioni continue in $(\alpha, \beta)$.*

*Allora*

$$\forall t \in (\alpha, \beta), \ \forall y^0 \in \mathbb{R}$$

*esiste un'unica soluzione globale del problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y^0 \end{aligned}$$

*ossia esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy definita su tutto $(\alpha, \beta)$.*

Ci sono due casi tipici.

(a) Sempre assumendo che valgano le (1) e (2) si richiede (al posto dell'ipotesi (3) ) che f sia limitata su

$$(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}.$$

$$|f(t, y)| \leq A(t)$$

ovvero la limitatezza di $f$.

(b) Si richiede la funzione $f$ sia continua nel suo insieme di definizione, ossia che valga l'ipotesi (1) e che essa sia globalmente lipschitziana.

## 6.2 Eserizi su equazioni differenziali

L'algoritmo per lo studio del problema generico

$$y^{(k)}(x) = f(x, y, y', \cdots, y^{(k-1)}), \tag{6.2.0.6}$$
$$y(0) = a_1, y'(0) = a_2, \cdots, y^{(\ell)}(0) = a_{\ell+1}$$

é seguente:

Passo A: si vede se $\ell = k$ e se $f$ é una funzione continua in $x$ e Lipshiziana rispetto l'altri parametri. Se la risposta e si, allora abbiamo il problema di Cauchy e concludiamo che esiste unica soluzione LOCALE in $x$.

Passo B: se il passo A non ci da nienete e $\ell \geq k$ si fa un TEST sostituendo $x$ con 0 nella equazione differenziale. Se questa sostituzione ci prota a contradizione concludiamo che NON ci sono soluzioni di (6.2.0.6)

Passo C: se i passi precedenti non ci permettono di fare conclusione allora cerchiamo soluzione esplicita e raggioniamo caso per caso (non abbiamo un metodo semplice in questo caso)

**Problema 6.2.0.1.** *Quante soluzioni deviniti in tutto $\mathbb{R}$ ha il problema*

$$y'(x) = 1 + y^2, \quad y(0) = 0. \tag{6.2.0.7}$$

*Soluzione.* Seguendo l'algoritmo dei passi A),B) e C) sora si vede che il passo A) ci da soluzione LOCALE.

Visto che la domanda chiede soluzioni globali (defintiti in tutto $\mathbb{R}$) passiamo direttamente al passo C) e risolvendo l'equazione a variabili separati troviamo

$$y(x) = \arctan(x + C)$$

La costante $C$ si trova dai nostri dati iniziali $y(0) = 0$. Cosi troviamo $C = 0$ e quindi abbiamo 1 soluzione definitia in tutto $\mathbb{R}$

$$y(x) = \arctan(x)$$

□

**Problema 6.2.0.2.** *Quante soluzioni deviniti in tutto $\mathbb{R}$ ha il problema*

$$y'(x) = -y + 2, \quad y(0) = 1. \tag{6.2.0.8}$$

*Soluzione.* Seguendo l'algoritmo dei passi A),B) e C) sora si vede che il passo A) ci da soluzione LOCALE.

Visto che la domanda chiede soluzioni globali (defintiti in tutto $\mathbb{R}$) passiamo direttamente al passo C) e risolvendo l'equazione. L'equazione omogenea

$$z'(x) = -z(x)$$

ha soluzione $z = Ce^{-x}$ La soluzione particlare e $y_0(x) = 2$ e quindi la soluzone genrica é

$$y(x) = Ce^{-x} + 2$$

da qui usando $y(0) = 1$ troviamo $C = -1$ L'equazione ha 1 soluzione globale

$$y(x) = -e^{-x} + 2.$$

□

## 6.3 Esercizi sul prolungamento della soluzioni

**Stime a rpiori ed esistenza globale**

**Problema 6.3.0.1.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t + 2 + e^{-2u}, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 & , \end{cases} \tag{6.3.0.9}$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 6.3.0.2.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t - e^{-u^2}, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 & , \end{cases} \tag{6.3.0.10}$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 6.3.0.3.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = 3t^2 + \sqrt{1 + u^2} \sin u, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 0 & , \end{cases} \tag{6.3.0.11}$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 6.3.0.4.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(t) = -u - u^3, & t \in (0, \infty); \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 & , \end{cases} \tag{6.3.0.12}$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 6.3.0.5.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + e^{t-y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 1 & , \end{cases} \tag{6.3.0.13}$$

*a) ha una soluzione (globale);*

*b) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "esponenziale"*

$$y(t) \leq Ce^t;$$

*c) (parte pi'u difficile) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "polinomiale"*

$$y(t) \leq C(1+t)^N.$$

**Problema 6.3.0.6.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = e^{1/(1+t)-1/y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 1 & , \end{cases} \tag{6.3.0.14}$$

*a) ha una soluzione (globale);*

*b) se la soluzione globale esiste allora soddisfa la stima "esponenziale"*

$$|y(t)| \leq C(1+t).$$

**Problema 6.3.0.7.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = ye^{1/(1+t)-1/y}, & t \in (0, \infty); \\ y(0) = 2 & , \end{cases} \tag{6.3.0.15}$$

*ha una soluzione (globale).*

**Problema 6.3.0.8.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t^3 + y^3, \\ y(0) = 0 & , \end{cases} \tag{6.3.0.16}$$

*ha una soluzione (globale) in* $t \in (-\infty, 0]$.

**Problema 6.3.0.9** (Difficoltá: *). *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2+t^4} - y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \tag{6.3.0.17}$$

*ha una soluzione (globale) in* $t \in [0, +\infty)$.

**Suggerimento.** Applicare il principio di confronto (Lemma **??**) e dimostrare che

$$y(t) > 0.$$

□

**Problema 6.3.0.10** (Difficoltá: *). *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)^4} - e^{t^4}, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \tag{6.3.0.18}$$

*ha una soluzione (globale) in* $t \in [0, +\infty)$.

**Suggerimento.** Applicare il principio di confronto (Lemma **??**) usando il fatto che $y_\pm(t) = \pm t$ sono soluzioni di

$$y'_+(t) > e^{y_+(t)^4} - e^{t^4}.$$

$$y'_-(t) < e^{y_-(t)^4} - e^{t^4}.$$

□

**Problema 6.3.0.11** (Difficoltá: *). *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - (t + y(t))^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \tag{6.3.0.19}$$

*ha una soluzione (globale) in* $t \in [0, +\infty)$.

### Esplosione della soluzione

**Problema 6.3.0.12.** *(La buccia di banana) Studiare il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{gathered} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{gathered}$$

*Risp.* Il problema di Cauchy ha un'unica soluzione massimale (e non globale) data da

$$y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

$\square$

**Problema 6.3.0.13.** *Sia $a > 0$. Studiare il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{gathered} y'(t) = (1+t)^a y^2 \\ y(0) = A > 0 \end{gathered} .$$

*Risp.* Integrando l'equazione a variabili separati, troviamo

$$-\frac{1}{y(t)^2} + \frac{1}{y(0)} = \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}$$

e quindi

$$\frac{1}{y(t)^2} = 1 - \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+1}.$$

Ovviamente la funzione

$$\varphi(t) = 1 - \frac{(1+t)^{a+1} - 1}{a+t}$$

é decrescente e ha unico zero $t^*$ tale che

$$\varphi(t^*) = 0 \Longrightarrow \lim_{t \nearrow t^*} y(t) = \infty.$$

La soluzione

$$y(t) = \frac{1}{\varphi(t)}$$

esiste in $[0, t^*)$ e

$$\lim_{t \nearrow t^*} y(t) = \infty.$$

significa che $[0, t^*)$ é l'intervallo massimale di esistenza, la soluzione "esplode" in $t^*$. $\square$

**Problema 6.3.0.14.** *Studiare l'esistenza della soluzione*

$$u(t) \in C^2([0,\infty))$$

*della equazione*

$$u''(t) - u^5(t) = (1+t)^{-3} u'(t)^3 \qquad (6.3.0.20)$$

*con dati inziali*

$$u(0) = 0, u'(0) = a \qquad (6.3.0.21)$$

*al variare del parametro* $a > 0$.

*Soluzione.* Suppogniamo per assurdo che esiste una soluzione

$$u(t) \in C^2([0,\infty))$$

della equazione (8.3.0.20) con dati iniziali (8.3.0.21). Abbiamo l'identitá

$$E'(t) = (1+t)^{-3} u'(t)^4,$$

dove

$$E(t) = \frac{|u'(t)|^2}{2} - \frac{|u(t)|^6}{6}.$$

Usando i dati iniziali

$$E(0) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

si trova

$$E(t) \geq E(0) > 0.$$

Le disequazioni

$$|u'(t)|^2 - \frac{|u(t)|^6}{3} > 0$$

e

$$u'(0) > \frac{u(0)^3}{\sqrt{3}} = 0$$

implicano

$$u'(t) > \frac{u(t)^3}{\sqrt{3}}, \forall t > 0, \qquad (6.3.0.22)$$

e quindi

$$u(t) > 0, \forall t > 0.$$

La disequazione (6.3.0.23) ed il principio del confronto implicano

$$u(t) \geq v(t),$$

dove $v(t)$ é la soluzione di

$$v'(t) = \frac{v(t)^3}{\sqrt{3}}, \forall t \geq \delta, \tag{6.3.0.23}$$

con dati iniziali

$$v(\delta) = u(\delta) > 0.$$

Usando la relazione

$$\left(\frac{1}{v^2(t)}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ed integraziondo in $(\delta, t)$ troviamo

$$\frac{1}{v^2(t)} - \frac{1}{v^2(\delta)} < -\frac{t-\delta}{\sqrt{3}}$$

e prendendo il limite, $t \to \infty$, otteniamo contradizione. □

**Problema 6.3.0.15.** *Sia $a < 0$. Studiare l'esistenza della soluzione globale del problema di Cauchy:*

$$\begin{gathered} y'(t) = (1+t)^a y^2 \\ y(0) = A > 0 \end{gathered}$$

*al variare del parametro $a < 0$.*

**Problema 6.3.0.16.** *Sia $a < 0, b > 1$. Studiare l'esistenza della soluzione globale del problema di Cauchy:*

$$\begin{gathered} y'(t) = (1+t)^a y^b \\ y(0) = A > 0 \end{gathered}$$

*al variare dei parametri $a < 0, b, A$.*

**Problema 6.3.0.17.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = (t+y)^3, \\ y(0) = 0 \end{array} \right. , \tag{6.3.0.24}$$

*ha una soluzione (globale) in* $t \in [0, \infty)$.

**Suggerimento.** Dopo la sostituzione $t + y = u$ abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u'(t) &= u^3 + 1 \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{6.3.0.25}$$

Si puo dimostrare che la traiettoria

$$(t, u(t)); t \in [0, T)$$

non puo intersecare la retta $u = 1$ perche $u_1(t) = 1$ é una soluzione del problema

$$u'(t) = u^3 - 1.$$

Quindi abbiamo la disequazione

$$u(t) < 1, t \in [0, T), \tag{6.3.0.26}$$

dove $T > 0$ é tale che

$$\forall t \in (0, T), u'(t) < 0.$$

Cosi otteniamo

$$\forall t \in (0, T), u(t) = u(0) + \int_0^t u'(\tau) d\tau < 0.$$

Otteniamo la disequazione

$$u(t) = \int_0^t (-1 + u^3(\tau)) d\tau < -t.$$

La disequzione

$$u(t) < \int_0^t (u^3(\tau)) d\tau$$

mostra che

$$u(t) < u_2(t)$$

dove

$$u_2'(t) = u^3(t), u_2(0) = 0, u_2(t) < 0$$

é una soluzione che esplode cioé

$$\lim_{t \nearrow T} u_2(t) = -\infty.$$

$\square$

**Problema 6.3.0.18.** *Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = t - y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}, \tag{6.3.0.27}$$

*ha una soluzione (globale) in* $t \in [0, +\infty)$.

## 6.4 Esercizi sui sistema di biomatematica.

Le equazioni di Lotka - Volterra si possano scrivere come segue:

$$\frac{dx}{dt} = (A - By)x, \tag{6.4.0.28}$$
$$\frac{dy}{dt} = (Cx - D)y$$

dove

$$\begin{cases} \text{y,} & \text{é la popolazione della specie predatore;} \\ \text{x,} & \text{é la popolazione della specie preda;} \\ \text{t,} & \text{é il tempo;} \\ \text{A, B, C, D ,} & \text{sono i parametri positivi di interazione tra le specie.} \end{cases}$$

**Problema 6.4.0.1.** *Sia* $A = B = C = D = 1$ *nel sistema di Lotka - Volterra. Se* $I \subseteq \mathbb{R}$ *é un intervallo aperto con* $0 \in I$ *e*

$$(x(t), y(t)) \in C^1(I; \mathbb{R}^2)$$

*é una soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(0) = 1/2, y(0) &= 1/2 \end{aligned} \tag{6.4.0.29}$$

*allora la traiettoria rimane sempre nel primo quadrante.*

*Suggerimento.* Vedere che ogni traiettoria

$$(x(t), y(t))$$

che é soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(0) = x_0, y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{6.4.0.30}$$

con punto di partenza

$$(x_0, y_0) \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x, 0 < y\}$$

rimane sempre in $U$. Infatti, se $t_1$ é tale che

$$(x(t_1), y(t_1))$$

é sulla frontiera, possiamo supporre per esempio

$$x(t_1) = 0, 0 < y(t_1) = y^*.$$

Adesso possiamo usare il fatto che

$$\widetilde{x}(t) = 0, \widetilde{y}(t) = Ce^{-t}$$

é una soluzione del

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(t_1) = 0, y(t_1) &= y^*. \end{aligned} \tag{6.4.0.31}$$

Le due soluzioni

$$(x(t), y(t)), \quad (\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$$

sono due soluzioni del problema di Cauchy (6.4.0.31), ovviamente questo é assurdo perche il Teorema di Cauchy afferma che la soluzione é unica. La contradizione dimostra che la curva $(x(t), y(t))$ rimane semptre nel I quadrante. $\square$

**Problema 6.4.0.2.** *(modello Rosenzweig - Macarthur) Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1-u_1) - \frac{u_1u_2}{1+u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2\frac{u_1u_2}{1+u_1}. \end{aligned} \tag{6.4.0.32}$$

*con dati inziali*

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

*rimane sempre nel I quadrante.*

**Problema 6.4.0.3.** *(modello Rosenzweig - Macarthur) Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1-u_1) - \frac{u_1u_2}{1+u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 + \frac{u_1u_2}{1+u_1}. \end{aligned} \tag{6.4.0.33}$$

*con dati inziali*

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

*rimane sempre nel I quadrante ed esiste costant $C > 0$ tale che*

$$u_1(t) + u_2(t) \leq C.$$

*Suggerimento.* Suppogniamo che per ogni $C > 0$ la traiettoria interseca il segmento aperto

$$u_1 + u_2 = C, 0 < u_1 < C,$$

cioé esiste (il primo) $t_1$ tale che

$$u_1(t_1) + u_2(t_1) = C, u_1'(t_1) > 0, u_2'(t_1) > 0. \tag{6.4.0.34}$$

Prendendo la somma delle equazioni in (6.4.0.35), si orriene

$$u_1'(t_1)+u_2'(t_1) = u_1(t_1)(1-u_1(t_1))-u_2(t_1) = u_1(t_1)(1-u_1(t_1))-C+u_1(t_1).$$

Ponendo

$$G(u) = u(2-u)$$

si vede che la funzione é limitata superiormente

$$G(u) \leq G(1) = 1.$$

Se $C > 1$ otteniamo

$$u_1'(t_1) + u_2'(t_1) < 1 - C < 0$$

e questo é in contradizione con (6.4.0.34).

□

**Problema 6.4.0.4.** *(modello Rosenzweig - Macarthur) Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(1-u_1) - \frac{u_1u_2}{1+u_1} \\ u_2'(t) &= -u_2 + \frac{u_1u_2}{1+u_1}. \end{aligned} \tag{6.4.0.35}$$

*con dati inziali*

$$u_1(0) = 1/10, u_2(0) = 1/10$$

*ha soluzione globale?*

**Problema 6.4.0.5.** *Sia $A = B = C = D = 1$ nel sistema di Lotka - Volterra. Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(0) &= 1/2, y(0) = 1/2 \end{aligned} \tag{6.4.0.36}$$

*ha una soluzione*

$$x(t), y(t) \in C([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$$

*globale ?*

# Chapter 7

# Equazioni lineari

## 7.1 Equazione lineare omogenea a coeficienti costanti

Si consideri l'equazione lineare omogenea

$$z^{(n)}(x) + a_1 z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n z(x) = 0 \qquad (7.1.0.1)$$

dove $a_j$ sono costanti.

Per trovare tutte le soluzioni si devono trovare le radici dell'equazione caratteristica associata:

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0. \qquad (7.1.0.2)$$

**Lemma 7.1.0.1.** *Se le radici $\lambda_j$ di* (7.1.0.2) *sono tutte distinte, allora tutte le soluzioni del problema omogeneo* (7.1.0.1) *sono della forma:*

$$z(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j \cdot x},$$

*dove $C_j$ sono costanti.*

Se il polinomio caratteristico

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n$$

ha coefficienti reali ed ha solo radici reali, allora si puo fare la decomposizione

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}, \tag{7.1.0.3}$$

dove

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$$

e

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n.$$

La fattorizzazione (7.1.0.3) permette a dire che la molteplicita di $\lambda_1$ e $m_1$ e la molteplicita di ogni radice $\lambda_j$ é $m_j$ per $j = 1, \cdots, k$.

**Lemma 7.1.0.2.** *Se l'equazione caratterisitica* (7.1.0.2) *ha radice reale*

$$\lambda_1$$

*con molteplicita' $m_1$ , allora* (7.1.0.1) *ha soluzioni*

$$e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x} \cdots \quad x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x}$$

**Lemma 7.1.0.3.** *Se le radici*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$$

*di* (7.1.0.2) *sono tali che $\lambda_j$ ha molteplicitá $m_j$ per $j = 1, \cdots, k$, allora tutte le soluzioni del problema omogeneo* (7.1.0.1) *sono della forma:*

$$z(x) = C_{1,0} e^{\lambda_1 \cdot x} + C_{1,1} \ x \ e^{\lambda_1 \cdot x} + \cdots + C_{1,m_1 - 1} \ x^{m_1 - 1} \ e^{\lambda_1 \cdot x} +$$

$$+ C_{2,0} e^{\lambda_2 \cdot x} + C_{2,1} \ x \ e^{\lambda_2 \cdot x} + \cdots + C_{2,m_2 - 1} \ x^{m_2 - 1} \ e^{\lambda_2 \cdot x} +$$

$$+ \cdots \cdots +$$

$$+ C_{k,0} e^{\lambda_k \cdot x} + C_{k,1} \ x \ e^{\lambda_k \cdot x} + \cdots + C_{k,m_k - 1} \ x^{m_k - 1} \ e^{\lambda_k \cdot x} =$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{\ell_j = 0}^{m_j - 1} C_{\ell_j, j} \quad x^{\ell_j} \quad e^{\lambda_j \cdot x},$$

*dove $C_{\ell_j, j}$ sono costanti.*

**Problema 7.1.0.1.** *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$z^{(3)} - z' + 2z = 0$$

*Soluzione.* L'equazione caratteristica é

$$\lambda^3 - \lambda + 2 = 0.$$

Abbiamo l'identita

$$\lambda^3 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

Le radici della equazione caratterisitica sono

$$1, 2$$

con milteplicita 2 e 1. Applicando Lemma 7.1.0.3 si trova che le soluzioni sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^{2t}$$

cioe

$$z(t) = C_{1,0}e^t + C_{1,1}te^t + C_2e^{2t}.$$

□

In generale il polinomio puo avere $k$ soluzioni reali

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$$

ed $s$ soluzioni complessi

$$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s.$$

Se il polinomio $P_n(\lambda)$ ha coefficienti reali e $\mu$ é una sua radice complessa, allora $\overline{\mu}$ é anche sua radice. Cosi deduciamo che $s$ é pari, $s = 2p$, $p$ naturale e possiamo ragruppare tutte le radici complessi come segue

$$\mu_1, \overline{\mu_1}, \mu_2, \overline{\mu_2}, \cdots, \mu_p, \overline{\mu_p}.$$

La fattorizzazione (7.1.0.3) puo avere una forma piu generale:

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} Q(\lambda), \tag{7.1.0.4}$$

dove

$$Q(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{q_1}(\lambda - \overline{\mu_1})^{q_1} \cdots (\lambda - \mu_p)^{q_p}(\lambda - \overline{\mu_p})^{q_p}$$

dove $\mu_1$ ha molteplicita $q_1$ etc.

**Lemma 7.1.0.4.** *Se*

$$\mu_1 = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1, \overline{\mu_1} = \alpha_1 - \mathrm{i}\beta_1$$

*hanno molteplicitá* 1 *allora due soluzioni di* (7.1.0.1) *sono*

$$e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x), e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x)$$

**Problema 7.1.0.2.** *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$z^{(3)} - z^{(2)} + z' - z = 0$$

*Soluzione.* L'equazione caratteristica é

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Abbiamo l'identita

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^1 + 1).$$

Le radici sono

$$1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$$

Le soluzioni sono combinazioni lineari di

$$e^t, \cos t, \sin t$$

cioe

$$z(t) = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

□

**Lemma 7.1.0.5.** *Se l'equazione caratterisitica* (7.1.0.2) *ha radice complessa*

$$\mu_1 = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1$$

*con molteplicita'* $q_1$ *, allora soluzioni di* (7.1.0.1) *sono le combinazioni lineari di*

$$\begin{array}{ccccc} e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) & xe^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) & x^2 e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) & \cdots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x) \\ e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x) & xe^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x) & x^2 e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x) & \cdots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin(\beta_1 x) \end{array}$$

**Lemma 7.1.0.6.** *Se l'equazione caratterisitica* (7.1.0.2) *ha* $k$ *radici reali*

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$$

*ed* $2p$ *soluzioni complessi*

$$\mu_1, \overline{\mu_1}, \cdots, \mu_p, \overline{\mu_p},$$

*allora tutti soluzioni di* (7.1.0.1) *sono*

$$z(x) = z_{\lambda_1}(x) + z_{\lambda_2}(x) + \cdots + z_{\lambda_k}(x)(x) +$$

$$+ z_{\mu_1}(x) + z_{\mu_2}(x) + \cdots + z_{\mu_p}(x),$$

*dove*

$$z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, \cdots, z_{\lambda_k}$$

*sono le soluzioni costruiti in Lemma 7.1.0.2, mentre*

$$z_{\mu_1}(x), z_{\mu_2}, \cdots, z_{\mu_p}$$

*sono le soluzioni costruiti in Lemma 7.1.0.5.*

**Problema 7.1.0.3.** *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 7y'' - 6y' + 2 = 0$$

*Suggerimento.* L'equazione caratteristica é

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0.$$

Abbiamo l'identita

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2((\lambda - 1)^2 + 1).$$

Le soluzioni sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^t \sin t, e^t \cos t.$$

□

### 7.1.1 Il metodo delle variazioni delle costanti per equazioni a coefficienti costanti di ordine $n$

Si consideri l'equazione lineare non - omogenea

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = f(t) \tag{7.1.1.5}$$

dove $a_j$ sono costanti reali.

Nella sezione 7.1 abbiamo studiato le soluzioni del problema omogeneo (7.1.0.1). partendo delle soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{7.1.1.6}$$

Possiamo trovare soluzioni del problema omogeneo.

In alcuni casi si puo trovare un metodo piu' veloce per costruire una soluzione.

**Il caso** $f(t) = P_m(t)$.

Sia:

$$f(t) = P_m(t),$$

dove $P_m(t)$ é un polinomio di grado $m$. In questo caso si cerca una soluzione particolare del tipo

$$u(t) = Q_m(t),$$

dove $Q_m(t)$ é un polinomio formale di grado $m$. Se $\lambda = 0$ é una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicitá $r$, allora si deve cercare una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r P_m(t).$$

**Il caso** $f(t) = A.e^{\alpha t}$.

Sia:

$$f(t) = A \cdot e^{\alpha t}$$

dove $A$ é una costante data. Se $\alpha$ non é una radice dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = B \cdot e^{\alpha t},$$

dove $B$ é una costante da determinare. Nel caso $\alpha$ sia radice dell'equazione caratteristica di molteplicitá $r$ si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r \cdot B \cdot e^{\alpha t}.$$

**Il caso** $f(t) = P_m(t).e^{\alpha t}$.

Sia:

$$f(t) = P_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

dove $P_m(t)$ é un polinomio di grado $m$. Se $\alpha$ non é una radice dell'equazione omogenea associata, si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = Q_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

dove $Q_m$ é un polinomio di grado $m$. Nel caso $\alpha$ sia radice di molteplicitá $r$ si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r \cdot Q_m(t) \cdot e^{\alpha t}$$

**Il caso** $f(t) = P_m(t)\cos(\beta t)e^{\alpha t} + Q_m(t)\sin(\beta t)e^{\alpha t}$

Se $f$ possiede una delle seguenti espressioni:

$$f(x) = P_m(t)\cos(\beta t)e^{\alpha t} + Q_m(t)\sin(\beta t)e^{\alpha t},$$

dove $P_m(t)$ e $Q_m(t)$ sono polinomi di grado $m$, allora se $\alpha + i\beta$ non é una radice dell'equazione caratteristica si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(t) = R_m(t)\cos(\beta t)e^{\alpha t} + S_m(t)\sin(\beta t)e^{\alpha t}$$

dove $R_m(t)$ e $S_m(t)$ sono polinomi di grado $m$ da determinare. Nel caso $\alpha + i\beta$ sia radice di molteplicitá $r$ si cerca una soluzione del tipo:

$$u(t) = t^r R_m(t)\cos(\beta t)e^{\alpha t} + t^r S_m(t)\sin(\beta t)e^{\alpha t}$$

## 7.2 Esercizi sulle equazioni lineari di ordine $n$: livello standard.

**Problema 7.2.0.1.** *Risolvere l'equazione*

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = e^{3t}. \tag{7.2.0.7}$$

**Idea della soluzione.** Prima cosideriamo l'equazione omogenea

$$y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = 0. \tag{7.2.0.8}$$

L'equzione caratteristica é

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0. \tag{7.2.0.9}$$

Abbiamo

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Tutte le soluzione del problema omogeneo (7.2.0.8) sono combinazioni lineari di

$$e^t, te^t, e^{2t}$$

Siccome 3 non é soluzione del (7.2.0.9) una soluzione del (7.2.0.11) deve avere la forma

$$y_0(t) = Ae^{3t}.$$

Sostituzione in (7.2.0.11) da

$$A = \frac{1}{4}$$

e tutte le soluzioni di (7.2.0.11) sono

$$y(t) = y_0(t) + C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t} = \frac{e^{3t}}{4} + C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t}.$$

□

**Problema 7.2.0.2.** *Risolvere l'equazione*

$$y'''(t) - 2y''(t) + 4y'(t) - 8y(t) = e^{2t}\sin(2t). \tag{7.2.0.10}$$

**Problema 7.2.0.3.** *Vedere se per ogni soluzione dell'equazione*

$$y''(t) + 9y(t) = e^{-t}\log(2 + t^4) \tag{7.2.0.11}$$

*esistono due costanti $C_1, C_2$ tali che*

$$\lim_{t\to\infty} (y(t) - C_1\cos 3t - C_2\sin 3t) = 0.$$

### 7.2.1 Problema di Sturm

**Problema 7.2.1.1.** *Considerare il problema*

$$y''(x) - \lambda y(x) = 0, x \in (0, \pi) \tag{7.2.1.12}$$

*dove* $\lambda > 0$. *Vedere che ogni soluzione*

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi]$$

*tale*

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{7.2.1.13}$$

*é identicamente zero.*

**Problema 7.2.1.2.** *Considerare il problema*

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0, \pi) \tag{7.2.1.14}$$

*Vedere per quali valori del parametro* $\lambda > 0$ *esiste soluzione*

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi]$$

*del problema* (7.2.1.14)*, tale che*

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{7.2.1.15}$$

**Problema 7.2.1.3.** *Verificare che il problema di Sturm*

$$y''(x) + y(x) = 0, x \in (0, \pi) \tag{7.2.1.16}$$

*con dati al bordo*

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{7.2.1.17}$$

*ha unica soluzione*

$$y(x) \in C^2(0, \pi) \cap C([0, \pi]$$

*definita con*

$$y(x) = \sin x.$$

### Equazione di Bessel

**Problema 7.2.1.4.** *Costruire una soluzione dell'equazione di Bessel*

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - N^2)y(x) = 0,$$

*dove* $N \geq 1$ *é numero naturale usando la sostituzione*

$$y(x) = x^N f(x),$$

*dove*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

*converge per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

*Risposta.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!(k+N)!}.$$

□

**Problema 7.2.1.5.** *Costruire una soluzione dell'equazione di Bessel*

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

*dove* $\nu \geq 0$ *é numero reale usando la sostituzione*

$$y(x) = x^\nu f(x),$$

*dove*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$$

*converge per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

*Risposta.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)},$$

dove la funzione $\Gamma(z)$ é la funzione Gamma definita come segue

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$$

Se Re$z > 0$ l'integrale converge assolutamente. Ricordiamo che usando l'integrazione per parti, si puó dimostrare che:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

□

La funzione

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \frac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}, \tag{7.2.1.18}$$

é nota come funzione di Bessel.

**Problema 7.2.1.6.** *Costruire due soluzioni dell'equazione di Bessel*

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0,$$

*dove $\nu > 0$ é numero reale. usando la sostituzione*

*Risposta.*

$$J_\nu(x), J_{-\nu}(x).$$

□

**Problema 7.2.1.7.** *Sia*

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

*l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^2$. Usando i coordinati polari*

$$x + iy = re^{i\varphi}$$

*costruire soluzione del problema*

$$\Delta u(x,y) = -u(x,y)$$

*usando la sostituzione*

$$u(x,y) = f(r)e^{ik\varphi},$$

*dove $k \geq 0$ é un numero intero.*

*Suggerimento.* L'operatore di Laplace in coordinati polari si puo rappresentare nella forma

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2.$$

Usando l'ansatz

$$u(x, y) = f(r)e^{ik\varphi},$$

troviamo

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{k^2}{r^2}f(r) = -f(r). \tag{7.2.1.19}$$

Soluzione é

$$f(r) = J_k(r),$$

dove $J_\nu$ é la funzione di Bessel del problema 7.2.1.5.

□

**Problema 7.2.1.8.** *Trovare una soluzione del problema*

$$y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + by(x) = 0$$

*usando rescalamento*

$$y(x) = \lambda^A v(\lambda x),$$

*dove $\lambda > 0$ e $A \in \mathbb{R}$ devono essre scelti in modo oportuno.*

*Suggerimento.* Prima si fa la sostituzione

$$y(x) = x^\alpha z(x), \alpha = \frac{1-a}{2}.$$

La funzione $z(x)$ soddisfa

$$z''(x) + \frac{1}{x}z'(x) + bz(x) - \frac{\nu^2}{x^2}z(x) = 0, \nu = \alpha.$$

Usare rescalamento

$$z(x) = \lambda^A v(\lambda x),$$

dove $\lambda > 0$ e $A \in \mathbb{R}$ devono essre scelti in modo oportuno. □

**Soluzioni rappresentati con serie di potenze**

**Problema 7.2.1.9.** *Sia*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

*serie di potenze con ragio di convergenza* 1. *Verificare che il problema di Cauchy*

$$y'' - W(x)y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0 \tag{7.2.1.20}$$

*ha soluzione*

$$y(x) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k x^k$$

*con ragio di convergenza* 1.

## 7.3 Esercizi sui integrali primi

**Problema 7.3.0.1.** *(Lotka Volterra) Sia* $A = B = C = D = 1$ *nel sistema di Lotka - Volterra Vedere se il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1-y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (x-1)y \\ x(0) = 1/2, y(0) &= 1/2 \end{aligned} \tag{7.3.0.21}$$

*ha un primo integrale*

*Suggerimento.* La soluzione del problema (6.4.0.1) ci dice che la soluzione rimane sempre nel $I$ quandrante. Cosi possiamo scrivere

$$\frac{(x(t))'}{x(t)} = 1 - y(t).$$

$$\frac{(y(t))'}{y(t)} = x(t) - 1.$$

Molteplicando la prima equazione per $x(t)-1$ la seconda per $y(t)-1$ e sommando, otteniamo

$$\frac{(x(t)-1)\,(x(t))'}{x(t)} + \frac{(y(t)-1)\,(y(t))'}{y(t)} = 0$$

e usando la relazione

$$\frac{(x(t)-1)\,(x(t))'}{x(t)} = (x(t))' - \frac{(x(t))'}{x(t)} = (x(t) - \log x(t))'$$

troviamo

$$I'(t) = 0, I(t) = x(t)+y(t)-\log x(t)-\log y(t) = x(t)+y(t)-\log(x(t)y(t)).$$

Il primo integrale (nel I quadrante é definito come segue

$$I(x,y) = x + y - \log(xy).$$

Le curve di livello rappresentano le traiettorie del sistema di Lotka - Volterra, si puo vedere Figura 7.1 dove le curev di livello sono tracciati.

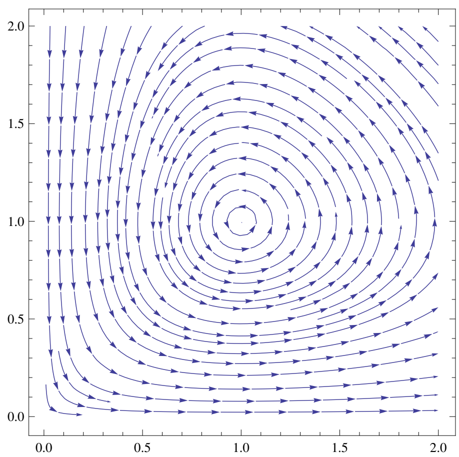


Figure 7.1: Il caso di nodo stabile

□

L'equazione del pendolo é

$$\theta''(t) = \sin \theta(t).$$

si puo rescrivere come un sistema

**Problema 7.3.0.2.** *(modello del pendolo) Vedere se il sistema*

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} = \sin u_1(t) \tag{7.3.0.22}$$

$$\tag{7.3.0.23}$$

*ha un primo integrale.*

*Suggerimento.* Per tutti equazioni autonomu

$$y'' = f(y)$$

abbiamo u n sistema del tipo (7.3.0.24).

$$\frac{du_1}{dt} = u_2(t),$$

$$\frac{du_2}{dt} = f(u_1(t)) \tag{7.3.0.24}$$

$$\tag{7.3.0.25}$$

Il primo integrale é

$$H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} - F(u_1),$$

dove $F'(u) = f(u)$, cioé $F$ é la primitiva di $f$. Nel caso del pendolo abbiamo

$$H(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{2} + 1 - \cos(u_1).$$

Si puo vedere Figura 7.2 dove le curve di livello sono tracciati. Alcuni delle curve di livello rappresentano le soluzioni periodiche .

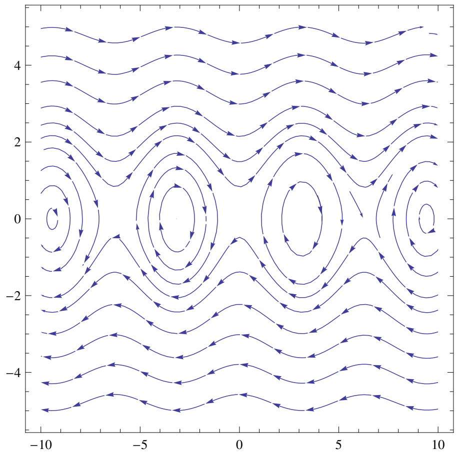


Figure 7.2: Il caso di pendolo

□

# Chapter 8

# Serie Numeriche

## 8.1 Definizioni e proprietá di base

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ci proniamo di definire la somma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Associamo alla successione $\{a_n\}$ una nuova successione fatta dalle sua somme parziali come segue:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

**Definizione 8.1.0.1.** *Diciamo che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e'* convergente e converge al valore $\ell$ *se* $-\infty < \ell < \infty$ *e' tale che*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ell.$$

Cos'i

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$$

significa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \to \ell.$$

**Definizione 8.1.0.2.** *Se*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

*diciamo che la serie diverge (verso $+\infty$.) Se*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty,$$

*diciamo che la serie diverge (verso $-\infty$.)*

**Definizione 8.1.0.3.** *Una serie che non sia convergente oppure divergente si dice* indeterminata*.*

Cosí abbiamo

$$\text{NON CONVERGA} = \text{DIVERGE o É INDETERMINATA} .$$

**Definizione 8.1.0.4.** *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice a termini positivi se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.*

Usando il criterio di Cauchy della convergenza della successione $S_n$ abbiamo.

**Lemma 8.1.0.1** (Criterio di Cauchy)**.** *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e' convergente se e solo se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \nu(\epsilon) \in \mathbf{N} \text{ tale che}$$

$$|\sum_{i=n}^{m} a_i| < \epsilon \ \forall n, m \geq \nu(\epsilon). \tag{8.1.0.1}$$

Scegliendo $m = n$ otteniamo

**Lemma 8.1.0.2** (Condizione necessaria per la convergenza)**.** *Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e' convergente allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

**Corollary 8.1.0.1.** *Se esiste $\varepsilon > 0$ é sottosuccessione*

$$\{a_{n_k}\},$$

*tale che*

$$|a_{n_k}| \geq \varepsilon,$$

*allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*o diferge ( a $+\infty$ o a $-\infty$), o é indeterminata.*

**Esempio 8.1.0.1.** *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{8.1.0.2}$$

*é tale che*

$$a_n \to 0.$$

*Scegliendo $m = 2n$ in* (8.2.2.16) *e usando le disequazioni*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n+1 volte} = \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \to +\infty,$$

*concludiamo (usando il criterio di Cauchy , Lemma 8.1.0.1) che la serie* (8.1.0.2) *diverge.*

**Esempio 8.1.0.2.** *Per la serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{8.1.0.3}$$

*possiamo cacolare la somma parziale*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad se\ x \neq 1.$$

*e usando*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \textit{diverge a } +\infty, & \textit{se } x > 1; \\ 0, & \textit{se } -1 < x < 1; \\ \textit{non esiste}, & \textit{se } x \le -1. \end{cases} \tag{8.1.0.4}$$

*otteniamo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \textit{diverge a } +\infty, & \textit{se } x > 1; \\ 1/(1-x), & \textit{se } -1 < x < 1; \\ \textit{non esiste (é indeterminata)}, & \textit{se } x \le -1. \end{cases} \tag{8.1.0.5}$$

*Se* $x = 1$, *allora*

$$S_n = n + 1$$

*e la serie diverge. Cosi concludiamo che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \textit{diverge a } +\infty, & \textit{se } x \ge 1; \\ 1/(1-x), & \textit{se } -1 < x < 1; \\ \textit{non esiste (é indeterminata)}, & \textit{se } x \le -1. \end{cases} \tag{8.1.0.6}$$

**Problema 8.1.0.1.** *Dimostrare che la serie armonica*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

*diverge.*

*Suggerimento.* Seguire l'argomento dell'esempio 8.1.0.1 e provare che

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dedurne che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

e' divergente. □

### 8.1.1 Somma delle serie

La somma di due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{8.1.1.7}$$

e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{8.1.1.8}$$

é la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n).$$

Se le serie (8.3.0.20) e (8.3.0.21) sono convergenti anche la somma delle due serie sará convergente e abbiamo la relazione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)$$

Se le serie (8.3.0.20) e (8.3.0.21) sono a termini positivi e una delle due serie diverge anche la somma delle serie sará divergente. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é numero reale e la serie (8.3.0.20) converge, allora converge anche la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n \tag{8.1.1.9}$$

é abbiamo la relazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right).$$

### 8.1.2 Assoluta convergenza

Una serie é detta assolutamente convergente se converge la serie dei valori assoluti, cioé se la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$$

converge.

**Lemma 8.1.2.1.** *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *e' convergente allora* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e' convergente.*

*Dimostrazione.* Si puo usare la disequazione triangulare

$$|\sum_{i=n}^{m} a_i| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i|$$

in (8.2.2.16) e poi applichiamo il criterio di Cauchy. □

## 8.2 Criteri di convergenza per serie a termini positivi

Per stabilire se una serie converge o meno é possibile usare dei criteri di convergenza, che consentono spesso di stabilire velocemente il carattere di una serie (specialmente se e' a termini positivi, cioé se $S_n > S_{n-1}$ per ogni $n$ sufficientemente grande) senza tuttavia permettere di calcolarne effettivamente la somma.

Il metodo principale, che viene usato per dimostrare molti altri é il criterio del confronto:

**Lemma 8.2.0.1.** *Se*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

*e*

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

*sono due serie, tali che* $b_i \geq |a_i|$ *per ogni* $n$ *sufficientemente grande e la seconda serie converge, allora converge anche la prima. Inversamente, se la prima diverge cosí fará la seconda.*

*Idea dell dimostrazione.* Usiamo il criterio di Cauchy e la disequazione

$$|\sum_{i=n}^{m} a_i| \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \sum_{i=n}^{m} b_i.$$

□

Secondo criterio del confronto o del confronto asintotico.

**Lemma 8.2.0.2.** *Date due serie a termini positivi*

$$\sum a_n$$

*e*

$$\sum b_n.$$

*Se* $\sum b_n$ *é convergente e*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell,$$

*dove* $\ell$ *esiste ed é finito, allora* $\sum a_n$ *é convergente. Se* $\sum b_n$ *é divergente e*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 (\textit{anche } +\infty),$$

*allora* $\sum a_n$ *é divergente.*

Il criterio del confronto asintotico é utile per far vedere che la serie armonica generalizzata é convergente per $\alpha > 1$.

*Dimostrazione.* Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell, 0 \le \ell < +\infty,$$

per definizione di limite di successione abbiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \varepsilon$$

se prendiamo $\varepsilon = 1$, allora abbiamo

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < 1,$$

che si puó riscrivere come

$$(\ell - 1)b_n < a_n < (\ell + 1)b_n$$

e quindi

$$a_n < (\ell + 1)b_n.$$

Applicando il principio di confronto (Lemma 8.2.0.1) concludiamo che $\sum a_n$ converge.

Analogamente per $\sum b_n$ divergente. □

### 8.2.1 Criterio della radice e del rapporto

Altri criteri molto usati sono il criterio del rapporto e il criterio della radice.

Una versione piu generale usa la nozione di limite superiore definito come segue

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right) = \inf\{\,\sup\{\,x_k : k \geq n\,\} : n \geq 0\,\},$$

**Lemma 8.2.1.1** (Criterio della radice (o di Cauchy))**.** *Consideriamo una serie a termini non negativi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*e poniamo*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k.$$

*Il carattere della serie risulta:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge}, & \textit{se } k < 1; \\ \textit{diverge}\ , & \textit{se } k > 1; \\ \textit{non stabilisce il comportamento della serie}, & \textit{se } k = 1. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che se

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k < 1$$

allora possiamo fissare un $q \in (k, 1)$ tale che per tutti gli $n$ maggiori di un certo $N$ abbastanza grande abbiamo

$$\forall n > N, \quad \sqrt[n]{a_n} < q < 1.$$

Elevando per $n$ si ottiene dunque:

$$\forall n > N, \quad a_n < q^n$$

Applicando allora il criterio del confronto fra la serie

$$\sum a_n$$

e la serie geometrica
$$\sum q^n$$
si ha che la serie converge.

Se
$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}_n = k > 1$$
allora esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ ed un numero naturale $N$ tale che per ogni $k > N$ si ha
$$\sqrt[n]{a_{n_k}} > 1$$
da cui
$$a_n > 1.$$
Dato che $a_{n_k} > 0$ non tende a $0$ la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$
diverge (vedi Corollario 8.1.0.1). $\square$

Di nuovo abbiamo il variante per serie con termini di segno arbitrario.

**Lemma 8.2.1.2.** *[Criterio della radice (o di Cauchy) senza positivitá di $a_n$] Consideriamo una serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$
*e poniamo*
$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k.$$
*Il carattere della serie risulta:*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge}, & \textit{se } k < 1; \\ \textit{diverge o é indeterminata}, & \textit{se } k > 1; \\ \textit{non stabilisce il comportamento della serie}, & \textit{se } k = 1. \end{cases}$$

**Lemma 8.2.1.3** (Criterio del rapporto (o di d'Alembert))**.** *Consideriamo una serie a termini positivi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*tale che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k, \tag{8.2.1.10}$$

*allora la serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge}, & \textit{se } k < 1; \\ \textit{diverge}, & \textit{se } k > 1; \\ \textit{non stabilisce il comportamento della serie}, & \textit{se } k = 1. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Caso (I): Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$$

allora possiamo fissare un numero $q \in (k, 1)$ tale che per tutti gli $n$ maggiori di un certo $N$ abbastanza grande abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$$

e usando induzione in $n$ troviamo

$$a_n < q^{n-N-1} a_{N+1}$$

cosí applicando il principio di confronto e usando il fatto che la serie geometrica

$$\sum q^n$$

converge per $0 \leq q < 1$, concludiamo che la serie data converge.

Caso (II):Si procede in modo simile e si dimostra

$$a_n \geq Q^{n-N-1} a_{N+1}, \quad \forall n > N$$

con $Q > 1$. Usando il fatto che la serie geometrica

$$\sum Q^n$$

diverge per $Q > 1$, concludiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

é divergente. $\square$

**Esempio 8.2.1.1.** *La serie armonica*

$$\sum_1^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

*é tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

*e diverge (secondo il Problema 8.1.0.1).*

**Esempio 8.2.1.2.** *Consideriamo la serie*

$$\sum_1^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

*Usando la relazione*

$$a_n = b_n - b_{n+1}, b_n = \frac{1}{n}, \tag{8.2.1.11}$$

*troviamo*

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}_{S_n} = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) =$$

$$= b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

*si ottiene che la serie* $\sum a_n$ *converge e*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

*Tornando al criterio del raporto possiamo vedere che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

I due esempi 8.2.1.1 e 8.2.1.2 mostrano che nel caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

possiamo avere entrabi possibilita: in alcuni casi come in Esempio 8.2.1.1 la serie diverge, in altri casi come nel Esempio 8.2.1.2 puo divergere.

Se il limite in (8.2.1.15) NON esiste, dobbiamo sostituire (8.2.1.15) con

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

**Lemma 8.2.1.4** (Criterio del rapporto (o di d'Alembert))**.** *Consideriamo una serie a termini positivi*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*é poniamo*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k_+, \liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k_- \tag{8.2.1.12}$$

*allora la serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge}, & \textit{se } k_+ < 1; \\ \textit{diverge}, & \textit{se } k_- > 1; \\ \textit{non stabilisce il comportamento della serie}, & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

*Idea della dimostrazione.* Ricordiamoci Lemma **??** che afferma

$$a_n > 0 \text{ e } \frac{a_{n+1}}{a_n} \to A \Rightarrow (a_n)^{1/n} \to A.$$

Possiamo usare qusta proprieta' per vedere che il criterio del radice implica il criterio del rapporto se possiamo dimostrare le disequiazioni

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{8.2.1.13}$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{8.2.1.14}$$

Infatti sia

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Rap_0$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo affermare che esiste $n_0$, tale che

$$Rap_0 + \varepsilon \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

per $n \geq n_0$ e quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} = \prod_{j=n_0}^{n} \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq (Rap_0 + \varepsilon)^{n-n_0+1}.$$

Cosí si ottiene

$$a_{n+1} \leq \underbrace{a_{n_0}(Rap_0 + \varepsilon)^{-n_0}}_{C_0}(Rap_0 + \varepsilon)^{n+1}$$

e quindi

$$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq C_0^{1/(n+1)}(Rap_0 + \varepsilon)$$

Possiamo adesso dedurre che

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq \limsup_{n\to\infty} C_0^{1/(n+1)}(Rap_0 + \varepsilon) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} C_0^{1/(n+1)}(Rap_0 + \varepsilon) = Rap_0 + \varepsilon.$$

Il numero $\varepsilon > 0$ é arbitrario e quindi la disequazione (8.2.1.15) é dimostrata. In modo simile si dimostra (8.2.1.14). $\square$

**Esempio 8.2.1.3.** *Possiamo costruire una serie*

$$\sum a_n$$

*tale che*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = k^+ > 1$$

*e*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = k^- < 1$$

*Infatti, sia*

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n}, & \textit{se } n \textit{ é pari;} \\ 5^{-n}, & \textit{se } n \textit{ e dispari.} \end{cases}$$

Abbiamo un'altro variante del criterio del rapporto.

**Lemma 8.2.1.5** (Criterio del rapporto (o di d'Alembert) senza positivitá dei termini $a_n$)**.** *Consideriamo una serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

*é sia*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k, \tag{8.2.1.15}$$

*allora la serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge}, & \textit{se } k < 1; \\ \textit{diverge o é indeterminata}, & \textit{se } k > 1; \\ \textit{non stabilisce il comportamento della serie}, & \textit{se } k = 1. \end{cases}$$

**Problema 8.2.1.1.** *Sia*

$$a_n = \begin{cases} 1/n, & \textit{se } n = 3k, k \in \mathbb{N}; \\ 2^{-n}, & \textit{se } n = 3k+1, k \in \mathbb{N}; \\ 4^{-n}, & \textit{se } n = 3k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*Calcolare*

$$k_+ = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*e*

$$k_- = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*e vedere se si puo applicare il criterio del ravvoporto. Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{\mathbb{N}} a_k.$$

**Problema 8.2.1.2.** *Studiare la convergenza della serie* $\sum \frac{n!}{n^n}$.

**Problema 8.2.1.3.** *Costruire una serie* $\sum a_n$ *tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k > 1$$

*e la serie* $\sum a_n$ *e indeterminate.*

**Problema 8.2.1.4.** *Costruire una serie* $\sum a_n$ *tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k > 1$$

*e la serie* $\sum a_n$ *diverge.*

### 8.2.2 Esercizi sulle serie con termini positivi

**Problema 8.2.2.1.** *Se*

$$\sum_1^\infty a_n$$

*é una serie con termini positivi e* $a_n$ *non tende a* 0*, allora la serie diverge.*

**Problema 8.2.2.2.** *Costruire una serie con termini positivi*

$$\sum_1^\infty a_n$$

*tale che* $a_n$ *tende a* 0 *e la serie diverge.*

**Problema 8.2.2.3.** *Provare che ogni serie a termini positivi e' convergente oppure divergente.*

**Problema 8.2.2.4.** *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2\alpha}+8}{n^7+e^{(\alpha-1)n}} \tag{8.2.2.16}$$

*al variare del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Soluzione.* Il termine dominante tra $n^7$ e $e^{(\alpha-1)n}$ dipende se $\alpha$ é minore oppure maggiore di 1. Il termine dominante tra $n^{2\alpha}$ e 8 dipende se $\alpha$ é positivo e negativo. Questa osservazione ci porta allo studio di seguenti 3 casi.

Caso a) $\alpha < 0$. In questo caso

$$n^{2\alpha} + 8 = 8 + o(1),$$

e

$$n^7 + e^{(\alpha-1)n} = n^7(1 + o(1))$$

e quindi

$$\frac{n^{2\alpha}+8}{n^7+e^{(\alpha-1)n}} = b_n(1 + o(1)),$$

dove

$$b_n = 8n^{-7}$$

Il principio di confronto ed il fatto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

converge implicano che la serie in (8.2.2.16) converge. Lo stesso ragionamento implica la convergena per $\alpha = 0$.

Caso b) $0 < \alpha < 1$. Abbiamo

$$n^{2\alpha} + 8 = n^{2\alpha}(1 + o(1)),$$

e

$$n^7 + e^{(\alpha-1)n} = n^7(1 + o(1))$$

e quindi
$$\frac{n^{2\alpha}+8}{n^7+e^{(\alpha-1)n}} = c_n(1+o(1)),$$
dove
$$c_n = n^{2\alpha-7}$$
Il principio di confronto ed il fatto che
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$
converge implicano che la serie in (8.2.2.16) converge. Lo stesso ragionamento implica la convergena per $\alpha = 1$.

Caso c) $\alpha > 1$. Abbiamo
$$n^{2\alpha}+8 = n^{2\alpha}(1+o(1)),$$
e
$$n^7+e^{(\alpha-1)n} = e^{(\alpha-1)n}(1+o(1))$$
e quindi
$$\frac{n^{2\alpha}+8}{n^7+e^{(\alpha-1)n}} = d_n(1+o(1)),$$
dove
$$d_n = n^{2\alpha}e^{-(\alpha-1)n}$$
Il principio di confronto ed il fatto che
$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n$$
converge implicano che la serie in (8.2.2.16) converge. □

**Problema 8.2.2.5.** *Studiare la convergenza della serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/n} - \frac{x}{n}\right]. \qquad (8.2.2.17)$$

*Soluzione.* Abbiamo lo sviluppo

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/n} = e^{2/n^2+o(1/n^2)} = 1+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Cosi troviamo

$$\left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/n} - \frac{x}{n}\right] = \frac{1-x}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ed il principio di confronto implica che la serie converge se e solo se $x=1$. □

**Problema 8.2.2.6.** *Studiare la convergenza di*

$$\sum \frac{2^n+n^3}{3^n+n^2}.$$

**Problema 8.2.2.7.** *Studiare la convergenza di*

$$\sum \frac{\cos n^2+\sqrt{n}}{n}.$$

**Problema 8.2.2.8.** *Studiare la convergenza della serie al variare di* $a, b > 0$ *e* $c \in \mathbf{R}$

$$\sum a^n \left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+c}$$

**Problema 8.2.2.9.** *Studiare la convergenza della serie a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right].$$

**Problema 8.2.2.10.** *Dire per quali valori di* $\alpha > -1$ *si ha che la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

*risulta convergente.*

**Problema 8.2.2.11.** *Costruire due serie*

$$\sum_{1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{1}^{\infty} b_n,$$

*tali che*

$$|a_n| \geq |b_n|,$$

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

*converge, mentre*

$$\sum_{1}^{\infty} b_n$$

*diverge.*

**Problema 8.2.2.12.** *Vedere se il criterio del rapporto si puo applicare per la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^{b_n}}, \quad b_n = (-1)^n \sqrt{n} + n.$$

**Problema 8.2.2.13.** *Studiare il comportamento della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$ *(si ricorda che* $n! = 1.2....(n-1).n$*).*

*Suggerimento.* Usare l'dentita'

$$\ln n! = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$$

ed il principio di confronto. □

**Problema 8.2.2.14.** *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n - \sqrt{n^2+1})}{n}.$$

**Problema 8.2.2.15.** *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n - \sqrt{n^2+n})}{n}.$$

**Problema 8.2.2.16** (Difficolta ellevata)**.** *Studiare il comportamento della serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}.$$

*Suggerimento.*
$$\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(2n)}{n}\right).$$

Usare il Problema 8.3.0.10. □

## 8.3 Criteri di Leibniz e di Abel-Dirichlet

Si dicono serie a termini di segno alterno le serie a termini reali tali che due termini consecutivi hanno segno opposto. Se

$$a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la serie
$$\sum (-1)^n a_n$$
dunque a termini di segno alterno, infatti: per $n$ pari il termine é positivo; per $n$ dispari il termine é negativo.

Per queste serie vale il seguente criterio di Leibniz:

**Lemma 8.3.0.1.** *Data la serie di termini a segno alterno*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0,$$

*se la successione $\{a_n\}$ é definitivamente positiva, decrescente e tende a 0, cioé:*
$$a_n \geq a_{n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
*allora si ha che:*

- *la serie*
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$
*é convergente ;*

- *le somme parziali*
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$$
*di ordine pari e quelle di ordine dispari sono monotone e tendono ad*
$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k;$$

- *abbiamo inoltre*
$$|S_n - S| \leq |a_{n+1}| \forall n \in \mathbb{N}.$$

Questo criterio é un caso particolare del criterio di Abel - Dirichlet.

**Teorema 8.3.1.** *(criterio di Abel - Dirichlet) Siano $\{b_n\}_n$ una successione infinitesima e decrescente, ossia*
$$\lim_{n \to +\infty}(b_n) = 0 \tag{8.3.0.18}$$
*e*
$$b_{n+1} \leq b_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \tag{8.3.0.19}$$
*e sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che per ogni $n \in \mathbb{N} : |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq C$, con $C$ numero reale. Allora la serie numerica*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n b_n)$$
*é convergente.*

*Idea della dimostrazione.* Poniamo

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

abbiamo la relazione

$$a_1 = A_1, \quad a_n = A_n - A_{n-1},$$

cosi possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + \cdots + (A_N - A_{N-1}) b_N =$$

$$= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{N-1}(b_{N-1} - b_N) + A_n b_N.$$

L'idea é l'applicazione del criterio di Cauchy, per quello modifichiame le identitá sopra scegliendo $1 < M < N$ come segue

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n =$$

$$= (A_M - A_{M-1}) b_M + (A_{M+1} - A_M) b_{M+1} + (A_{M+2} - A_{M+1}) b_{M+1} + \cdots + (A_N - A_{N-1}) b_N =$$

$$= -A_{M-1} b_M + A_M (b_M - b_{M+1}) + A_{M+1}(b_{M+1} - b_{M+2}) + \cdots + A_{N-1}(b_{N-1} - b_N) + A_n b_N,$$

e quindi usando l'ipotesi

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k| = |A_N| \leq C,$$

troviamo

$$\left| \sum_{n=M}^{N} a_n b_n \right| \leq C|b_M| + C|b_M - b_{M+1}| + C|b_{M+1} - b_{M+2}| + \cdots + C|b_{N-1} - b_N| + C|b_N|.$$

A questo punto possiamo usare l'ipotesi (8.3.0.19) e scrivere

$$|b_M| + |b_M - b_{M+1}| + |b_{M+1} - b_{M+2}| + \cdots + |b_{N-1} - b_N| + |b_N| =$$

$$= |b_M| + \underbrace{(b_M - b_{M+1}) + (b_{M+1} - b_{M+2}) + \cdots + (b_{N-1} - b_N)}_{=b_M - b_N} + |b_N|.$$

In questo modo troviamo la stima

$$\left| \sum_{n=M}^{N} a_n b_n \right| \leq 2C|b_M| + 2C|b_N|$$

e l'ipotesi (8.3.0.18) implica

$$\left| \sum_{n=M}^{N} a_n b_n \right| \leq \varepsilon$$

quando $M < N$ sono abbastanza grandi. Applicando il criterio di Cauchy, concludiamo che la serie

$$\sum a_n b_n$$

converge.

$\square$

Per calcolare varie somme del tipo

$$\sum_{k=n}^{m} \sin(kx + b), \quad \sum_{k=n}^{m} \cos(kx + b),$$

ci servono le formule

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kd) = \frac{\sin\left(\frac{nd}{2}\right)}{\sin\left(\frac{d}{2}\right)} \sin\left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right). \tag{8.3.0.20}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kd) = \frac{\sin\left(\frac{nd}{2}\right)}{\sin\left(\frac{d}{2}\right)} \cos\left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right). \tag{8.3.0.21}$$

**Problema 8.3.0.1.** *Verificare* (8.3.0.20) *se* $\sin(d/2) \neq 0$.

**Problema 8.3.0.2.** *Verificare* (8.3.0.21) *se* $\sin(d/2) \neq 0$.

**Problema 8.3.0.3.** *Studiare la natura della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

**Problema 8.3.0.4.** *Studiare la convergenza della serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin n + \cos n)(x^n)$.

**Problema 8.3.0.5.** *Studiare il comportamento della serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(3n)}{(\ln n)^{\alpha}}$ *al variare di* $\alpha \geq 0$.

**Problema 8.3.0.6.** *Studiare al variare di* $\alpha > 0$ *ed* $x \in \mathbf{R}$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n$.

**Problema 8.3.0.7.** *Studiare la convegrenza di*

$$\sum (a^n + \frac{1}{n^{3a}})$$

*al variare di* $a \in \mathbf{R}$.

**Problema 8.3.0.8.** *Studiare al variare di* $x \in \mathbf{R}$ *la convergenza di*

$$\sum \frac{(\sin x)^n}{n}.$$

**Problema 8.3.0.9.** *Studiare la convergenza di*

$$\sum \frac{(-1)^n n}{1+n^2}.$$

**Problema 8.3.0.10.** *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)^2}{n}. \tag{8.3.0.22}$$

*Suggerimento.* Usare la relazione

$$\sin^2 n = \frac{1-\cos(2n)}{2}$$

e usando la relazione

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(\sin n)^2}{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2n)}{n}\right),$$

verificare che la serie (8.3.0.22) diverge perche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge mentre

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2n)}{n}$$

converge. □

**Problema 8.3.0.11.** *Studiare il comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}.$$

*Suggerimento.* Usare la disequazione

$$\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n}$$

e applicando il principio di confronto e la soluzioe del Problema 8.3.0.10, concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$$

diverge. □

## 8.3.1 Raggio di convergenza

Una serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

converge per alcuni valori della variabile $x$ (almeno per $x = c$ ) e puó divergere per altri. Infatti, ponendo

$$b_n(x) = a_n (x-c)^n$$

possiamo applicare il Criterio della radice (Lemma 8.2.1.2) secondo quale dobbiamo introdulle il seguente limite superiore

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} = k.$$

La definizione di $b_n(x)$ implica

$$k = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n(x)|} = |x-c| \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Il criterio della radice ci dice che il carattere della serie risulta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x) \begin{cases} \text{converge,} & \text{se } k < 1; \\ \text{diverge o é indeterminata,} & \text{se } k > 1; \\ \text{non stabilisce il comportamento della serie,} & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Ponendo

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{8.3.1.23}$$

possiamo concludere.

**Lemma 8.3.1.1.** *Esiste un numero $R$ definito con* (8.3.1.23) *con* $0 \leq R \leq \infty$ *tale che la serie converge quando* $|x-c| < R$ *e diverge o e indeterminata quando* $|x-c| > R$.

Questo numero $R$ é chiamato raggio di convergenza della serie di potenze e per ogni serie é dato dalla formula (8.3.1.23) di Cauchy-Hadamard per il raggio di convergenza. Possiamo rescriver questa formula come segue

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}};$$

Una formula meno generale ma piú semplice è la seguente (formula di D'Alembert)[1]:

$$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

La serie converge assolutamente per $|x-c| < R$ su ogni sottoinsieme compatto del intervallo $x : |x-c| < R$.

Per $|x-c| = R$ non si dispone di alcun enunciato generale sulla convergenza o meno della serie.

[1]Questa formula è peró applicabile solo se il limite al secondo membro esiste.

## 8.3.2 Esercizi sulle serie di potenze

**Problema 8.3.2.1.** *a) Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

*al variare del parametro* $x \in \mathbb{R}$.

*b) Vedere se per* $x = 1/2$ *la serie converge e se converge calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}.$$

*Soluzione a).* Usando il criterio del radice troviamo per

$$a_n = \frac{|x|^n}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to |x|$$

e quindi la serie converge per $|x| < 1$, diverge per $x < -1$ e non converge per $x > 1$. Per $x = 1$ applichiamo il criterio di Leibniz e troviamo la serie converge. Per $x = -1$ abbiamo la serie armonica e quindi diverge. □

*Soluzione b).* Ponendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

troviamo

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -\frac{1}{1+x}$$

e quindi

$$f(x) = -\ln(1+x).$$

Con $x = 1/2$ troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} = f(1/2) = -\ln(3/2).$$

$\square$

**Problema 8.3.2.2.** *a) Studiare la convergenza della serie*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

*al variare del parametro* $x \in \mathbb{R}$.

*b) Vedere se per* $x = 1/3$ *la serie converge e se converge calcolare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n}.$$

*Soluzione a).* Usando il criterio del radice troviamo per

$$a_n = \frac{|x|^n}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to |x|$$

e quindi la serie converge per $|x| < 1$, diverge per $x < -1$ e non converge per $x > 1$. Per $x = 1$ applichiamo il criterio di Leibniz e troviamo la serie converge. Per $x = -1$ abbiamo la serie armonica e quindi diverge. $\square$

*Soluzione b).* Ponendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

troviamo

$$f'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -\frac{1}{1+x}$$

e quindi

$$f(x) = -\ln(1+x).$$

Con $x = 1/3$ troviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n} = f(1/3) = -\ln(4/3).$$

$\square$

# Bibliography

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo, Primo corso di Analisi Matematica 1997, *Pitagora Editrice Bologna,* ISBN 88-371-0942-3.

[2] E. Acerbi; L. Modica; S. Spagnolo, Problemi scelti di analisi matematica I, *Liguori Editore* , 1985.

[3] S.Campanato, Lezioni di Analisi Matematica I parte, *Libreria scientifica Giordano Pellegrini, Pisa* 1993.

[4] S.Campanato, Esercizi e complementi di Analisi Matematica, I parte, *Libreria scientifica Giordano Pellegrini, Pisa.*

[5] E.Guisti, Analisi Matematica 1, *Bollati Boringhieri,* 1988.

[6] E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi 1, *Bollati Boringhieri.*

[7] A. W. Knapp, Basic Real Analysis, Along with a companion volume Advanced Real Analysis, *Birkhäuser,* 2005

[8] W.Rudin, Principi di Analisi Matematica, *McGraw Hill Libri Italia SRL*, 1991.

[9] T. N. Subramaniam, and Donald E. G. Malm *How to Integrate Rational Functions*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), 762 – 772.