Analisi Matematica 2 - Corso di Laurea in INGEGNERIA DELL'ENERGIA e INGEGNERIA CHIMICA

(A.A. 2019/2020)

Assignement II, Scritto 25.1.2021

Problema 2. Sia
$$I(R) = \int_{\gamma_R} \alpha,$$
dove
$$\alpha = e^{-x^2+y^2} \cos(2xy)dx - e^{-x^2+y^2} \sin(2xy)dy$$
e γ_R é l'arco
$$\{x^2 + y^2 = R^2, 0 < y < x\}$$
orientato in senso antiorario. Vedere se esiste il limite $\lim_{R\to\infty} I(R)$ e usando questo limite calcolare
$$\int_0^\infty \cos(4x^2)dx.$$

Breve soluzione . Per stimare
$$\int_{\gamma_R} \alpha$$
usiamo la parametrizzazione
$$x = R\cos\varphi, \;\; y = R\sin\varphi, \quad \varphi \in (0, \pi/4)$$
e troviamo per ogni $\delta < \pi/8$
$$\int_{\gamma_R} \alpha =$$
$$-\int_0^{\pi/4} e^{-R^2(cos(2\varphi))} \left(\cos(R^2\sin(2\varphi))R\sin\varphi + \sin(R^2\sin(2\varphi))R\cos\varphi\right) d\varphi$$

Usando

$$\cos(2\varphi) > c\delta, \ |\varphi - \pi/4| \leq \delta$$

troviamo

$$\left|\int_{\gamma_R} \alpha\right| \leq 2\int_0^{\pi/4-\delta} e^{-R^2 c\delta} R d\varphi + \int_{\pi/4-\delta}^{\pi/4} 2R d\varphi \leq e^{-cR^2\delta} R + \delta R.$$

Scegliendo $\delta = R^{-3/2}$, troviamo

$$\left|\int_{\gamma_R} \alpha\right| \to 0.$$

Pratticamente gli studenti che sono riusciti a trovare e GIUSTIFICARE il limite hanno ottenuto il massimo di voto.

Il resto e la soluzione completa.

Nello stesso modo si vede che

$$\left|\int_{\gamma_R} \beta\right| \to 0.$$

dove

$$\beta = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx + e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dy.$$

Il differenziale della forma

$$\beta = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dx + e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dy \qquad (1) \quad \boxed{\texttt{eq.1}}$$

é

$$d\beta = \left[-\partial_y\left(e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)\right) + \partial_x\left(e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)\right)\right] dxdy =$$

$$\left[-2ye^{-x^2+y^2}\cos(2xy) + 2xe^{-x^2+y^2}\sin(2xy) - 2xe^{-x^2+y^2}\sin(2xy) + 2ye^{-x^2+y^2}\cos(2xy)\right] dxdy = 0.$$

In modo simile la forma

$$\sigma = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy)dy - e^{-x^2+y^2}\sin(2xy)dx$$

ha differenziale 0 .

Sia

$$\Omega_R = \{(x,y); 0 < y < x, y^2 + x^2 \leq R^2\}$$

con frontiara

$$\partial\Omega_R = A_R + \gamma_R + B_R,$$

dove

$$A_R = \{(x,0); 0 < x < R\}, \quad B_R = \{(y,y); 0 < y < R\}.$$

Il teorema di Stokes implica

$$0 = \int_{\Omega_R} d\beta = \int_{A_R} \beta + \int_{\gamma_R} \beta + \int_{B_R} \beta.$$

$$0 = \int_{\Omega_R} d\sigma = \int_{A_R} \sigma + \int_{\gamma_R} \sigma + \int_{B_R} \sigma.$$

Prendendo limite $R \to \infty$, usiamo

$$\int_{A_R} \beta \to \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{A_R} \sigma \to 0$$

e quindi

$$\int_{B_R} \beta \to -\int_0^\infty \left(\cos(2y^2) + \sin(2y^2)\right) dy = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\int_{B_R} \sigma \to \int_0^\infty \left(\cos(2y^2) - \sin(2y^2)\right) dy = 0.$$

Cosi troviamo

$$\int_0^\infty \cos(2y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Usando la relazione

$$\int_0^\infty \cos(R^2y^2) dy = R^{-1} \int_0^\infty \cos(y^2) dy, \tag{2}$$ eq.rel1

troviamo

$$\int_0^\infty \cos(y^2) dy = \sqrt{2} \int_0^\infty \cos(2y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8}}.$$

eq.rel1
La relazione (2) implica

$$\int_0^\infty \cos(R^2y^2) dy = R^{-1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8}}. \tag{3}$$ eq.rel2

Con $R = 2$ si trova

$$\int_0^\infty \cos(4y^2)dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}.$$

$\square$

Remark 1. Regole durante lo scritto:

1. La videocamera deve essere sempre accesa

2. Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compitino i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO

3. Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;

4. Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.

5. Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.

6. La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.

7. Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario fará una foto. Solo dopo lo studente puó inviare la soluzione.